54 Tableau de signes

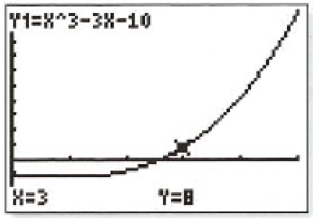
On considère la fonction f définie sur $[0;5]$ par :

$$f(x)=x^3-3x-10.$$

1 Dresser le tableau de variations de f sur $[0;5]$.

2 En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution a sur $[0;5]$.

3 En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[0;5]$.



1) f est définie, continue et dérivable sur $[0;5]$ car c'est une fonction polynôme.

Les variations de f dépendent du signe de sa dérivée et pour tout $0\leq x\leq 5$ $\quad f'(x)=3x^2-3 = 3(x^2-1)$

$$= 3(x-1)\underbrace{(x+1)}_{>0}$$

du signe de $x-1$ pour tout $x\in[0;5]$

x	0		1		a		5
$f'(x)$		$-$	0	$+$			
$f(x)$	-10	$\searrow$	-12	$\nearrow$	0	$\nearrow$	100

rappel : pour une expression du type $ax+b$, le signe de a est à droite du zéro.

$f(0)=-10$

$f(1)=-12$

$f(5)=100$

2) f est décroissante sur $[0;1]$ et atteint son maximum de -10 pour $x=0$. Donc sur cet intervalle, f ne s'annule pas.

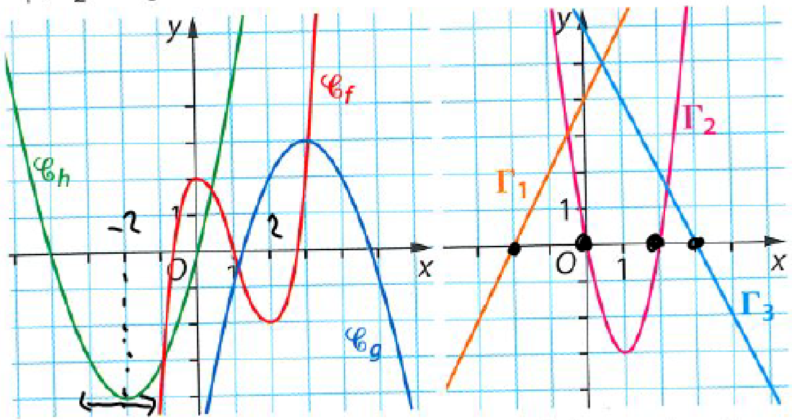
f est continue et strictement croissante sur $[1;5]$ or $f(1)<0<f(5)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution a dans $[1;5]$

3)

x	0		a		5
$f(x)$		$-$	0	$+$	

20 Associer fonction et fonction dérivée

On a représenté ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ de trois fonctions f, g et h dérivables sur $\mathbb{R}$, et les courbes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 de leurs fonctions dérivées.



Associer chaque courbe de fonction à la courbe de sa dérivée.

autre méthode :

on remarque que h admet un minimum pour $x=-2$ donc $h'(-2)=0$

or on a $\Gamma_1(-2)=0$. donc on associe Γ_1 et h'

on remarque que g admet un maximum pour $x=3$ donc $g'(3)=0$

or $\Gamma_3(3)=0$ donc on associe Γ_3 et g'

Propriété : Les variations d'une fonction dépendent du signe de sa dérivée

Dressons les tableaux de signe des fonctions dérivées f', g', h'

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$h(x)$		↘		↗	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		↗		↘		↗	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$g(x)$		↗		↘	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

Dressons le tableau de signe des fonctions Γ_1, Γ_2, Γ_3

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$\Gamma_1(x)$		$-$	0	$+$	

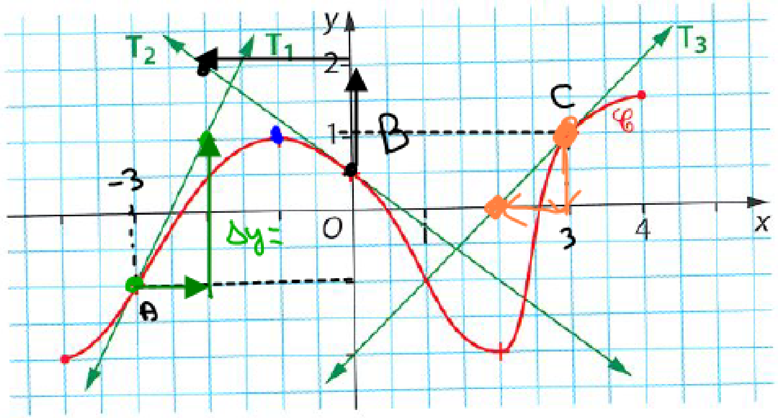
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$\Gamma_2(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$\Gamma_3(x)$		$+$	0	$-$	

On peut donc associer h' et Γ_1 ; f' et Γ_2 , g' et Γ_3

22 Nombres dérivés et tangentes

On considère la fonction f, définie sur $[-4;4]$, et connue par la courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-dessous.
On connaît également les tangentes T_1, T_2 et T_3 aux points d'abscisses respectives -3, 0 et 3.



1 Lire les valeurs de :
$f(-3)$, $f'(-3)$, $f(0)$, $f'(0)$, $f(3)$ et $f'(3)$.

2 Préciser les valeurs de x telles que $f'(x)=0$.

3 **a.** Justifier qu'une équation de la droite T_1 est :
$$y=2x+5.$$
b. Déterminer des équations des droites T_2 et T_3.

4 Construire le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-4;4]$, en précisant le signe de $f'(x)$.

2) Le graphique permet d'établir le tableau suivant

x	-4		-1		2		4
$f(x)$		↗		↘		↗	
$f'(x)$		+	0	−	0	+	

$f(-3)$ c'est $f(x)$ pour $x=-3$.

$f(-3)=-1$

$f'(-3)$ c'est le coefficient directeur de la droite T_1 tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -3

$$f'(-3)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{+2}{+1}=2$$

$f(0)=\frac{1}{2}$

$f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la droite T_2 tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 0

$$f'(0)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3/2}{-4/2}=-\frac{3}{4}$$

$f(3)=1$

$$f'(3)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{-1}=1$$

2) $f'(x)=0 \iff x\in\{-1\ ;2\}$

on peut rédiger également ainsi :

$f'(x)=0 \iff x=-1$ ou $x=2$

3) Propriété : la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse "a" a pour équation

$y = f'(a)(x-a)+f(a)$

concernant T_1 on a $a=-3$ donc $T_1 : y = f'(-3)(x-(-3)) + f(-3)$

$$= 2(x+3)-1$$

$$= 2x+6-1$$

$$y = 2x+5$$

T_2 est la tangente au point B d'abscisse 0 donc $T_2 : y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$$y = \frac{-3}{4}x + \frac{1}{2}$$

T_3 est la tangente au point C d'abscisse 3 donc $T_3 : y = f'(3)(x-3)+f(3)$

$$= x-3+1$$

$$y = x-2$$

4) Fait pour aider en question 2

Exercice n°2 :

a et b désignent deux nombres réels. f est la fonction définie sur [1 ;4] par :

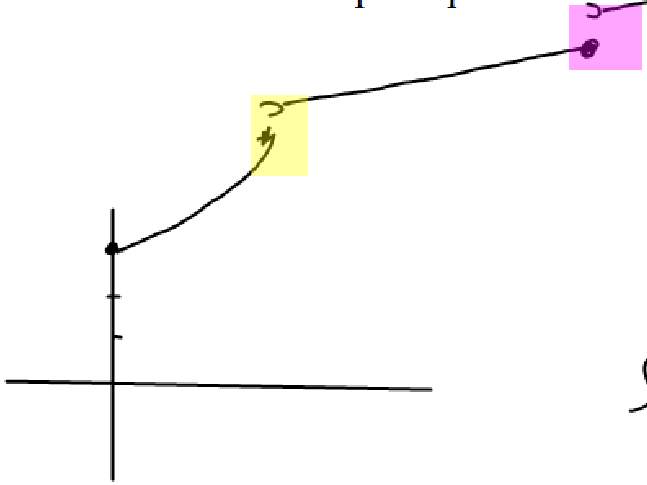
$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{si } x\in [1;2] \\ ax+b & \text{si } x\in\ ]2;3] \\ x^2+6 & \text{si } x\in\ ]3;4] \end{cases}$$

d'une part $f(2) = 2^2+2 = 6$

d'autre part pour $x = 2$ la courbe reprend en $y = 2a+b$

f est continue en 2 $\Leftrightarrow$ $2a+b=6$

Déterminer la valeur des réels a et b pour que la fonction f soit continue sur [1 ;4].



par ailleurs $f(3) = 3a+b$

et pour $x=3$ $\quad 3^2+6 = 15$

f continue en 3 $\Leftrightarrow$ $3a+b=15$

f est continue sur $[1;4]$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} 2a+b=6 & (L_1) \\ 3a+b=15 & (L_2) \end{cases}$

En effectuant $(L_2)-(L_1)$ on obtient $a = 9$

En insérant ensuite $a=9$ dans (L_1) il vient : $18+b=6$

$b=-12$

et on peut vérifier avec L_2 : $3\times 9+(-12) = 15$

Activité 3

Soit une fonction f définie sur I=[-5 ;9]. On donne son tableau de variations

x	-5	-3,5	3	−1		9
f (x)	-5	↗ 0	↗ >0	3	↘	0

1. Déterminer graphiquement $f'(-3)$ et $f'(-1)$. Justifier.
2. Résoudre $f(x) \leq 0$, $f(x) \geq 2$ et $f'(x) \geq 0$.
3. Donner une équation des droites (*D*) et (*D'*).
4. Montrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique dans l'intervalle [-5 ;3]
5. En déduire le tableau de signe de la fonction f.

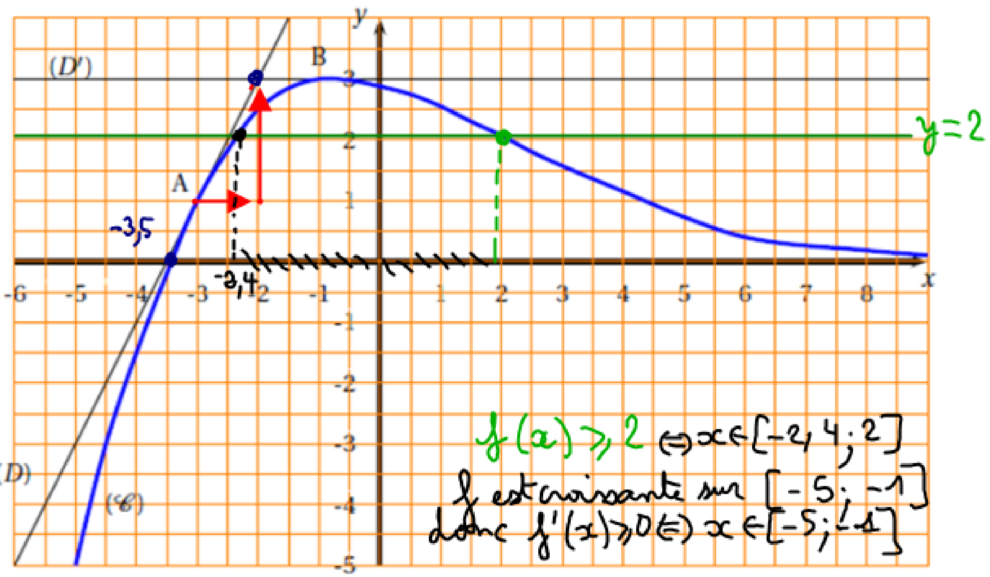
Renseignements issus de l'énoncé :

$A(-3;1) \in \mathcal{C}_f \iff f(-3)=1$ $B(-1;3) \in \mathcal{C}_f \iff f(-1)=3$

La courbe ($\mathcal{C}$) donnée ci-après représente la fonction f dans un repère orthonormal du plan. Cette courbe passe par les points A(−3 ; 1) et B(−1 ; 3). Les droites (*D*) et (*D'*) sont les tangentes à la courbe respectivement en A et en B.

$x_A=-3$ donc $f'(-3)$ correspond au coeff directeur de D.

$f'(-3)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{+4}{+2}=2$



$f(x) \geqslant 2 \iff x \in [-2,4;2]$

f est croissante sur $[-5;-1]$

donc $f'(x) \geqslant 0 \iff x \in [-5;-1]$

$x_B=-1$. $f'(-1)$ correspond au coefficient directeur de (D'), droite horizontale : son coeff directeur est nul.

donc on a $f'(-1)=0$.

2) D'après le graphique on a $f(-3,5)=f(9)=0$

on reporte ces renseignements dans le tableau de variations de f et on en déduit le tableau de signes de $f(x)$.

5)

x	-5		$-3,5$		9
$f(x)$		$-$	0	$+$	0

$f(x) \leqslant 0 \iff x \in [-5;-3,5] \cup \{9\}$

3) D' est une droite horizontale :

$D' : y = 3$

D a pour équation :

$D : y = f'(-3)(x-(-3)) + f(-3)$

$= 2(x+3)+1$

$y = 2x + 7$

4) f est continue et strictement croissante sur $[-5 ; 3]$

$f(-5) < 0 < f(-3)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α dans $[-5 ; 3]$.

Sur $[3 ; 9]$ atteint son minimum de 0 pour $x = 9$ et ne s'annule pas par ailleurs.

85 Déterminer une plage de bénéfice

Le bénéfice d'une entreprise est donné par :

$B(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 2$, pour $x \in [0;6]$,

où x est la quantité de produit en millier et $B(x)$ est exprimé en centaine de milliers d'euros.

1 Étudier les variations de la fonction B sur $[0;6]$. En déduire la quantité de produit qui optimise le bénéfice.

2 a. À l'aide du tableau de variations de la fonction B, déterminer le nombre de solutions de l'équation $B(x) = 0$ sur l'intervalle $[0;6]$.

b. Déterminer la plage de bénéfice de cette production.

On donnera les valeurs approchées à 10 unités près des points morts de la production, c'est-à-dire les quantités qui donnent un bénéfice nul.

B est définie continue et dérivable sur $[0;6]$

et pour tout $x \in [0;6]$ $B'(x) = -3x^2 + 6x + 9$

$= -3(x^2 - 2x - 3)$

Les variations de B dépendent du signe de sa dérivée.

Étudions le signe de B' en fonction de x.

On remarque que -1 est racine évidente

or le produit des racines est égal à $\frac{c}{a} = \frac{9}{-3} = -3$

donc la seconde racine est 3

La forme factorisée de $B'(x)$ est :

$B'(x) = -3\underbrace{(x+1)}_{>0}(x-3)$

$a(x - x_1)(x - x_2)$

$B'(x)$ est du signe de $3 - x$ pour tout $x \in [0;6]$

signe contraire de $x - 3$ à cause du -3 qui est en facteur

$3 - x = -1x + 3$

à droite du zéro

x	0	α	3	β	6
$B'(x)$		+	0	−	
$B(x)$	-2 ↗	0	↗ 25 ↘	0	↘ -56

2) a) l'équation $B(x) = 0$ possède exactement 2 solutions dans $[0;6]$

b) à l'aide de Geogebra on obtient $\alpha \simeq 0{,}209$ milliers $\simeq 210$ articles à 10 unités près

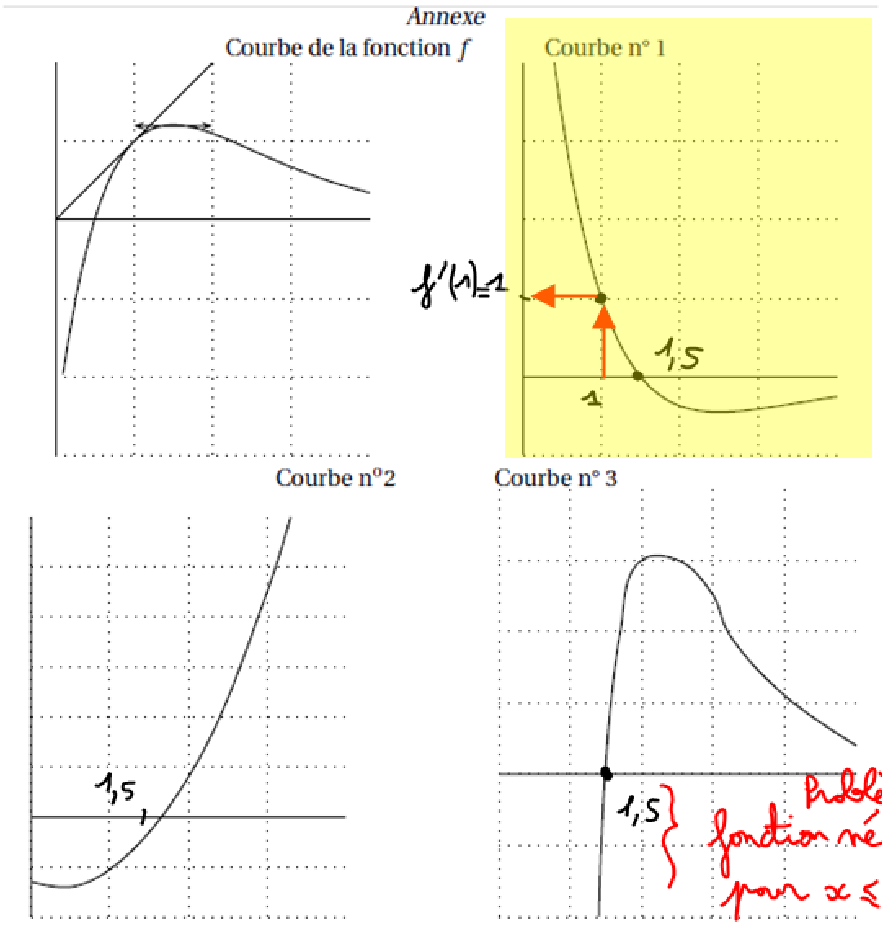
$\beta \simeq 4{,}791$ milliers $\simeq 4790$ articles à 10 unités près

La plage de bénéfice est donc comprise entre 210 et 4790 articles

Activité 4

Le graphique donné en annexe est celui de (Γ), courbe représentative d'une fonction f définie sur [0 ; 4] et de ses tangentes aux points d'abscisses 1 et 1,5.

Parmi les trois courbes données en annexe, laquelle est susceptible de représenter $f\,'$ où $f\,'$ est la fonction dérivée de f ?
Justifier votre réponse.



Problème : fonction négative pour $x \leq 1,5$

C_f admet une tangente horizontale en $x = 1,5$ on doit nécessairement avoir $f'(1,5)=0$.
Cette condition n'est pas remplie par la courbe 2.

La tangente au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $f'(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

Cette condition n'est pas remplie par la courbe 3 pour laquelle $f'(1) < 0$ en revanche la courbe 1 correspond.

De plus f est croissante sur $[0;1,5]$ donc nécessairement f' est positive sur $[0;1,5]$, ce qui n'est pas le cas pour la courbe 3