

Chapitre 3 : nombres en écriture fractionnaire

I Comparaison de quotients

1) Transformer, simplifier une écriture fractionnaire :

Règle : Si on multiplie ou si on divise le numérateur et le dénominateur d'un quotient par un même nombre non nul alors on obtient un quotient égal :

pour tous nombres a , b et k tels que b et k sont différents de zéro $\frac{a \times k}{b \times k} = \frac{a}{b}$ et $\frac{a \div k}{b \div k} = \frac{a}{b}$

Exemple 1 : Simplifie le quotient $\frac{42}{140}$

on cherche les facteurs communs à 42 et 140 : $\frac{42}{140} = \frac{3 \times \cancel{2} \times 7}{10 \times \cancel{2} \times 7}$

on peut simplifier le quotient : $\frac{42}{140} = \frac{3}{10}$

Exemple 2 : Détermine le nombre manquant dans l'égalité $\frac{1,2}{6} = \frac{\dots}{18}$

Pour passer de 6 à 18, on multiplie par 3 au dénominateur

Donc pour trouver le nombre manquant au numérateur, on multiplie 1,2 par 3 ce qui donne 3,6.

$$\frac{1,2}{6} = \frac{1,2 \times 3}{18} = \frac{3,6}{18}$$

2) Rappels sur les critères de divisibilité

Rappel n°1 : Soient a et b deux nombres entiers positifs.

Lorsque le reste de la division de a par b est égal à zéro,

on dit que a est un **multiple** de b , ou que b est un **diviseur** de a , ou encore que a est **divisible** par b .

Par exemple :

- 15 est un **multiple** de 3, car $15 = 3 \times 5$

Autrement dit, 3 est un **diviseur** de 15, ou encore 15 est **divisible** par 3.

- 17 n'est pas un multiple de 3, car $17 = 3 \times 5 + 2$

EXERCICE 1

1. 12 est-il un diviseur de 6? ... non c'est 6 qui est un diviseur de 12 car on peut faire $12 \div 6 = 2$
2. 124 est-il divisible par 4? ... oui car le reste de la division de 124 par 4 est égal à zéro
3. 38 est-il un multiple de 5? ... non car $38 = 5 \times 7 + 3$
4. Citer cinq multiples du nombre 12... On les trouve dans la table de 12 : 12; 24; 36; 48; 60
5. Citer cinq diviseurs du nombre 12... 12 est divisible par 1; 2; 3; 4; 6; 12 : ce sont **tous** ses diviseurs
6. Déterminer tous les diviseurs du nombre 30... 30 est un multiple de 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30
7. Déterminer un nombre qui soit à la fois multiple de 2, de 5 et de 7... $2 \times 5 \times 7 = 70$

Rappel n°2 : Critères de divisibilité

- Un nombre sera divisible par 2 si le chiffre des unités est 0; 2; 4; 6; 8.
- Un nombre sera divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- Un nombre sera divisible par 4 si la moitié est paire ou encore si le nombre formé par ses 2 derniers chiffres est divisible par 4.
- Un nombre sera divisible par 5 si il se termine par 0 ou 5
- Un nombre sera divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- Un nombre sera divisible par 10 si il se termine par 0.

EXERCICE 2

Parmi les nombres suivants :

1125	6354	8940	917	1308	51225	111111
------	------	------	-----	------	-------	--------

préciser :

- lesquels sont divisibles par 2 : 6354; 8940; 1308
- lesquels sont divisibles par 3 : $1+1+2+5=9$ donc 1125 est divisible par 3; de même 6354; 8940; 1308; 51225; 111111
- lesquels sont divisibles par 4 : 8940; 1308
- lesquels sont divisibles par 5 : 1125; 8940; 51225
- lesquels sont divisibles par 9 : 1125; 6354

Montrer que le nombre qui reste est divisible par 7 : 917 est divisible par 7 car on peut

$$\begin{aligned}
 \text{écrire } 917 &= 700 + 210 + 7 \\
 &= 7 \times 100 + 7 \times 30 + 7 \times 1 \\
 &= 7 \times (100 + 30 + 1) \\
 &= 7 \times 131
 \end{aligned}$$

Critère de divisibilité par 7 :

Méthode : on sépare le dernier chiffre

- on multiplie le dernier chiffre par 2
- puis on soustrait le résultat de la partie du nombre qui reste
- Si le résultat obtenu est divisible par 7 alors le nombre étudié était divisible par 7

Exemple : 371 est-il divisible par 7 ?

$$37\overset{1}$$

$$1 \times 2 = 2$$

$$37 - 2 = 35 \quad \text{donc } 371 \text{ est divisible par } 7.$$

3) Méthodes pour comparer des fractions :

Méthode 1 :

⤴ Pour comparer des nombres en écriture fractionnaire, on les écrit avec le même dénominateur puis on les range dans le même ordre que leurs numérateurs.

Exemple : range dans l'ordre croissant les nombres suivants

$$A = \frac{1,2}{4} \quad B = \frac{5,7}{20} \quad C = \frac{3,1}{10} \quad D = \frac{1,7}{5} \quad E = \frac{5,9}{20}$$

Exemple: range dans l'ordre croissant les nombres suivants

$$A = \frac{1,2}{4} \quad B = \frac{5,7}{20} \quad C = \frac{3,1}{10} \quad D = \frac{1,7}{5} \quad E = \frac{5,9}{20}$$

En 5^e le dénominateur commun sera toujours le plus grand dénominateur.

• on écrit toutes les fractions avec un dénominateur égal à 20

$$A = \frac{1,2}{4} = \frac{1,2 \times 5}{4 \times 5} = \frac{6}{20} \quad ; \quad C = \frac{3,1}{10} = \frac{3,1 \times 2}{10 \times 2} = \frac{6,2}{20} \quad ; \quad D = \frac{1,7}{5} = \frac{1,7 \times 4}{5 \times 4} = \frac{6,8}{20}$$

• on range les fractions dans le même ordre que leurs numérateurs :

$$\frac{5,7}{20} < \frac{5,9}{20} < \frac{6}{20} < \frac{6,2}{20} < \frac{6,8}{20} \quad \text{on a donc} \quad B < E < A < C < D$$

• on en déduit que $\frac{5,7}{20} < \frac{5,9}{20} < \frac{1,2}{4} < \frac{3,1}{10} < \frac{1,7}{5}$

Application: exercices n° 8; 9; 10 page 12

Méthode 2: Comparaison à l'unité

Si le numérateur d'un nombre en écriture fractionnaire est supérieur à son dénominateur alors le nombre est supérieur à 1.

Si le numérateur est inférieur au dénominateur alors le quotient est inférieur à 1.

Exemple: $\frac{123}{524} < 1$ car $123 < 524$

on peut donc en déduire que $\frac{123}{524} < \frac{627}{112}$

$\frac{627}{112} > 1$ car $627 > 112$

Méthode 3:

Si deux nombres en écriture fractionnaire ont le même numérateur alors ils sont rangés dans l'ordre inverse de leurs dénominateurs

Exemple: Compare $\frac{8}{18}$ et $\frac{8}{19}$

$$\frac{8}{18} > \frac{8}{19}$$

En effet, on confectioonne 2 gâteaux identiques nommés gâteau A et gâteau B que l'on partage respectivement en 18 parts et 19 parts. On prend le même nombre de parts de chaque gâteau mais les parts de gâteau A sont plus grosses.

II Addition ou soustraction de fractions :

1) Lorsque les dénominateurs sont les mêmes :

Règle: Pour additionner (ou soustraire) des nombres en écriture fractionnaire ayant le même dénominateur, on garde le dénominateur commun et on additionne (ou soustrait) les numérateurs.

Exemples: Calcule $A = \frac{7}{3} + \frac{6}{3}$

$$A = \frac{7+6}{3}$$

$$A = \frac{13}{3}$$

$$B = \frac{9}{4} - \frac{3}{4}$$

$$B = \frac{9-3}{4}$$

$$B = \frac{6}{4} : \text{on peut simplifier en utilisant les critères de divisibilité}$$

$$B = \frac{3 \times \cancel{2}}{2 \times \cancel{2}} \quad B = \frac{3}{2}$$

Remarque: $\frac{3}{2}$ est une fraction **irréductible** : on ne peut pas la simplifier.
3 et 2 sont dits **premiers entre eux** : ils n'ont pas de diviseur commun autre que 1.

Exercices d'application :

4 Complète les calculs suivants en utilisant la règle d'addition ou de soustraction.

$$\text{a. } \frac{5}{9} + \frac{3}{9} = \frac{5+3}{9} = \frac{8}{9}$$

$$\text{b. } \frac{3}{7} - \frac{1}{7} = \frac{3-1}{7} = \frac{2}{7}$$

$$\text{c. } \frac{3}{14} + \frac{1}{14} + \frac{5}{14} = \frac{3+1+5}{14} = \frac{9}{14}$$

$$\text{d. } \frac{6}{17} + \frac{4}{17} = \frac{6+4}{17} = \frac{10}{17}$$

5 Calcule mentalement.

$$\text{a. } \frac{4}{9} + \frac{3}{9} = \frac{7}{9}$$

$$\text{b. } \frac{43}{78} + \frac{28}{78} = \frac{71}{78}$$

$$\text{c. } \frac{13}{17} - \frac{2}{17} = \frac{11}{17}$$

$$\text{d. } \frac{91}{121} - \frac{90}{121} = \frac{1}{121}$$

$$\text{e. } \frac{101}{4} + \frac{26}{4} = \frac{127}{4}$$

$$\text{f. } \frac{12}{12} - \frac{12}{12} = \frac{0}{12} = 0$$

6 Calcule puis, si c'est possible, simplifie !

$$\text{a. } \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{b. } \frac{31}{14} - \frac{5}{14} = \frac{26}{14} = \frac{13 \times 2}{7 \times 2} = \frac{13}{7}$$

$$\text{c. } \frac{25}{33} + \frac{19}{33} = \frac{44}{33} = \frac{4 \times 11}{3 \times 11} = \frac{4}{3}$$

$$\text{d. } \frac{17}{18} + \frac{19}{18} = \frac{36}{18} = \frac{18 \times 2}{18 \times 1} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\text{e. } \frac{15}{37} + \frac{22}{37} = \frac{37}{37} = 1$$

$$\text{f. } \frac{45}{143} + \frac{20}{143} = \frac{65}{143} = \frac{13 \times 5}{13 \times 11} = \frac{5}{11}$$

$$\text{g. } \frac{1}{27} + \frac{4}{27} + \frac{7}{27} = \frac{12}{27} = \frac{4 \times 3}{9 \times 3} = \frac{4}{9}$$

$$\text{h. } \frac{16}{28} - \frac{7}{28} - \frac{5}{28} = \frac{9}{28} - \frac{5}{28} = \frac{4}{28} = \frac{\cancel{4} \times 1}{\cancel{4} \times 7} = \frac{1}{7}$$

$$\text{i. } \frac{13}{19} - \frac{5}{19} + \frac{6}{19} = \frac{8}{19} + \frac{6}{19} = \frac{14}{19}$$

2) Lorsque les dénominateurs sont différents

Règle:

Si les nombres en écriture fractionnaire n'ont pas le même dénominateur, alors pour les additionner (ou les soustraire), il faut les mettre au même dénominateur.

Exemple: Calcule $C = \frac{7}{3} + \frac{6}{12}$

on écrit les fractions avec le même dénominateur :

$$C = \frac{7 \times 4}{3 \times 4} + \frac{6}{12}$$

Le dénominateur commun est 12.

$$C = \frac{28}{12} + \frac{6}{12}$$

$$C = \frac{28+6}{12}$$

$$C = \frac{34}{12}$$

$$C = \frac{\cancel{2} \times 17}{\cancel{2} \times 6} = \frac{17}{6}$$

on a simplifié pour obtenir une fraction irréductible

Application :

8 Réduis au même dénominateur puis calcule.

$$A = \frac{7}{6} + \frac{2}{3}$$

$$A = \frac{7}{6} + \frac{2 \times \dots}{3 \times \dots}$$

$$A = \frac{7}{6} + \frac{\dots}{\dots}$$

$$A = \frac{\dots}{\dots}$$

$$B = \frac{3}{5} + \frac{11}{10}$$

$$B = \frac{3 \times \dots}{5 \times \dots} + \frac{11}{10}$$

$$B = \frac{\dots}{\dots} + \frac{11}{10}$$

$$B = \frac{\dots}{\dots}$$

$$C = \frac{8}{9} - \frac{1}{3}$$

$$C = \dots$$

$$C = \dots$$

$$C = \dots$$

$$D = 5 + \frac{3}{2}$$

$$D = \dots$$

$$D = \dots$$

$$D = \dots$$

$$E = 3 - \frac{5}{7}$$

$$E = \dots$$

$$E = \dots$$

$$E = \dots$$

$$F = \frac{7}{5} + 1$$

$$F = \dots$$

$$F = \dots$$

$$F = \dots$$

$$G = \frac{13}{12} + \frac{19}{48}$$

$$G = \dots$$

$$G = \dots$$

$$G = \dots$$

$$H = \frac{17}{13} - \frac{11}{65}$$

$$H = \dots$$

$$H = \dots$$

$$H = \dots$$

III Multiplier des nombres en écriture fractionnaire

1) Rappel de 6^e : prendre une fraction d'une quantité

Prendre une fraction d'une quantité revient à multiplier la fraction par cette quantité

Exemple : Combien valent 70% de 25€

Les mots « de, du, d', des » sont remplacés par le symbole \times de la multiplication.

$$\frac{70}{100} \times 25$$

$$= \frac{70 \times 25}{100}$$

$$= \frac{70 \times \cancel{25}}{4 \times \cancel{25}}$$

$$= \frac{70}{4}$$

$$= \frac{35 \times \cancel{2}}{2 \times \cancel{2}} = 17,5$$

70% de 25 € valent 17,5€

Exemple 2: Dans un collège comptant 820 élèves $\frac{2}{5}$ des élèves partent en séjour linguistique
Combien d'élèves cela représente-t-il?

$\frac{2}{5}$ de 820 élèves se calcule en posant :

$$\frac{2}{5} \times 820$$

$$= \frac{2 \times 820}{5}$$

$$= \frac{2 \times \cancel{5} \times 164}{\cancel{5}}$$

$$= 2 \times 164$$

$$= 328$$

328 élèves du collège partent en séjour linguistique.

1) Règle:

Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Quand les facteurs du numérateur et du dénominateur ont des diviseurs communs, il est préférable de simplifier avant de calculer les produits.

Exemple 1: Calculer $A = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$

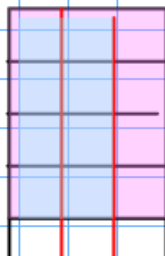
$$A = \frac{2 \times 4}{3 \times 5}$$

$$A = \frac{8}{15}$$

illustrons le calcul par un dessin

Calculer $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ revient à calculer $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$

• On prend un rectangle, on le coupe en 5 pour en prendre les $\frac{4}{5}$: on colore 4 tranches sur les 5.



• Ensuite dans cette partie coloriée que l'on coupe en 3 parts, on sélectionne 2 parts, pour cela on coupe verticalement par tracer des colonnes. On a retenu $\frac{8}{15}$ du rectangle.

Exemple 2: Calculer $B = \frac{3,2}{5} \times \frac{3}{1,3}$

$$B = \frac{3,2 \times 3}{5 \times 1,3}$$

$$= \frac{9,6}{6,5}$$

$$= \frac{96}{65}$$

Cette fraction est irréductible.

Exemple 3: Johnny passe $\frac{8}{35}$ de son temps libre sur internet. Lorsque'il est connecté il utilise 30% de son forfait pour discuter avec Bob sur Facebook.

Quelle proportion de son temps libre consacre-t-il à chatter avec Bob ?

Johnny passe 30% des $\frac{8}{35}$ de son temps libre sur FB :

$$\text{on calcule } \frac{30}{100} \times \frac{8}{35}$$

$$= \frac{30 \times 8}{100 \times 35}$$

$$= \frac{\cancel{8} \times 6 \times \cancel{4} \times 2}{\cancel{4} \times 25 \times \cancel{5} \times 7}$$

$$= \frac{6 \times 2}{25 \times 7}$$

$$= \frac{12}{175}$$

Johnny passe les $\frac{12}{175}$ de son temps libre à discuter avec Bob sur F.B