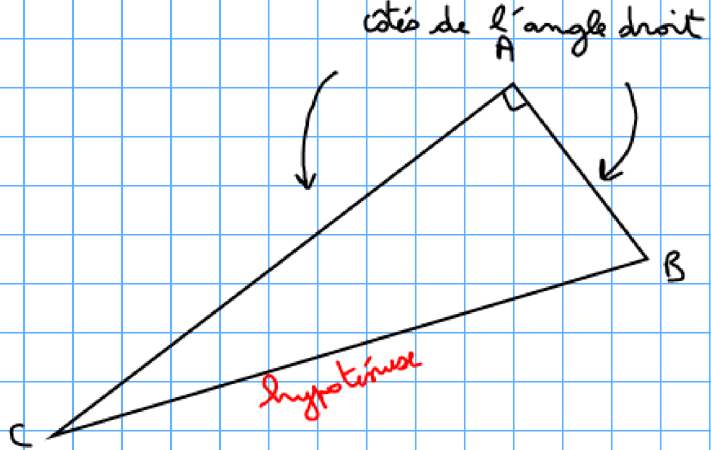
Chapitre 4 : Théorème de Pythagore

I Vocabulaire et notations

1) Définitions :

- On dit qu'un triangle est rectangle si l'un de ses trois angles est un angle droit.
- Dans un triangle rectangle, les angles aigus sont complémentaires (leur somme est égale à 90°)
- Dans un triangle rectangle, le côté opposé au sommet de l'angle droit est appelé hypoténuse, c'est le plus grand côté du triangle rectangle.



2) carré d'un nombre

Le carré d'un nombre a est égal au produit du nombre a par lui-même.

On note $a^2 = a \times a$ et on prononce "a au carré"

a) Exemples :

- Le carré de 8 se note 8^2 et est égal à $8 \times 8 = 64$

  Le carré de -7 se note $(-7)^2$ et est égal à $(-7) \times (-7) = 49$

  ⚠ Ne pas confondre le carré de 8 avec le double de 8 qui vaut $8 + 8 = 2 \times 8 = 16$.

- Le carré de $\frac{2}{7}$ est $\left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{2}{7} \times \frac{2}{7} = \frac{4}{49}$

b) carré parfait

On appelle carré parfait le carré d'un nombre entier positif. Voici la liste des quinze premiers carrés parfaits

nombre	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
carré	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

3) Utiliser sa calculatrice

Pour déterminer le carré d'un nombre positif, on utilise la touche x^2

pour calculer le carré de 2,5 on tape la séquence 2 ; , 5 √ x^2

⚠ Si le nombre est négatif, il faut le mettre entre parenthèses

Exemple : pour calculer le carré de $-4,9$ on tape la séquence : $(-4,9)^2$

▸a·10ⁿ (| rép (–) | 4 | ; , | 9 | ▸norm) | √ x^2 | entrer

4) racine carrée d'un nombre positif

Pour déterminer le nombre positif dont on nous donne le carré, on utilise la touche $\sqrt{\ }$ que l'on atteint en tapant SECONDE √■ x^2 sur la casio

ou 2nde √ x^2 sur la Ti

Exemple : Quel est le nombre positif dont le carré est égal à 441 ?

on tape SECONDE √■ x^2 441 EXE on obtient 21. Cela signifie que

$21^2 = 441$

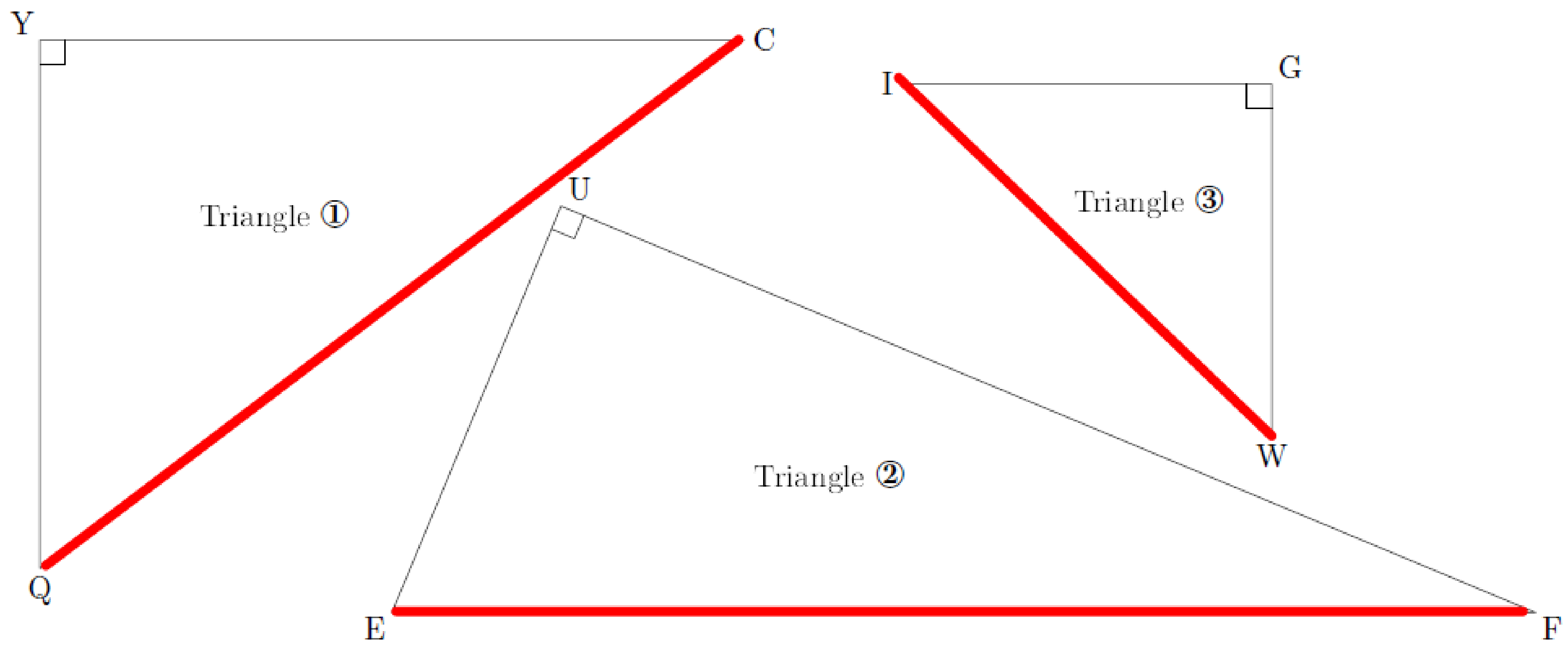
II Théorème de Pythagore : forme directe

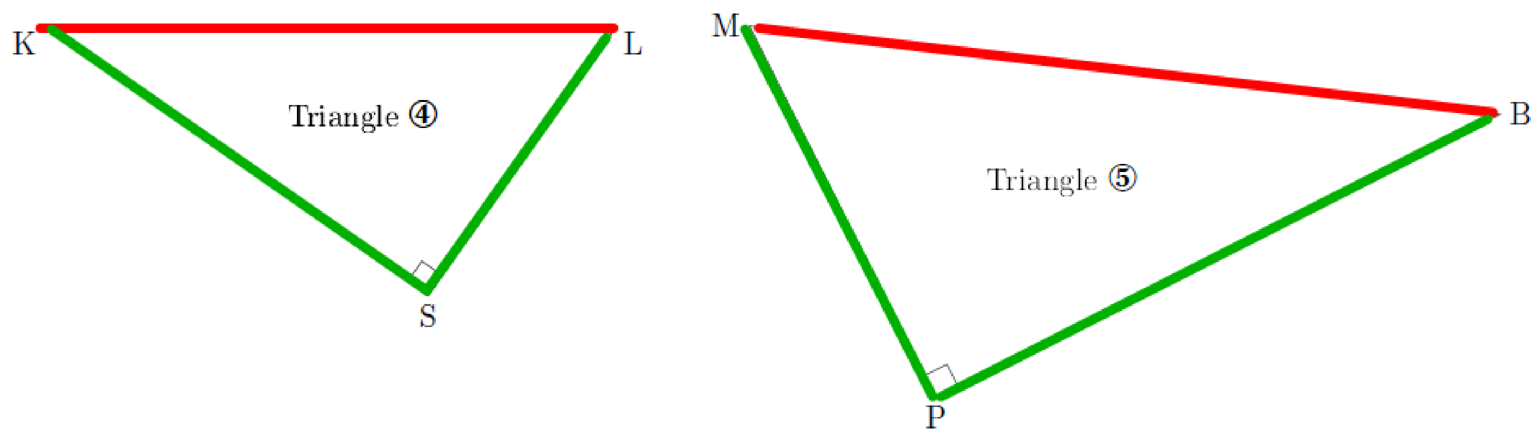
1) Théorème

Si un triangle est rectangle alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

ECRIRE LA RELATION DE PYTHAGORE

Dans les triangles suivants, repasser en rouge l'hypoténuse, et en vert les côtés de l'angle droit. Puis écrivez pour chacun d'entre eux la relation de Pythagore.





Nom du triangle	carré de l'hypoténuse	=	somme des carrés des côtés de l'angle droit	
① QYC	QC^2	=	YQ^2	+ YC^2
② EUF	EF^2	=	EU^2	+ UF^2
③ IGW	IW^2	=	IG^2	+ GW^2
④ KSL	KL^2	=	KS^2	+ SL^2
⑤ MPB	MB^2	=	MP^2	+ PB^2

2)

COMPÉTENCE G5 : CALCULER LA LONGUEUR D'UN CÔTÉ D'UN TRIANGLE RECTANGLE GRÂCE AU THÉORÈME DE PYTHAGORE

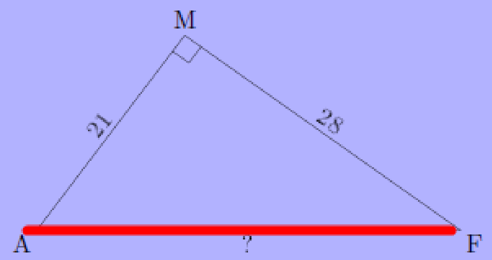
a) Calculer la longueur de l'hypoténuse

EXEMPLE

Enoncé :

Soit AMF un triangle rectangle en M, tel que AM=21 cm et MF=28 cm. Calculer AF.

Solution :



On sait que AMF est un triangle rectangle en M.

Or, selon le théorème de Pythagore, si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

On peut donc écrire l'égalité $AF^2 = MA^2 + MF^2$

$AF^2 = 21^2 + 28^2$

$AF^2 = 441 + 784$

$AF^2 = 1225$

$AF = \sqrt{1225} = 35$

La longueur AF vaut 35 cm.

Exercice 1 (à trous)

Enoncé : Soit EGL un triangle rectangle en L, tel que EL=2,5 cm et LG=6 cm. Calculer la longueur EG.

Solution : On sait que ELG est un triangle rectangle en L.

Or, selon le théorème de Pythagore, si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

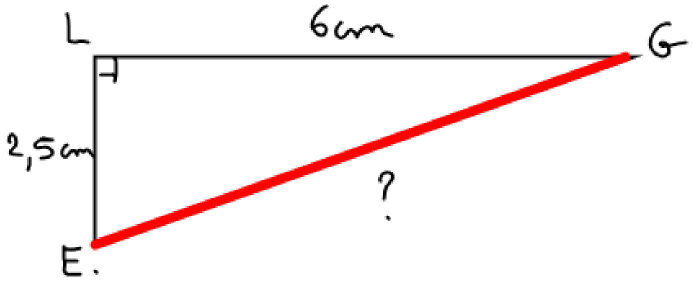
On peut donc écrire l'égalité $EG^2 = LG^2 + LE^2$

$$EG^2 = 6^2 + 2{,}5^2$$

$$EG^2 = 36 + 6{,}25$$

$$EG^2 = 42{,}25$$

$$EG = \sqrt{42{,}25} = 6{,}5$$

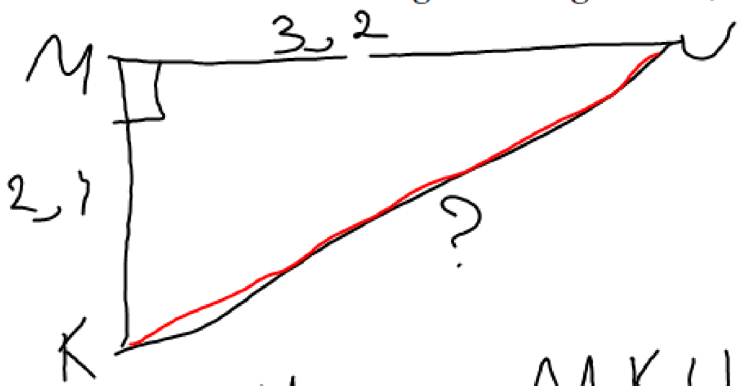


La longueur EG vaut 6,5 cm.

Application : exercice 2 (cahier d'exercices)

Exercice 2

1. Soit MKU un triangle rectangle en M, tel que MK=2,4 cm et MU=3,2 cm ; calculer la longueur KU.



On sait que MKU est un triangle rectangle en M

D'après le théorème de Pythagore on a :

$KU^2 = MK^2 + MU^2$

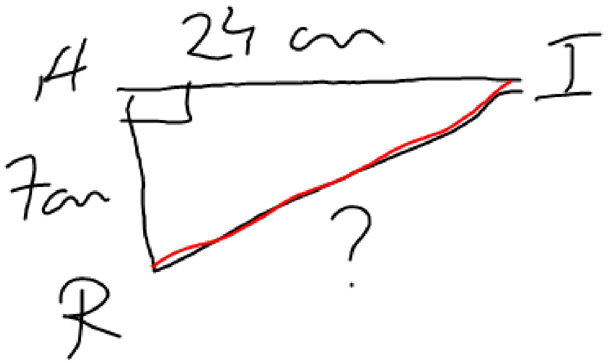
$KU^2 = 2,4^2 + 3,2^2$

$KU^2 = 5,76 + 10,24$

$KU^2 = 16$

$KU = \sqrt{16} = 4$

2. Soit IHR un triangle rectangle en H, tel que HI=24 cm et HR=7 cm ; calculer la longueur IR.



On sait que IHR est rectangle en H

On peut appliquer le théorème de Pythagore.

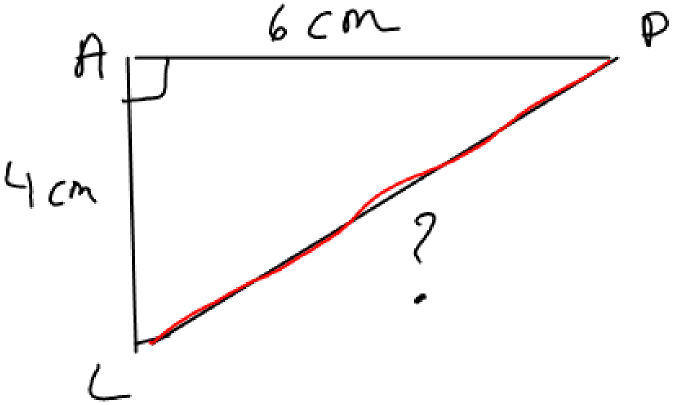
$IR^2 = HI^2 + HR^2$.

$IR^2 = 24^2 + 7^2$

$IR^2 = 576 + 49$

$IR^2 = 625$

3. Soit LPA un triangle rectangle en A, tel que AP=6 cm et AL=4 cm ; calculer une valeur arrondie au millimètre de la longueur LP.



Or

On sait que LAP est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore

$LP^2 = AP^2 + AL^2$

$LP^2 = 6^2 + 4^2$

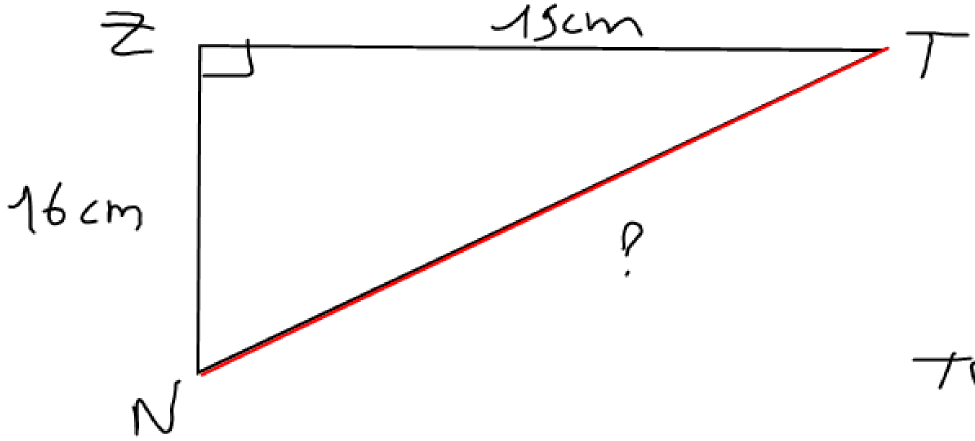
$LP^2 = 36 + 16$

$LP^2 = 52$

Donc $LP = \sqrt{52} \approx 7,2$

La longueur de LP vaut 7,2 cm.

4. Soit ZTN un triangle rectangle en Z, tel que TZ=19 cm et NZ=16 cm ; calculer une valeur arrondie au centimètre de la longueur TN.



On sait que TNZ est rectangle en Z.

Or, d'après le thm de Pythagore :

$$TN^2 = ZT^2 + ZN^2$$
$$TN^2 = 19^2 + 16^2$$
$$TN^2 = 361 + 256$$
$$TN^2 = 617$$

Donc $TN = \sqrt{617} \simeq 25$

$TN \simeq 25$ cm.

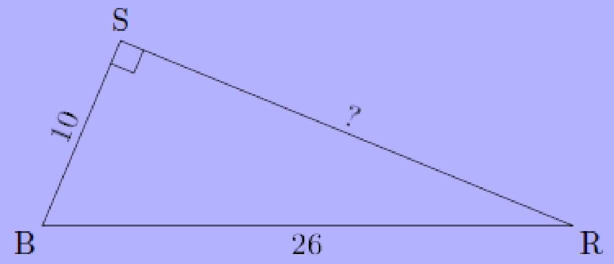
b) Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit

EXEMPLE

Enoncé :

Soit BSR un triangle rectangle en S, tel que SB=10 cm et BR=26 cm. Calculer SR.

Solution :



On sait que SBR est un triangle rectangle en S.

Or, selon le théorème de Pythagore, si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

On peut donc écrire l'égalité $\mathrm{BR}^2 = \mathrm{SB}^2 + \mathrm{SR}^2$

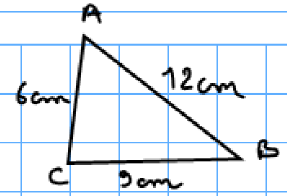
$$26^2 = 10^2 + \mathrm{SR}^2$$
$$676 = 100 + \mathrm{SR}^2$$
$$\mathrm{SR}^2 = 676 - 100$$
$$\mathrm{SR}^2 = 576$$
$$SR = \sqrt{576} = 24$$

La longueur SR vaut 24 cm.

3) Utiliser le théorème de Pythagore pour démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Exemple type :

On considère le triangle ABC tel que $AC = 6$ cm $BC = 9$ cm $AB = 12$ cm.
Démontrons que ce triangle n'est pas rectangle.



Raisonnons : Si le triangle est rectangle alors son hypoténuse est son plus grand côté : [AB]

Rédigeons :

D'une part

$$AB^2 = 12^2 = 144$$

D'autre part

$$AC^2 + BC^2 = 6^2 + 9^2 = 36 + 81 = 117$$

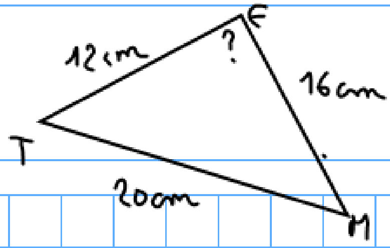
L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée !

Donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

III Réciproque du théorème de Pythagore : (pour démontrer qu'un triangle est rectangle)

Si dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égale à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle et le plus grand côté est son hypoténuse.

Exemple type :



Le triangle TEM est-il rectangle ?

Raisonnons : Le plus grand côté est TM, donc si le triangle est rectangle alors TM est son hypoténuse.

Rédigeons :

D'une part	D'autre part
$TM^2 = 20^2$ $= 400$	$ET^2 + EM^2 = 12^2 + 16^2$ $= 144 + 256$ $= 400$

L'égalité de Pythagore est vérifiée !

Donc le triangle TEM est rectangle en E.

Exercice 1 (à trous)

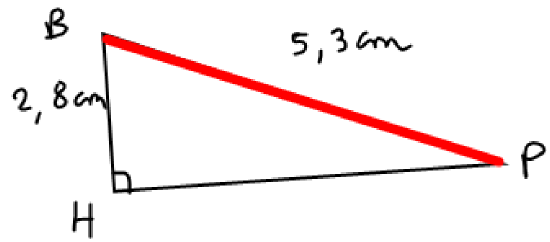
Enoncé : Soit BHP un triangle rectangle en H, tel que BP=5,3 cm et BH=2,8 cm. Calculer la longueur HP.

Solution : On sait que BHP est un triangle rectangle en H.

Or, selon le théorème de Pythagore, si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

On peut donc écrire l'égalité $BP^2 = BH^2 + HP^2$

$$5,3^2 = 2,8^2 + HP^2$$
$$28,09 = 7,84 + HP^2$$
$$HP^2 = 28,09 - 7,84$$
$$HP^2 = 20,25$$
$$HP = \sqrt{20,25} = 4,5$$



La longueur HP vaut 4,5 cm.

<u>Application</u> : Exercice 2 (cahier d'exercices)