Généralités sur les fonctions

Chapitre 1

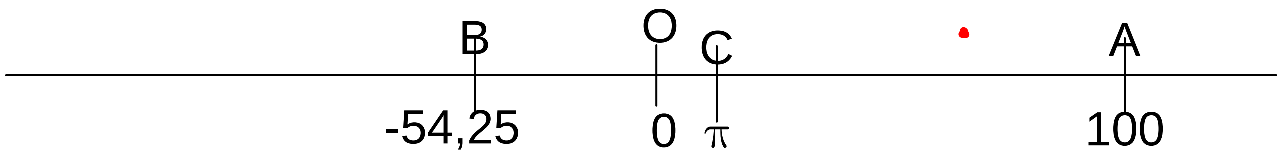
Classe de seconde

I- Les ensembles de nombres

1- Les réels

L'ensemble de tous les nombres connus en classe de seconde est appelé **ensemble des réels.** Il se note $\mathbb{R}$.

La droite numérique est une droite graduée à laquelle on associe une origine O correspondant au nombre zéro.



A chaque nombre réel il correspond un unique point sur la droite numérique

Réciproquement, à chaque point de la droite, il correspond un unique nombre réel appelé…**abscisse**… de ce point.

appartient à

Par exemple : $100 \in \mathbb{R}$; $-54,25 \in \mathbb{R}$; $\pi \in \mathbb{R}$;

π est l'abscisse de C

Remarque : 100 est l'abscisse du point A.

-54,25 est l'abscisse de B

On note $x_A = 100$; $x_B = -54,25$; $x_C = \pi$

I- Les ensembles de nombres

2- Les entiers

IN ou N

a) L'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls, appelés **entiers naturels,** se note $\mathbb{N}$.

notation désignant un ensemble.

Ainsi $\mathbb{N} = \{ 0; 1; 2; 3; \ldots\ldots\}$

Attention : les accolades indiquent un ensemble de valeurs; les valeurs sont séparées par des points-virgules.

b) L'ensemble des nombres entiers , appelés **entiers relatifs,** se note $\mathbb{Z}$.

Ainsi $\mathbb{Z} = \{ \ldots\ldots -3;-2;-1;0; 1; 2; 3; \ldots\ldots\}$

Par exemple : $-124 \in \mathbb{Z}$; $3{,}4 \notin \mathbb{Z}$;

I- Les ensembles de nombres

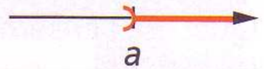
3- Les intervalles

Sur la droite numérique, les intervalles sont les parties de $\mathbb{R}$ qui correspondent à un segment, une demi-droite, ou la droite toute entière.

Ce sont les parties « d'un seul tenant », ou encore « sans trou ».

Soient a et b deux réels tels que a<b :

L'intervalle noté …	… est l'ensemble des réels x tels que …	Il est représenté sur une droite graduée par **un segment** :
$[a\,;b]$	$a \leqslant x \leqslant b$	
$]a\,;b[$	$a < x < b$	
$[a\,;b[$	$a \leqslant x < b$	
$]a\,;b]$	$a < x \leqslant b$	

L'intervalle noté …	… est l'ensemble des réels x tels que …	Il est représenté sur une droite graduée par **une demi-droite** :
$[a\,;+\infty[$	$a \leqslant x$	
$]a\,;+\infty[$	$a < x$	
$]-\infty\,;b]$	$x \leqslant b$	
$]-\infty\,;b[$	$x < b$	

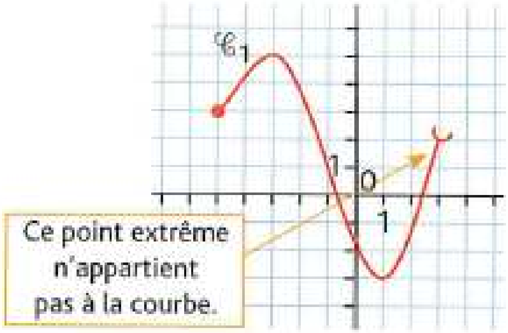
Remarque : $-\infty$ (« moins l'infini ») et $+\infty$ (« plus l'infini ») ne désignent pas des nombres réels; ainsi les crochets sont toujours ouverts en $-\infty$ ou $+\infty$.

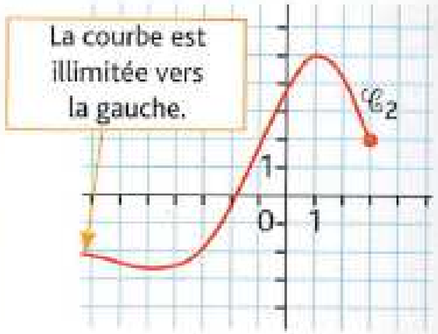
Savoir faire Décrire un ensemble en utilisant la notation sous forme d'intervalle

Énoncé

On considère les courbes ci-contre, en précisant dans les bulles des conventions graphiques :

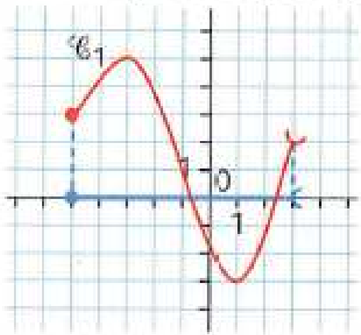
Pour chaque courbe, identifier l'ensemble des abscisses de ses points.



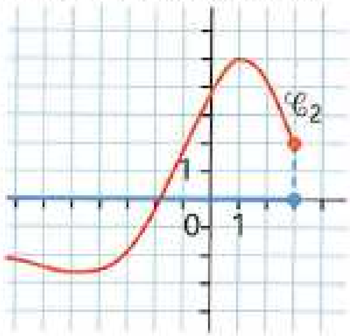


Solution rédigée

Pour chaque courbe, on lit l'ensemble des abscisses sur l'axe horizontal.



L'ensemble des abscisses est $[-5\,;3[$.



L'ensemble des abscisses est $]-\infty\,;3]$.

Conventions graphiques

- Le point noté par une « encoche » à l'extrémité n'appartient pas à la courbe.
- Le point noté par un point de la couleur de la courbe à l'extrémité appartient à la courbe.
- Le point noté par un point noir est connu avec précision.

Points méthode

1 On colorie sur l'axe horizontal l'ensemble des abscisses de tous les points de la courbe.

2 On traduit sous la forme d'un intervalle ou d'une réunion d'intervalles l'ensemble colorié.
À chaque borne, on met un crochet ouvert ou fermé en se référant aux conventions graphiques sur l'appartenance ou non d'un point à une courbe.

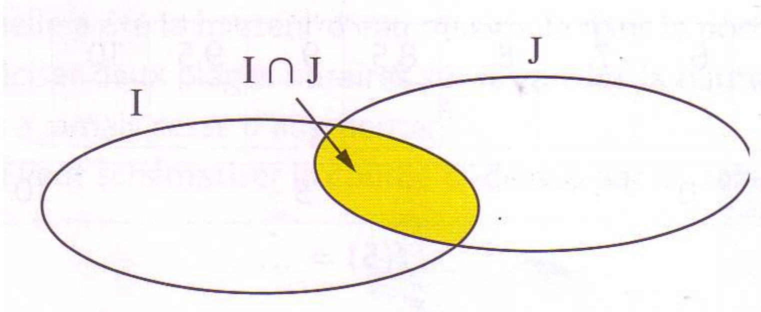
I- Les ensembles de nombres

4- Intersection ou réunion

a- définition

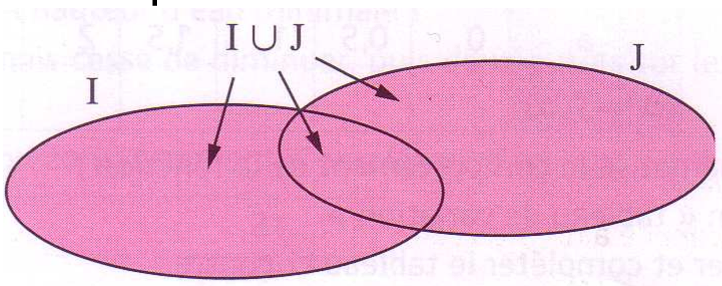
Soient I et J deux ensembles.

L'intersection de I et J, notée $I \cap J$ est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à I **ET** à J.



La réunion de I et J, notée $I \cup J$ est l'ensemble des éléments appartenant à I **OU** à J, c'est-à-dire à l'un au moins de ces deux ensembles.

On dit alors que le « OU » est non exclusif.



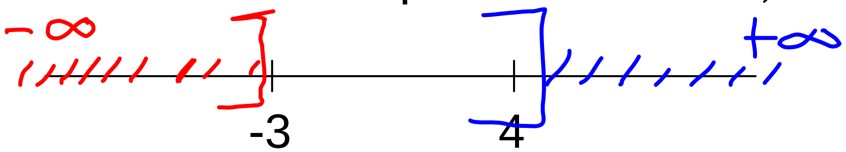
I- Les ensembles de nombres

4- Intersection ou réunion

b- vocabulaire

Pour désigner l'ensemble des réels x vérifiant : $x \leq -3$ **OU** $x > 4$, on écrira:

$]-\infty;-3]\cup]4;+\infty[$ Cet ensemble n'est pas un intervalle, car il n'est pas « d'un seul tenant ».



c- méthode

Pour déterminer la réunion ou l'intersection de deux intervalles, on les représente graphiquement de deux couleurs différentes sur la droite numérique. Si on cherche l'intersection, il s'agit d'identifier la partie coloriée deux fois, si en revanche on cherche la réunion, il s'agit d'identifier les segments coloriés.

d- exemples

- Déterminer la réunion puis l'intersection des intervalles I et J suivants :

$I = [-2;5[\quad J = [0;+\infty[$

$I = [-4;-2[\quad J = [1;+\infty[$

II- Notion de fonction

1- Définitions

a- vocabulaire des fonctions

Soit un ensemble de nombre $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. On définit une fonction f sur *D* lorsqu'à chaque réel x de $\mathcal{D}$, on associe un unique réel y.

On note $f : x \mapsto y$ ou $y = f(x)$.

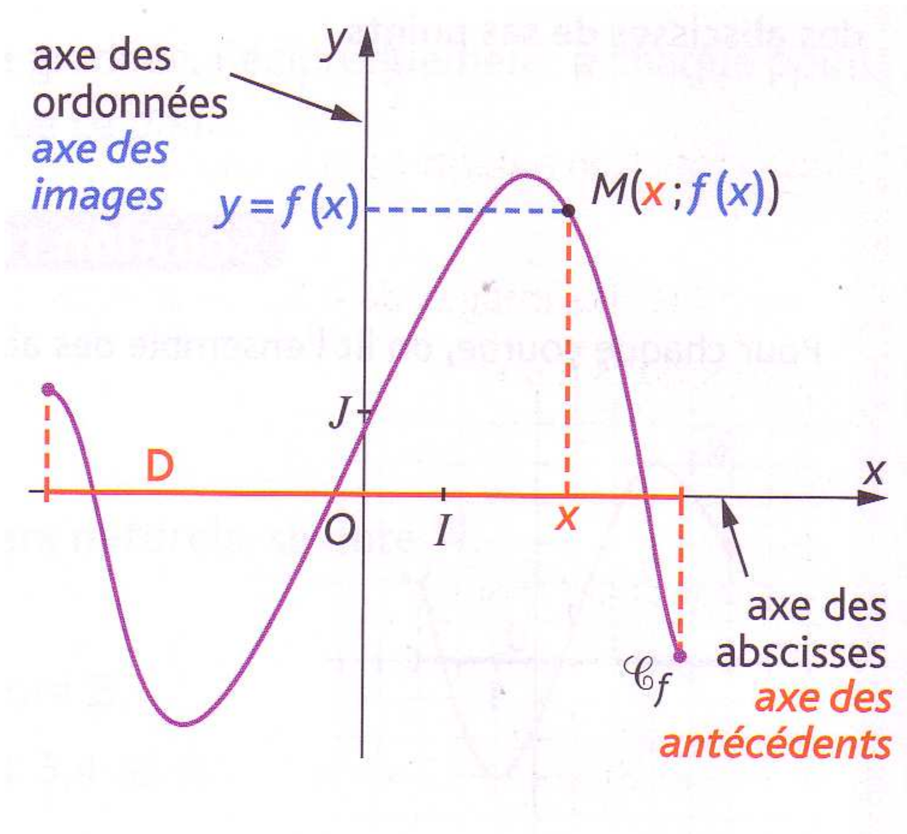
D est appelé ensemble de définition de la fonction f; x est la variable.

$f(x)$ est l'image de x par f.

Quand on sait que y= $f(x)$, on dit que x est **un** antécédent de y par f.

b- courbe représentative

Soit un repère du plan. On appelle courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f, l'ensemble des points M de coordonnées $(x;y)$ où : $\begin{cases} x \in \mathcal{D} \\ y = f(x) \end{cases}$



Remarques :

1- chaque réel x de $\mathcal{D}$ a une seule image.

2- Chaque réel y peut avoir plusieurs antécédents, ou ne pas avoir d'antécédent.

3- Une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ peut être donnée de trois façons:

algébrique

- par une **formule** ou une **expression algébrique**.

Exemple : $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

- par un **programme de calcul**.

Exemple :

–

–

–

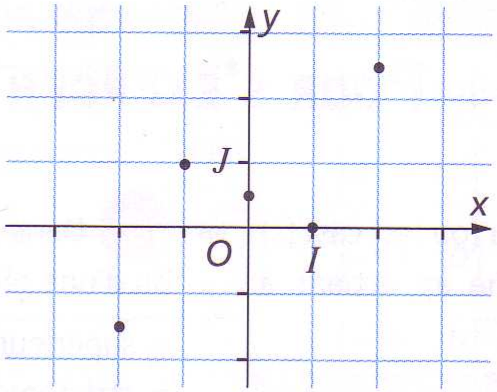
–

- par un **algorithme**.

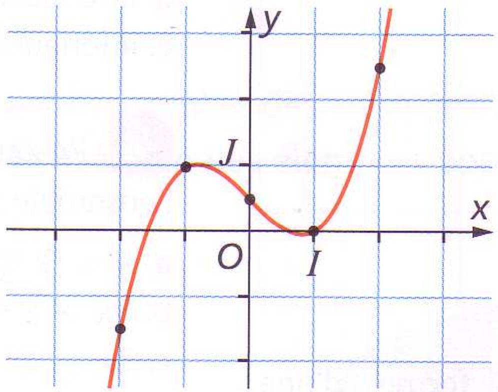
Exemple :

graphique

- par un **nuage de points** :



- par une **courbe représentative** :



numérique

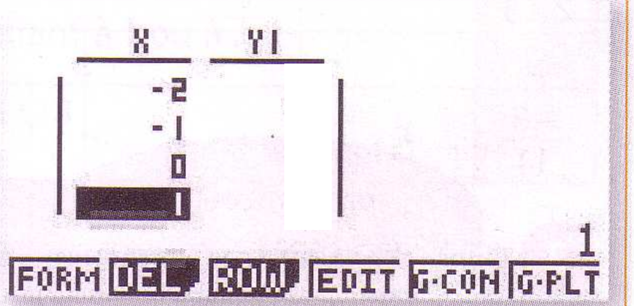
- par un **tableau de valeurs** :

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	$-1{,}5$				

ligne des antécédents, des abscisses

ligne des images, des ordonnées

- à l'aide de la calculatrice



Un nuage de points ou un tableau de valeurs ne peut décrire complètement une fonction que si l'ensemble de définition est fini.

II- Notion de fonction

2- Résolution graphique d'équations - recherche d'antécédents

Soit f une fonction et k un réel. On note $\mathcal{C}_f$ *la* courbe représentative de f dans un repère.

Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ revient à déterminer les **antécédents** de k par la fonction f, cela revient donc à trouver les abscisses de tous les points de la courbe ayant une ordonnée égale à k.

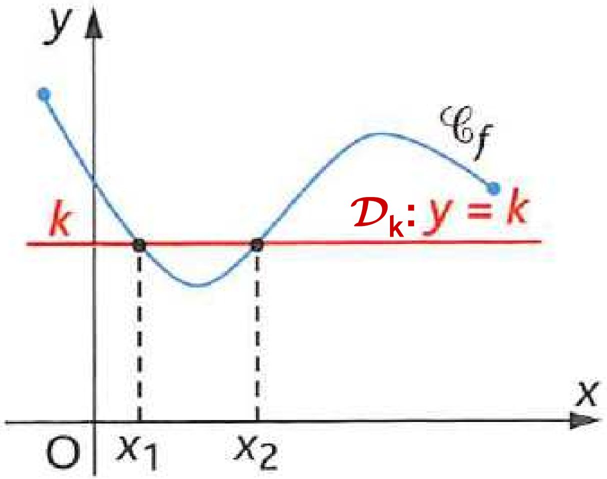
Méthode :

Pour cela, on trace la droite horizontale $\mathcal{D}_k$, d'équation $y=k$ *c'est une droite parallèle à l'axe des abscisses* ;

il y a autant d'antécédents (ou de **solutions** de l'équation) que de points d'intersection entre la courbe et la droite :

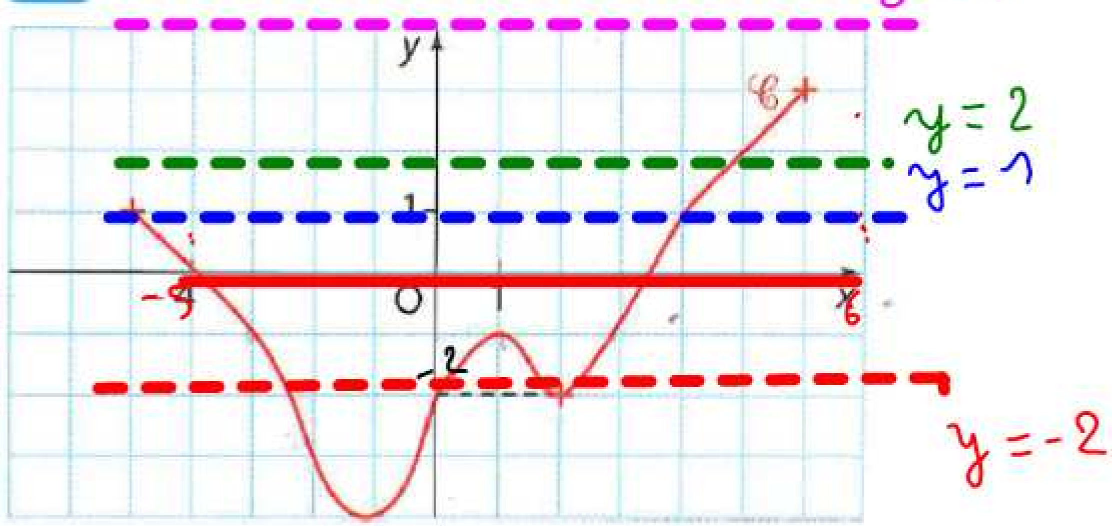
les solutions de l'équation $f(x) = k$ sont les **abscisses** des points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}_k$.

Sur le graphique ci-contre, l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = k$ est $\mathcal{S} = \{ x_1 ; x_2 \}$



Exemple :

19 La courbe représente une fonction *f*.



1. Quel est son ensemble de définition ?

2. Quel est le nombre de solutions de chaque équation ?

a) $f(x) = -2$;

b) $f(x) = 1$;

c) $f(x) = 2$;

d) $f(x) = 4$.

(On ne demande pas de trouver les solutions, seulement de préciser leur nombre, qui peut être zéro.)

1. $\mathcal{D}_f = [-5 ; 6]$

2. a) 3 solutions

b) 2 solutions

c) 1 solution

d) pas de solution

II- Notion de fonction

3- Tableau de signes d'une fonction

Dresser le tableau de signe d'une fonction consiste à résumer dans un tableau les intervalles sur lesquels la fonction est positive, nulle ou négative.

❖ L'axe des abscisses est la droite d'équation y = 0

❖ Lorsque la courbe est située au dessus de l'axe des abscisses les images sont positives donc on a $f(x) > 0$

❖ Lorsque la courbe rencontre l'axe des abscisses, les images sont nulles donc on a $f(x)=0$

❖ Lorsque la courbe est située en dessous de l'axe des abscisses, les images sont négatives donc

on a $f(x)<0$

➢Sur le graphique ci-contre, on peut lire que :

la fonction f est positive sur [-3;2,5[

ensuite, $f(-2,5)=0$,

puis f est négative sur]-2,5;-0,25[; ensuite $f(-0,25)=0$;

puis f est positive sur [-0,25;4]

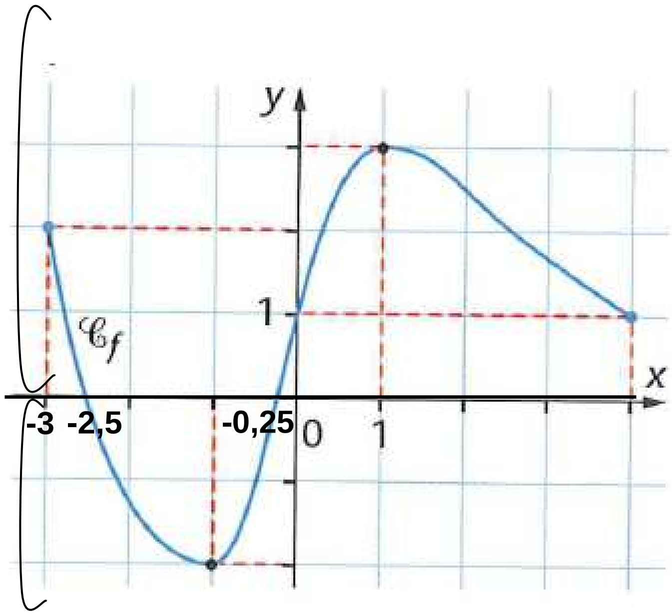


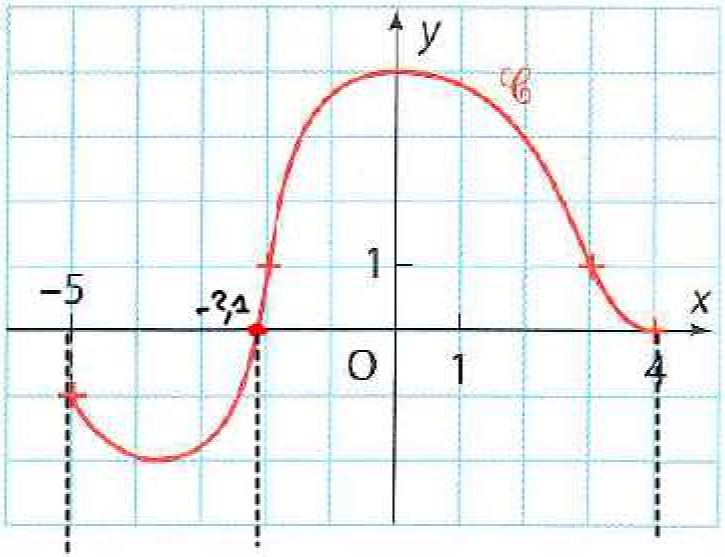
Tableau de signes de la fonction f

x	-3		-2,5		-0,25		4
$f(x)$		+	0	—	0	+	

Exemple :

Mise en pratique

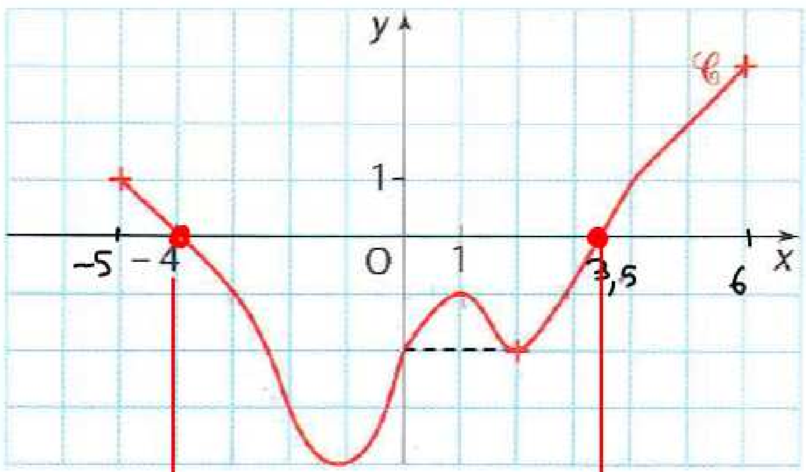
14 $\mathscr{C}$ est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-5\,;4]$.



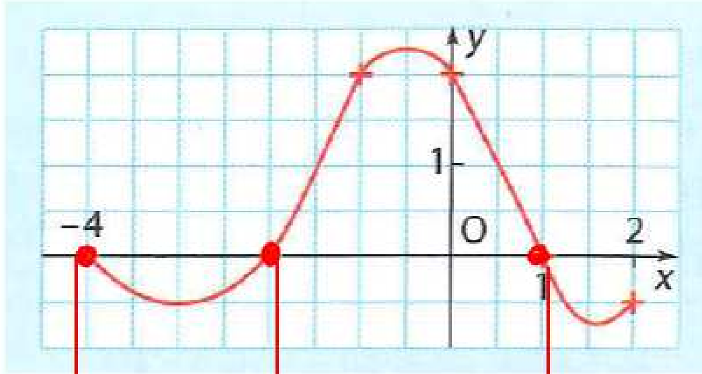
x	-5		$-2{,}1$		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	0

← Ensemble de définition de f et valeurs pour lesquelles $f(x)=0$ c'est à dire abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses

19 La courbe représente une fonction f.



1. Quel est son ensemble de définition ? $D_f = [-5;6]$



$D_f = [-4;2]$

x	-5		-4		$3{,}5$		6
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

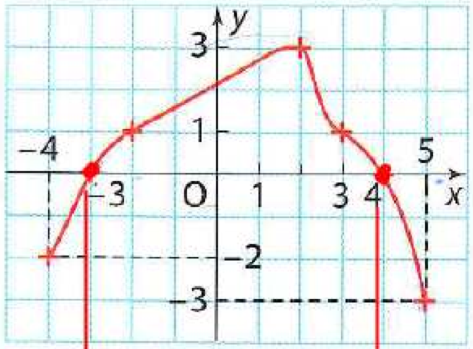
$f(x) = 0 \iff x = -4$ ou $x = 3{,}5$

x	-4		-2		1		2
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$f(x) = 0 \iff x \in \{-4; -2; 1\}$

20 La courbe est la représentation graphique d'une fonction f.

$D_f = [-4 ; 5]$

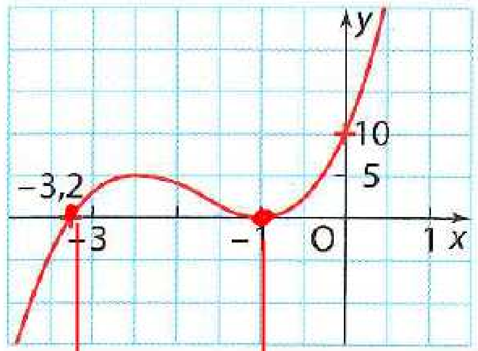


x	-4		$-3{,}5$		4		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$f(x) = 0$: $S = \{-3{,}5 ; 4\}$

21 La fonction f représentée est définie sur $\mathbb{R}$.

$D_f = \mathbb{R}$



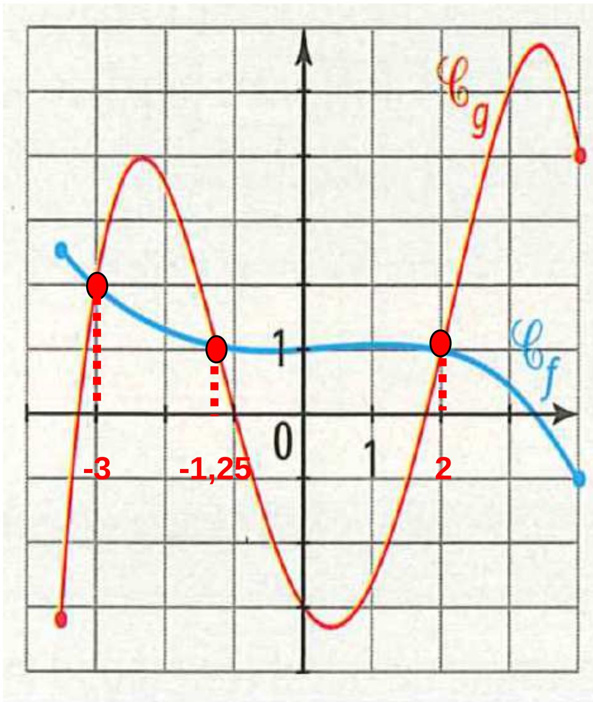
x	$-\infty$		$-3{,}2$		-1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	

$f(x) = 0$: $S = \{-3{,}2 ; -1\}$

III- Résolution graphique d'équations ou d'inéquations

1- Equation du type $f(x)=g(x)$

Soit f et g deux fonctions dont les courbes représentatives dans un repère sont respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



➢Résoudre graphiquement une équation du type $f(x)=g(x)$ consiste à déterminer les abscisses des points communs à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

➢Il y a autant de solutions à l'équation que de points d'intersection entre les deux courbes : les solutions sont les abscisses de ces points.

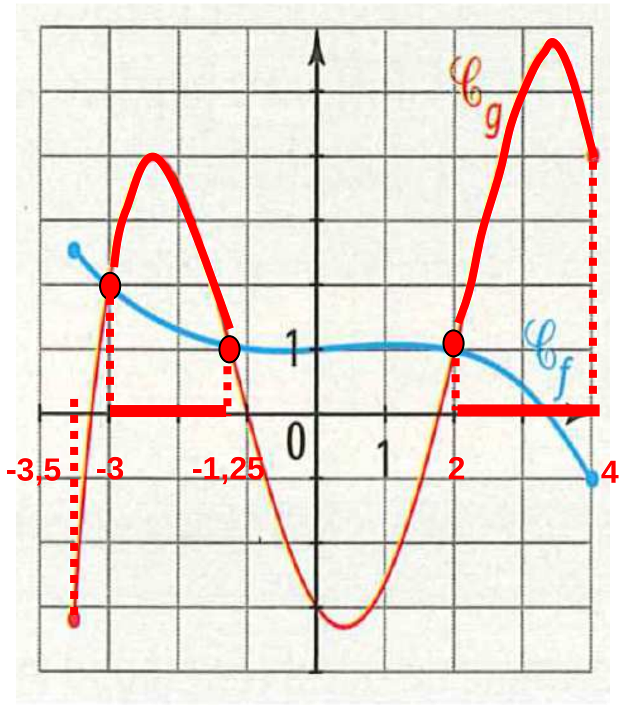
On rédige de la façon suivante : $f(x)=g(x)$: $\mathcal{S}=\{-3;-1,25;2\}$

ou encore $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x\in \{-3;-1,25;2\}$

III- Résolution graphique d'équations ou d'inéquations

2- Inéquation du type *f(x)<g(x) ou f(x)>g(x)*

➢Résoudre graphiquement une inéquation du type $f(x)<g(x)$ (resp. $f(x)>g(x)$)consiste à déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui sont situés en dessous de $\mathcal{C}_g$ (resp. au dessus)



Comme l'inégalité est stricte, les points communs sont exclus de l'ensemble des solutions.

En revanche, si l'inégalité est large, les abscisses des points d'intersection font partie de l'ensemble des solutions.

On rédige de la façon suivante :

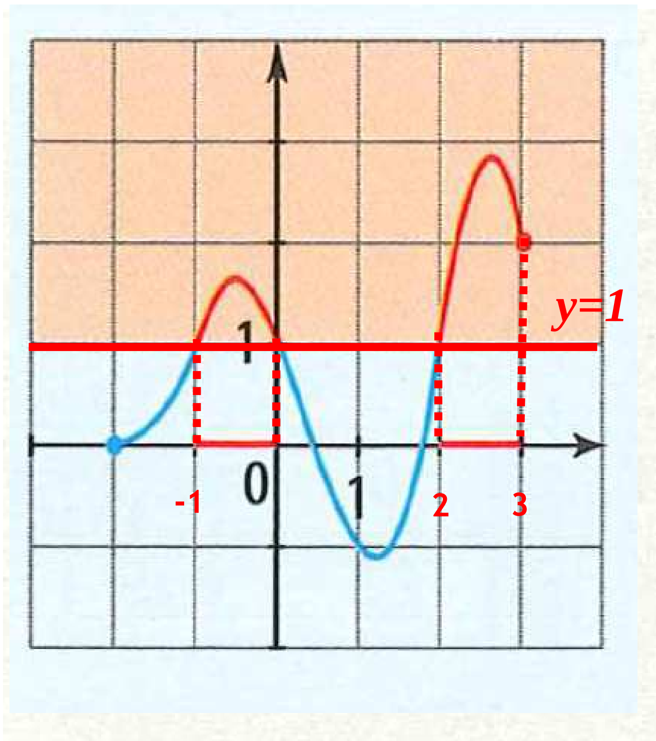
$g(x)>f(x)$: $\mathcal{S}$=]-3;-1,25 [U]2;4]

$f(x) \geq g(x)$: $\mathcal{S}$=[-3,5;-3] U [-1,25; 2]

ou encore $g(x)>f(x) \Leftrightarrow x\in$]-3;-1,25[U]2;4[ou encore $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x\in$ [-3,5;-3]U[-1,25; 2]

III- Résolution graphique d’équations ou d’inéquations

3- Cas particulier : inéquation du type *f(x)<k ou f(x)>k*



➢Résoudre graphiquement une inéquation du type $f(x)<k$ (resp. $f(x)>k$)consiste à déterminer les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ qui sont situés en dessous (resp. au dessus) de la droite horizontale d’équation $y=k$.

Comme l’inégalité est stricte, les points communs sont exclus de l’ensemble des solutions.

En revanche, si l’inégalité est large, les abscisses des points d’intersection font partie de l’ensemble des solutions.

On rédige de la façon suivante :

$f(x)>1$: $\mathcal{S}=]-1\ ;0[\ \cup\ ]2;3]$

$f(x)\leq 1$: $\mathcal{S}=[-2;-1]\ \cup\ [0;2]$