Chapitre 10 : Factorisation et étude de signe

I. Rappels : résolution d'équations

1. Equation-produit

Définition :
Toute équation du type $P(x) \times Q(x) = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques, est appelée équation-produit.

Remarque :
Nous rencontrerons plus particulièrement des équations produit de la forme :
$(ax + b)(cx + d) = 0$.

Propriété :
Dire qu'un produit de facteurs est nul, équivaut à dire que l'un au moins des facteurs est nul.
Le cas particulier de l'équation-produit $(a\,x + b)(\,c\,x + d) = 0$ équivaut à
$a\,x + b = 0$ ou $c\,x + d = 0$.

Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation-produit

Vidéo https://youtu.be/EFgwA5f6-40
Vidéo https://youtu.be/sMvrUMUES3s

Exemples : résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes
a) $(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$ b) $5x^2 - 4x = 0$

solution :

a) On commence par factoriser l'expression pour se ramener à une équation-produit :

$(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow (3x + 1)[(1 - 6x) - (3x + 7)] = 0$
$\Leftrightarrow (3x + 1)(1 - 6x - 3x - 7) = 0$
$\Leftrightarrow (3x + 1)(- 9x - 6) = 0$
$\Leftrightarrow 3x + 1 = 0$ ou $- 9x - 6 = 0$
$\Leftrightarrow 3x = -1$ ou $- 9x = 6$
$\Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ ou $x = \dfrac{6}{-9} = -\dfrac{2}{3}$

Les solutions sont donc $-\dfrac{2}{3}$ et $-\dfrac{1}{3}$: $S = \left\{-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right\}$

b) $5x^2 - 4x = 0$

$\Leftrightarrow x(5x - 4) = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $5x - 4 = 0$
$\Leftrightarrow 5x = 4$
$\Leftrightarrow x = \dfrac{4}{5}$

Les solutions de l'équations sont donc 0 et $\dfrac{4}{5}$. L'ensemble des solutions est
$S = \left\{0; \dfrac{4}{5}\right\}$

2. Equation de la forme $x^2 = a$

Vidéo https://www.youtube.com/watch?v=ZbgsMiwtHhI

Propriété :
Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de a.
Si $a < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
Si $a = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
Si $a > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Démonstration :

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré est positif.
- Si $a = 0$, alors l'équation s'écrit $x^2 = 0$ donc $x = 0$.
- Si $a > 0$: $x^2 = a$ équivaut à : $x^2 - a = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right) = 0$$

Ce qui équivaut à :

$$x-\sqrt{a} = 0 \quad ou \quad x+\sqrt{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{a} \qquad \Leftrightarrow x = -\sqrt{a}$$

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : a) $x^2 = 16$, b) $x^2 = -8$ c) $(x+2)^2 = 9$

Solution :

a) équation $x^2 = 16$.

16 est positif donc l'équation admet deux solutions $\sqrt{16} = 4$ et $-\sqrt{16} = -4$.

b) équation $x^2 = -8$.

- 8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

c) équation $(x+2)^2 = 9$.

$(x+2)^2 = 9$

$\Leftrightarrow x+2 = 3$ ou $x+2 = -3$

$\Leftrightarrow x = 3-2 = 1$ ou $x = -3-2 = -5$

L'équation admet donc deux solutions $x = 1$ et $x = -5$.

3. Equation-quotient

Définition :

Toute équation du type $\frac{P(x)}{Q(x)}$ = 0, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques (avec $Q(x) \neq 0$), est appelée équation-quotient.

Propriété :

Pour tout x qui n'annule pas l'expression $Q(x)$, l'équation-quotient $\frac{P(x)}{Q(x)}$ = 0 équivaut à $P(x)$ = 0.

Exemple :

L'équation $\frac{x+2}{x+3}$ = 0 a pour solution x = -2.

Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation-quotient

Vidéo https://youtu.be/zhY1HD4oLHg

Vidéo https://youtu.be/OtGN4HHwEek

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\frac{3x+5}{x-1}=0$ b) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4}=0$ c) $\frac{x^2-9}{x+3}=0$ d) $1-\frac{x+3}{x-3}=\frac{2}{2-x}$

Solution :

a) Recherche des valeurs interdites : l'équation $\frac{3x+5}{x-1}=0$ n'est pas définie pour x = 1.

Pour $x \neq 1$, l'équation $\frac{3x+5}{x-1}=0$ équivaut à : $3x+5=0$.

D'où $x=-\frac{5}{3}$.

b) L'équation n'est pas définie pour x = 4.

Pour $x \neq 4$, l'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4}=0$ équivaut à : $(2x+1)(x-3)=0$.

Soit : $2x+1=0$ ou $x-3=0$

Les solutions sont : $x=-\frac{1}{2}$ et $x=3$.

c) Recherche des valeurs interdites : l'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4}=0$ n'est pas définie pour x = -3.

Pour $x \neq$ -3, l'équation $\frac{x^2-9}{x+3}=0$ équivaut à : $x^2-9=0$, soit $x^2=9$

Soit encore : $x=3$ ou $x=-3$.

Comme $x \neq$ -3, l'équation a pour unique solution : $x=3$.

d) Recherche des valeurs interdites : l'équation $1-\frac{x+3}{x-3}=\frac{2}{2-x}$ n'est pas définie pour x = 2 et x = 3. Ce sont les valeurs interdites.

Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$, on a alors :

$$1-\frac{x+3}{x-3}=\frac{2}{2-x} \qquad \Leftrightarrow 1-\frac{x+3}{x-3}-\frac{2}{2-x}=0$$

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)}-\frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)}-\frac{2(x-3)}{(x-3)(2-x)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-3)(2-x)-(x+3)(2-x)-2(x-3)}{(x-3)(2-x)}=0$$

On développe et on réduit le numérateur :

$$\Leftrightarrow \frac{2x-x^2-6+3x-2x+x^2-6+3x-2x+6}{(x-3)(2-x)}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4x-6}{(x-3)(2-x)}=0$$

On applique la règle du quotient nul.

$\Leftrightarrow$ $4x$ – 6 = 0 et $(x-3)(2-x)\neq 0$

D'où $x=\frac{3}{2}$. $\qquad S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$

II. Tableaux de signes

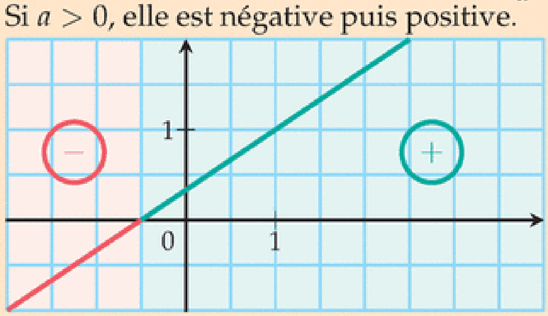
1. Signe d'une fonction affine

PROPRIÉTÉ

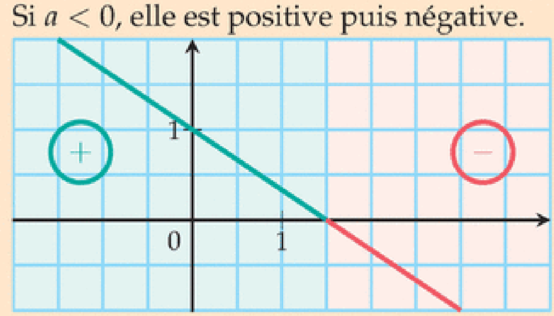
Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.

La **fonction affine** définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax+b$ s'annule et change de signe une fois dans son domaine de définition pour $x=-\frac{b}{a}$.

Si $a>0$, elle est négative puis positive.



Si $a<0$, elle est positive puis négative.



PREUVE Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$.
$f(x) = 0$ implique $ax + b = 0$ soit $ax = -b$ et $x = -\frac{b}{a}$.

Si $a > 0$, la fonction f est croissante.

- Pour $x < -\frac{b}{a}$, $f(x) < f\left(-\frac{b}{a}\right)$. Or, $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) < 0$.
- Pour $x > -\frac{b}{a}$, $f(x) > f\left(-\frac{b}{a}\right)$. Or, $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) > 0$.

Donc f est négative sur $]-\infty; -b/a[$ puis positive sur $]-b/a; +\infty[$.

Si $a < 0$, la fonction f est décroissante.

- Pour $x < -\frac{b}{a}$, $f(x) > f\left(-\frac{b}{a}\right)$. Or, $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) > 0$.
- Pour $x > -\frac{b}{a}$, $f(x) < f\left(-\frac{b}{a}\right)$. Or, $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ donc $f(x) < 0$.

Donc f est positive sur $]-\infty; -b/a[$ puis négative $]-b/a; +\infty[$.

2. Méthode

Dans le tableau de signe d'une fonction affine, le signe de a est à droite du zéro

Méthode : Déterminer le signe d'une expression du type $ax + b$

Vidéo https://youtu.be/50CByVTP4ig

1) Déterminer le tableau de signes de l'expression $2x + 6$, où x est un nombre réel.
Le coefficient devant le « x » est $a = +2$, il est positif, donc on a le tableau :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$+2x + 6$		$-$	0	$+$	

$2x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -3$. ⇑ Le signe de a (ici c'est le signe +) est à droite du zéro.

2) Déterminer le tableau de signes de l'expression $-3x + 12$, où x est un nombre réel.

Le coefficient devant « x » est $a = -3$, négatif, donc on a le tableau :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-3x + 12$		$+$	0	$-$	

$-3x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = 4$. ⇑ Le signe de a (ici c'est le signe –) est à droite du zéro.

III. Résolution d'inéquations

1. En étudiant le signe d'un produit

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un produit

Vidéo https://youtu.be/qoNLr9NkvUE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(3-6x)(x+2)>0$

Le signe de $(3-6x)(x+2)$ dépend du signe de chaque facteur 3 – 6x et x + 2.

$3 - 6x = 0$ ou $x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow 6x = 3$ $\quad\Leftrightarrow x = -2$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs.
En appliquant la règle des signes, on en déduit le signe du produit $(3-6x)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3-6x$		+	|	+	0	-	
$x+2$		-	0	+	|	+	
$(3-6x)(x+2)$		-	0	+	0	-	

On en déduit que $(3-6x)(x+2)>0$ pour $x \in \left]-2;\frac{1}{2}\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3-6x)(x+2)>0$ est $\left]-2;\frac{1}{2}\right[$.

2. En étudiant le signe d'un quotient

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient

Vidéo https://youtu.be/Vitm29q8AEs

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$.

L'équation n'est pas définie pour 3x – 2 = 0, soit $x = \frac{2}{3}$.

Il faudra éventuellement exclure cette valeur de l'ensemble des solutions.

Le signe de $\frac{2-6x}{3x-2}$ dépend du signe des expressions $2-6x$ et $3x-2$.

$2-6x = 0$ équivaut à $x = \frac{1}{3}$.

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux expressions.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2-6x$		+	0	-	‖	-	
$3x-2$		-		-	‖	+	
$\frac{2-6x}{3x-2}$		-	0	+	‖	-	

La double barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour $x = \frac{2}{3}$.

On en déduit que $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ pour $x \in \left]-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ est $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{2}{3}; +\infty\right[$.