Chapitre 5 : Puissances

I Définition et notation

Pour tout nombre réel non nul a, et pour tout entier $n \geq 1$

$\underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}} = a^n$ $\quad a^n$ se lit « a puissance n » ou encore « a exposant n »

1) Cas particulier pour $n = 2$ ou $n = 3$

- a^2 peut aussi bien se lire « a au carré » que « a puissance 2 » ou « a exposant 2 »
- a^3 peut aussi bien se lire « a au cube » que « a puissance 3 » ou « a exposant 3 »

2) Remarque : parenthèses

Les parenthèses sont très importantes !

Exemple :

$A = (-3)^4$
$A = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$
$A = 81$

$B = -3^4$: la puissance porte uniquement sur le 3
$B = -3 \times 3 \times 3 \times 3$
$B = -81$

$A \neq B$

3) Cas particuliers : $n=1$ et $n=0$

• $n = 1$

pour tout nombre a, $a^1 = a$

Exemples : $1427^1 = 1427$

$(-328)^1 = -328$

• $n = 0$

pour tout nombre $a \neq 0$ $a^0 = 1$

Exemples : $123456^0 = 1$

$(-327)^0 = 1$

II Règles de calcul

1) Produit de puissances

FORMULE 1

Pour tout nombre a, pour tous nombres entiers relatifs m et n : $a^m \times a^n = a^{m+n}$

Preuve avec $m, n > 0$: $a^m \times a^n = \underbrace{\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{m \text{ facteurs}} \times \underbrace{a \times a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}}_{\text{au total il y a } m+n \text{ facteurs identiques}}$

Exemple 1 : $C = 3^2 \times 3^4$

$C = \underbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$

6 facteurs identiques → on utilise la notation de puissance

$C = 3^6$

$C = 729$

Exemple 2 : Avec des puissances de 10.

$D = 10^2 \times 10^5$

$D = 10^{2+5}$

$D = 10^7$

2) Quotient de puissances

FORMULE 2

Pour tout nombre a, pour tous nombres entiers relatifs m et n : $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Preuve : avec un exemple où m et $n > 0$

après simplification il reste $7 - 3 = 4$ facteurs identiques

$$E = \frac{5^7}{5^3} = \frac{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5} \times \underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5}}{\cancel{5} \times \cancel{5} \times \cancel{5}}$$

$E = 5^4 = 625$

3) Corollaire : puissances négatives ?

- On sait que pour tout nombre a, $a^0 = 1$
- Or pour tout nombre entier $n > 0$ $a^{n+(-n)} = a^0$

ainsi $a^n \times a^{-n} = 1$

Si le produit de deux nombres est égal à 1 alors, les deux nombres sont inverses

- Donc a^{-n} est l'inverse de a^n.

On note $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$ **FORMULE 3**

Exemples : Calcule $F = 7^5 \times 7^{-3}$

Si on applique la formule (3)

on a $F = 7^5 \times \dfrac{1}{7^3}$

$F = \dfrac{7^5}{7^3}$ → on peut appliquer la formule (2)

$F = 7^{5-3}$

$F = 7^2$

Finalement si m et n sont positifs

$a^m \times a^{-n} = \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{m+(-n)}$ on retrouve la formule (1)

relation(3) relation(2)

A retenir : les 3 formules sont applicables, que les exposants soient positifs ou négatifs !

4) Puissance de puissance

FORMULE 4

Pour tout nombre a, pour tous entiers relatifs m et n : $(a^m)^n = a^{m \times n}$

Preuve : démontrons la formule dans le cas où m et n sont positifs.

$$a^m = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{m \text{ facteurs}}$$

2ème motif ; nème motif

$$(a^m)^n = \underbrace{\underbrace{(a \times a \times \ldots \times a)}_{m \text{ facteurs}} \times (a \times a \times \ldots \times a) \times \ldots \times (a \times a \times \ldots \times a)}$$

on reproduit le motif n fois : au total il y a $m \times n$ facteurs égaux à a.

→ Si m ou n est négatif, la formule reste valable, pour la démontrer on utiliserait la formule 3.

Exemples :

$G = (5^2)^3$

$G = 5^{2 \times 3}$

$G = 5^6$

$H = (10^4)^5$

$H = 10^{4 \times 5}$

$H = 10^{20}$

$K = (10^3)^{-4}$

$K = 10^{3 \times (-4)}$

$K = 10^{-12}$

5. Signe d'une puissance

Une puissance d'un nombre positif est un nombre positif

Une puissance d'un nombre négatif est :

- **Positive** si l'exposant est un entier relatif pair
- **Négative** si l'exposant est un entier relatif impair

	nombre	positif	négatif
a.	$(-7)^9$		X
b.	$-5{,}7^{12}$		X
c.	$18{,}7^{27}$	X	
d.	$\dfrac{5^6}{3}$	X	
e.	$\left(\dfrac{-3}{4}\right)^5$		X

	nombre	positif	négatif
f.	-3^{126}		X
g.	$(-4{,}6)^6$	X	
h.	$(-1)^1$		X
i.	$-\left(\dfrac{1}{12}\right)^0$		X
j.	$\left(-\dfrac{5}{3}\right)^6$	X	

6. Rappel sur les priorités opératoires

<u>Règle :</u>

Dans une expression sans parenthèses, on effectue d'abord le calcul des puissances**, puis les** multiplications et les divisions**, et enfin,** on calcule de gauche à droite les additions et soustractions.

Dans une expression avec parenthèses, on effectue d'abord les calculs entre parenthèses.

<u>Exemples :</u>

$B = 5 - 3 \times 2^3$

$B = 5 - 3 \times 8$

$B = 5 - 24$

$B = -19$

$E = [2 + (-2)^4 \times 3] \times (3^3 - 1)$

$E = [2 + 16 \times 3] \times (27 - 1)$

$E = (2 + 48) \times 26$

$E = 50 \times 26$

$E = 1300$

III. Puissances de 10

1) Propriété

Soit n en entier naturel non nul. On a

$$10^n = \underbrace{10 \times \ldots \times 10}_{\text{n facteurs}} = 1\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ zéros}} \quad \text{et} \quad 10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \frac{1}{1\underbrace{0\ldots0}_{\text{n zéros}}} = \underbrace{0,0\ldots0}_{\text{n zéros}}1$$

Exemples :

$10^1 = 10$ dix
$10^2 = 100$ cent
$10^3 = 1\,000$ mille
$10^4 = 10\,000$ dix-mille
$10^6 = 1000\,000$ un million
$10^9 = 1\,000\,000\,000$ un milliard

$10^{-1} = \frac{1}{10^1} = 0,1$ un dixième
$10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0,01$ un centième
$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$ un millième
$10^{-4} = \frac{1}{10^4} \quad \frac{1}{1\,0000} = 0,0001$ un dix-millième
$10^{-6} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1\,000\,000} = 0,00001$ un millionième

2) Produit par une puissance de 10

Règle :

Pour multiplier un nombre en écriture décimale

- **Par 10^n, on décale la virgule de n rangs vers** la droite**, en complétant éventuellement par des zéros.**
- **Par 10^{-n}, on décale la virgule de n rangs vers** la gauche**, en complétant éventuellement par des zéros.**

Exemples :

$A = 4{,}3 \times 10^3$

$A = 4300{,}00$

$A = 4300$

$B = 12{,}7 \times 10^{-2}$

$B = 0{,}127$

$B = 0{,}127$

$C = 0{,}00123 \times 10^4$

$C = 00012{,}3$

$C = 12{,}3$

3) Règles de calcul

Quels que soient les entiers relatifs m et n on a :

$$10^m \times 10^n = 10^{m+n} \quad ; \quad (10^m)^n = 10^{m \times n} \quad ; \quad \frac{10^m}{10^n} = 10^{m-n}$$

Exemples :

$A = 10^2 \times 10^6$

$A = 10^{2+6}$

$A = 10^8$

$B = 10^3 \times 10^{-8}$

$B = 10^{3+(-8)}$

$B = 10^{-5}$

$C = (10^2)^7$

$C = 10^{2\times 7}$

$C = 10^{14}$

$D = (10^{-1})^3$

$D = 10^{-1\times 3}$

$D = 10^{-3}$

$E = \frac{10^2}{10^3}$

$E = 10^{2-3}$

$E = 10^{-1}$

$F = \frac{10^5}{10^{-8}}$

$F = 10^{5-(-8)}$

$F = 10^{5+8}$

$F = 10^{13}$

IV. Notation scientifique et ordre de grandeur

Ecrire un nombre sous forme scientifique, c'est l'écrire sous la forme suivante :

nombre décimal x d'une puissance de 10

(le nombre décimal doit être compris entre 1 et 10)

Exemple :

$2,5347\times10^2$ est l'écriture scientifique de 253,47.

$0,38\times10^4$ n'est pas une écriture scientifique car le chiffre avant la virgule est zéro.

$5,47\times5^2$ n'est pas une écriture scientifique car le deuxième facteur n'est pas une puissance de 10.

Remarque :

Les écritures scientifiques vont permettre d'écrire de façon « simple » les nombres très grands (dans ce cas l'exposant de la puissance de 10 sera un entier naturel grand !) et les nombres très proches de 0 (dans ce cas l'exposant de la puissance de 10 sera un entier négatif petit !).

Exemples d'utilisation de l'écriture scientifique :

1) Donne l'écriture scientifique des nombres suivants :

$A = 315\ 000\ 000$ $B = 0,000589$ $C = 125,9\times10^4$

$A = 3,15\times10^8$ $B = 5,89\times10^{-4}$ $C = 1,259\times10^2$

2) Compare les nombres suivants : $D = 1{,}9 \times 10^3$ et $E = 7{,}3 \times 10^2$.

Puis compare $F = 12{,}4 \times 10^3$ et $G = 3{,}1 \times 10^4$.

- D et E sont en écriture scientifique : il suffit de comparer les exposants $10^3 > 10^2$ donc $D > E$
- On écrit F en écriture scientifique : $F = \underbrace{1{,}24 \times 10}_{12{,}4} \times 10^3 = 1{,}24 \times 10^4$ $G = 3{,}1 \times 10^4$

Les exposants sont les mêmes : on compare les mantisses $1{,}24 < 3{,}1$ donc $F < G$

Applications :

ORDRE DE GRANDEUR

- Vitesse de la lumière dans le vide km/s $= 2{,}99792458 \times 10^5$ km/s

  Ordre de grandeur 3×10^5 km/s

- $A = 2{,}105395 \times 10^6$ Ordre de grandeur de $A = 2 \times 10^6$
- $B = 5{,}94 \times 10^{-2}$ ordre de grandeur de $B = 6 \times 10^{-2}$