Exercice d'application : Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f la fonction définie sur $[-5;5]$ par $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 1$

1) Etudier les variations de f sur $[-5;5]$

2) Dresser le tableau de variations de f

3) Justifier que l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α dans $[-5;5]$

4) En déduire le tableau de signe de $f(x)$ sur $[-5;5]$

5) A l'aide de la calculatrice, donner un encadrement à 10^{-3} près de α

formules de dérivation

$(x^n)' = nx^{n-1}$

$(k \times f)' = k \times f'$

Correction :

1) f est continue et dérivable sur $[-5;5]$ car c'est une fonction polynôme

Pour tout $-5 \leq x \leq 5$ $\quad f'(x) = 3x^2 + 4x - 1$

Les variations de f dépendent du signe de sa dérivée.

Etudions le signe de $f'(x)$: $\quad \Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 3$ $b = 4$ $c = 1$

$\Delta = (4)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16 + 12 = 28$ $\qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

Les racines de $f'(x)$ sont $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-4-2\sqrt{7}}{6} = \dfrac{-2-\sqrt{7}}{3} \simeq -1,55$ $\qquad x_2 = \dfrac{-4+2\sqrt{7}}{6} = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} \simeq 0,22$

x	-5		α		$x_1 \simeq -1,55$		$x_2 \simeq 0,22$		5
$f'(x)$		$+$			0	$-$	0	$+$	
2) $f(x)$	-69	↗	0	↗	$\simeq 3,63$	↘	$\simeq 0,89$	↗	171

Le trinôme est du signe de « a » (positif) à l'extérieur des racines.

$f(-5) = -69$ $\quad f(x_1) \simeq 3,63$ $\quad f(x_2) \simeq 0,89$ $\quad f(5) = 171$

3) Prouvons que $f(x) = 0$ possède une unique solution dans $[-5;5]$

f est continue et strictement croissante sur $[-5;x_1]$

or $f(-5) < 0$ $\quad f(x_1) > 0$ $\quad$ donc $f(-5) < 0 < f(x_1)$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $\alpha \in [-5;x_1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Sur $]x_1;5]$ f est continue et atteint son minimum en x_2 et $f(x_2) > 0$

Concl : il existe un unique $\alpha \in [-5;5]$ tel que $f(\alpha) = 0$

52 Résolution approchée d'équations

1 Sur $[-6\,;4]$, on considère l'équation :

$$2x^3+3x^2-36x+10=0.$$

a. Étudier le sens de variation de la fonction définie par le premier membre de cette équation.

b. Déterminer le nombre de solutions de l'équation, puis la valeur arrondie de chaque solution à 0,01 près.

2 Procéder de même sur $[10\,;50]$ pour l'équation :

$$x^3-30x^2+302x+200=2\,000.$$

1. f est continue et dérivable sur $[-6;4]$ car c'est une fonction polynôme

Les variations de f dépendent du signe de sa dérivée.

pour tout $-6 \leq x \leq 4$ on a : $f'(x) = 6x^2+6x-36 = 6(x^2+x-6)$

$\Delta = b^2-4ac \quad a=1 \quad b=1 \quad c=-6$

$\Delta = (1)^2 - 4\times 1\times(-6) = 1+24 = 25 \quad \sqrt{\Delta}=5$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = 2$

Astuce : $x_1 \times x_2 = \dfrac{c}{a}$

$f'(x) = 6(x+3)(x-2)$ est la forme factorisée.

x	-6	α_1		-3		α_2		2		α_3		4
$f'(x)$			$+$	0	$-$			0	$+$			
$f(x)$	-98	0	$\nearrow$	91	$\searrow$	0	$\searrow$	-34	$\nearrow$	0	$\nearrow$	42

b) f est continue et strictement monotone sur $[-6;-3]$ $\quad f(-6) < 0 < f(-3)$

donc d'après le TVI il existe un unique réel $\alpha_1 \in [-6;-3]$ tel que $f(\alpha_1)=0$

De la même façon on montre qu'il existe un unique $\alpha_2 \in [-3;2]$ tel que $f(\alpha_2)=0$

il existe un unique $\alpha_3 \in [2;4]$ tel que $f(\alpha_3)=0$

A l'aide de la fonction G. SOLV de la casio ou CALC-zéro pour la TI on obtient :

$\alpha_1 \simeq -5,17$ $\qquad$ $\alpha_2 \simeq 0,29$ $\qquad$ $\alpha_3 \simeq 3,38$

2) **2** Procéder de même sur [10 ; 50] pour l'équation :

$$x^3 - 30x^2 + 302x + 200 = 2\,000.$$

Méthode 1 : $x^3 - 30x^2 + 302x + 200 = 2000$

$\iff x^3 - 30x^2 + 302x - 1800 = 0$

Posons $g(x) = x^3 - 30x^2 + 302x - 1800$

et résolvons $g(x) = 0$.

g est continue et dérivable sur $[10;50]$ car c'est une fonction polynôme.

Pour tout $x \in [10;50]$ $g'(x) = 3x^2 - 60x + 302$

Les variations de g dépendent du signe de sa dérivée.

Déterminons les racines de $g'(x)$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = 3$ $b = 60$ $c = 302$

$\Delta = -24 < 0$ donc $g'(x)$ est toujours du signe de "a"

On en déduit que g est strictement croissante sur $[10;50]$

x	10	α	50
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	-780	0	63300

$g(10) = -780$

$g(50) = 63300$

g est continue et strictement croissante sur $[10;50]$ or $g(10) < 0 < g(50)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in [10;50]$ tel que $g(\alpha) = 0$.

G-SOLV nous fournit Xcal pour $Y=0$: $\alpha \simeq 19{,}13$.

<u>Méthode 2 :</u> on pose $h(x) = x^3 - 30x^2 + 302x + 200$.

Résolvons l'équation $h(x) = 2000$.

h est continue et strictement croissante sur $[10;50]$

$h(10) = 1220$ $\qquad h(50) = 65\,300$

$h(10) < 2000 < h(50)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $h(x) = 2000$ possède une unique solution dans $[10;50]$.

G-SOLV nous fournit : Xcal pour $Y = 2000$ $\alpha \simeq 19{,}13$