

Chapitre 3 : Nombres en écriture fractionnaire

I Comparaison de quotients

Méthode:

Pour comparer des nombres en écriture fractionnaire, on les écrit avec le même dénominateur puis on les range dans le même ordre que les numérateurs.

Exemple: Compare les nombres $\frac{1,2}{4}$ et $\frac{5,7}{20}$

à connaître
par cœur!

Règle: On ne change pas la valeur d'une fraction en multipliant ou en divisant son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

On écrit le nombre $\frac{1,2}{4}$ avec le dénominateur 20: $\frac{1,2}{4} = \frac{1,2 \times 5}{4 \times 5} = \frac{6}{20}$

on compare les numérateurs : $6 > 5,7$ donc $\frac{6}{20} > \frac{5,7}{20}$

on en déduit que $\frac{1,2}{4} > \frac{5,7}{20}$

remarques:

a)

Si des nombres en écriture fractionnaire ont des numérateurs égaux, alors ils sont rangés dans l'ordre inverse de leurs dénominateurs.

Exemple : Compare $\frac{13}{18}$ et $\frac{13}{19}$

$$18 < 19 \text{ donc } \frac{13}{18} > \frac{13}{19}$$

En effet si l'on confectionne 2 gâteaux identiques,

l'un nommé "gâteau A" est partagé en 18 parts; l'autre nommé "gâteau B" est partagé en 19 parts. Les parts du gâteau A sont donc plus grosses.

On prend le même nombre de parts : on a plus d'un côté 13 grosses parts, de l'autre 13 plus petites parts.

b)

Si le numérateur d'un nombre en écriture fractionnaire est supérieur à son dénominateur, alors le nombre est supérieur à 1.

Si le numérateur est inférieur au dénominateur alors le nombre est inférieur à 1.

Exemple : $\frac{127}{156} < 1$ car $127 < 156$ $\frac{327}{123} > 1$ car $327 > 123$

II Additionner ou soustraire 2 fractions :

1) Méthode:

Pour additionner ou soustraire des nombres en écritures fractionnaires, on les écrit avec le même dénominateur, puis on additionne (ou on soustrait) les numérateurs en gardant le dénominateur commun.

Exemple: Calcule $A = \frac{7}{3} + \frac{6}{12}$

• On écrit les fractions avec le même dénominateur : en 5^e le dénominateur commun est le plus grand dénominateur.

$$A = \frac{7 \times 4}{3 \times 4} + \frac{6}{12}$$

$$A = \frac{28}{12} + \frac{6}{12}$$

• On additionne les numérateurs en conservant le dénominateur :

$$A = \frac{28+6}{12} \quad A = \frac{34}{12}$$

• On utilise les critères de divisibilité pour simplifier la fraction :

$$A = \frac{34 \div 2}{12 \div 2} = \frac{17}{6}$$

2) Simplifier une fraction

a) Définition:

Simplifier une fraction signifie trouver une fraction qui lui est égale, mais avec un numérateur et un dénominateur plus petits.

Exemples: $\frac{8}{12} = \frac{2 \times \cancel{4}}{3 \times \cancel{4}} = \frac{2}{3}$

$$\frac{20}{35} = \frac{4 \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times 7} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{135}{75} = \frac{\cancel{3} \times 45}{\cancel{3} \times 25} = \frac{45}{25}$$

remarque 1: Lorsque l'on ne peut plus simplifier la fraction, on dit que celle-ci est **irréductible**.

Par exemple, ci-dessus $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{7}$ sont irréductibles alors que $\frac{45}{25}$ peut encore être simplifié.

remarque 2: Pour simplifier une fraction, on peut décomposer le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs à l'aide des **critères de divisibilité**.

b) Critères de divisibilité

Rappel n°1 : Soient a et b deux nombres entiers positifs.

Lorsque le reste de la division de a par b est égal à zéro,

on dit que a est un **multiple** de b , ou que b est un **diviseur** de a , ou encore que a est **divisible** par b .

Par exemple :

- 15 est un **multiple** de 3, car $15 = 3 \times 5$

Autrement dit, 3 est un **diviseur** de 15, ou encore 15 est **divisible** par 3.

- 17 n'est pas un multiple de 3, car $17 = 3 \times 5 + 2$

EXERCICE 1

1. 12 est-il un diviseur de 6? ... *non c'est le contraire* ... 6 est un diviseur de 12
2. 124 est-il divisible par 4? ... *oui car $124 = 4 \times 31$*
3. 38 est-il un multiple de 5? ... *non car $38 = 5 \times 7 + 3$*
4. Citer cinq multiples du nombre 12. ... *$12 \times 1 = 12$... $12 \times 2 = 24$... $12 \times 3 = 36$... $12 \times 4 = 48$... $12 \times 5 = 60$*
5. Citer cinq diviseurs du nombre 12. ... *1; 2; 3; 4; 6; 12* ... *sont tous les diviseurs de 12*
6. Déterminer tous les diviseurs du nombre 30. ... *30 est divisible par 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30*
7. Déterminer un nombre qui soit à la fois multiple de 2, de 5 et de 7. ... *$2 \times 5 \times 7$ est un multiple de 2, 5 et de 7.*

Rappel n°2 : Critères de divisibilité

- Un nombre sera **divisible par 2** si son dernier chiffre est 0, 2, 4, 6 ou 8. 1274 est divisible par 2, car 4 est pair.
- Un nombre sera **divisible par 3** si la somme de ses chiffres est divisible par 3. 294 est divisible par 3 car $2+9+4=15$ et 15 est un multiple de 3.
- Un nombre sera **divisible par 4** si la moitié est paire, ou encore si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4. 12620 est divisible par 4 car 20 est divisible par 4.
- Un nombre sera **divisible par 5** si son dernier chiffre est 0 ou 5. 37956095 est divisible par 5.
- Un nombre sera **divisible par 9** si la somme de ses chiffres est divisible par 9. 945 est divisible par 9 car $9+4+5=18$ et 18 est divisible par 9.
- Un nombre sera **divisible par 10** si son dernier chiffre est 0. 890910 est divisible par 10.

EXERCICE 2

Parmi les nombres suivants :

1125	6354	8940	917	1308	51225	111111
------	------	------	-----	------	-------	--------

préciser :

– lesquels sont divisibles par 2 : $6354; 8940; 1308;$ – lesquels sont divisibles par 3 : 1125 car $1+1+2+5=9$; $6354; 8940; 1308; 51225; 111111$ – lesquels sont divisibles par 4 : $8940; 1308;$ – lesquels sont divisibles par 5 : $1125; 8940; 51225$ – lesquels sont divisibles par 9 : $1125; 6354;$ Montrer que le nombre qui reste est divisible par 7 : $917 = 700 + 210 + 7$

$$917 = 700 + 210 + 7$$

$$= 7 \times 100 + 7 \times 30 + 7 \times 1$$

$$= 7 \times (100 + 30 + 1)$$

$= 7 \times 131$ ce qui prouve que 917 est dans la table de 7, autrement dit 917 est un multiple de 7

ou encore 917 est divisible par 7.

III Multiplier des nombres en écriture fractionnaire

1) Rapels de 6^e: Prendre une fraction d'une quantité

Prendre une fraction d'une quantité revient à multiplier la fraction par cette quantité

Exemple 1: Combien valent 70% de 25€ ?

Les mots « de, des, d', des » sont remplacés par le symbole \times de la multiplication

On calcule: $\frac{70}{100} \times 25$

$$= \frac{70 \times 25}{100}$$

$$= \frac{70 \times \cancel{25}}{4 \times \cancel{25}}$$

$$= \frac{70}{4}$$

$$= \frac{\cancel{2} \times 35}{\cancel{2} \times 2}$$

$$= 17,5$$

On conclut : 70% de 25€ valent 17,5€

Exemple 2 : Dans un collège comptant 820 élèves les deux cinquièmes de l'effectif sont demi pensionnaires
Combien y a-t-il d'externes.

On calcule la proportion d'externes :

$$\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{5-2}{5}$$

$$= \frac{3}{5}$$

$\frac{3}{5}$ des 820 élèves sont externes :

$$\text{on calcule : } \frac{3}{5} \times 820$$

$$= \frac{3 \times 820}{5}$$

$$= \frac{3 \times \cancel{5} \times 164}{\cancel{5}}$$

$$= 3 \times 164$$

$$= 492$$

Le collège compte 492 élèves externes.

2) Règle:

Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Quand les facteurs du numérateur et du dénominateur ont des diviseurs communs, il est plus judicieux de simplifier la fraction avant de calculer les produits.

exemple 1: $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

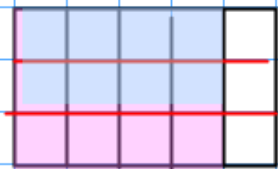
$$= \frac{2 \times 4}{3 \times 5}$$

$$= \frac{8}{15}$$

illustration par un dessin

calculer $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ revient à

calculer $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$



on coupe le rectangle en 5 bandes.
et on en prend 4

exemple 2: $\frac{3,2}{5} \times \frac{3}{1,3}$

$$= \frac{3,2 \times 3}{5 \times 1,3}$$

$$= \frac{9,6}{6,5}$$

$$= \frac{96}{65}$$

pour prendre $\frac{2}{3}$ de la partie coloriée, on la coupe en 3 parts égales, dans la largeur: on forme 3 rangées et on en prend 2: on a ainsi sélectionné $\frac{8}{15}$ du rectangle

Exemple 3: Problème

- a) Johnny passe $\frac{8}{35}$ de son temps libre sur Internet. Lorsqu'il est sur internet, il occupe 30% de son temps de connexion à discuter sur Facebook avec Bob. Quelle proportion de son temps libre consacre-t-il à dater avec Bob ?

Johnny passe 30% des $\frac{8}{35}$ de son temps libre à discuter avec Bob par internet :

On calcule : $\frac{30}{100} \times \frac{8}{35}$

$$= \frac{30 \times 8}{100 \times 35}$$

$$= \frac{\cancel{5} \times 6 \times 2 \times \cancel{4}}{\cancel{4} \times 25 \times 7 \times \cancel{5}}$$

$$= \frac{6 \times 2}{25 \times 7}$$

$$= \frac{12}{175}$$

Johnny passe $\frac{12}{175}$ de son temps libre en chat sur FB avec Bob