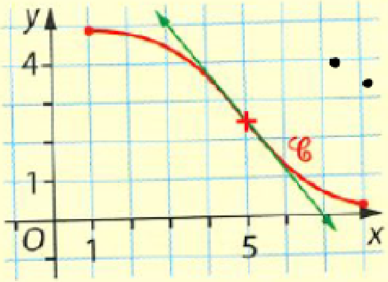
# 3 Convexité et inflexion

**58 QCM**

La fonction $f$, définie sur $[1;8]$, est connue par sa courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-contre.



**Donner la bonne réponse.**

**1** $f$ est convexe sur : **a.** $[1;8]$. **b.** $[1;5]$. **c.** $[5;8]$.

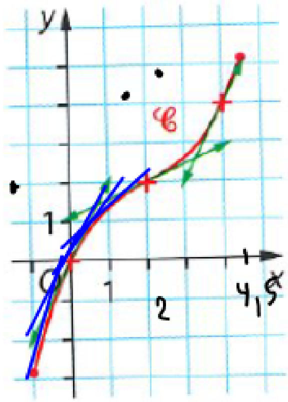
**2** $f$ est concave sur : **a.** $[1;8]$. **b.** $[1;5]$. **c.** $[5;8]$.

Correction : 1) $f$ est convexe sur $[5;8]$

2) $f$ est concave sur $[1;5]$

**60 Position de $\mathscr{C}$ par rapport aux tangentes**

Soit la fonction $f$ définie et dérivable sur $[-1;4{,}5]$ et connue par sa courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-contre et ses tangentes aux points d'abscisses 0,2 et 4.



**1 a.** Lire la position de $\mathscr{C}$ par rapport à ses tangentes sur l'intervalle $[-1;2]$.

**b.** Sur $[-1;2]$, $f$ est-elle convexe ou concave ?

**2** Sur $[2;4{,}5]$, $f$ est-elle convexe ou concave ?

**3** Étudier graphiquement la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 2.

1. a) $\mathscr{C}_f$ est en dessous de ses tangentes sur $[-1;2]$

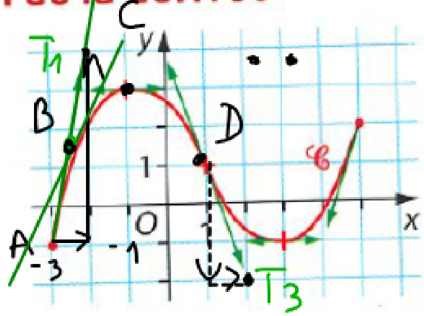
b) $f$ est concave sur $[-1;2]$

2. Sur $[2;4{,}5]$ $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de chacune de ses tangentes donc $f$ est convexe sur $[2;4{,}5]$

3. La courbe traverse sa tangente au point d'abscisse 2. Il y a donc un point d'inflexion.

## 61 Sens de variation de la dérivée

On considère une fonction $f$ définie sur $[-3\,;5]$ et représentée ci-contre par la courbe $\mathscr{C}$.
On a tracé quelques tangentes à $\mathscr{C}$.




**1 a.** En utilisant les coefficients directeurs des tangentes à $\mathscr{C}$, justifier que la dérivée $f'$ de la fonction $f$ est décroissante sur $[-3\,;1]$.

**b.** En déduire une propriété de la fonction $f$ et vérifier en regardant la position de $\mathscr{C}$ par rapport à ses tangentes sur $[-3\,;1]$.

**2** Quel est le sens de variation de $f'$ sur $[1\,;5]$ ? Que peut-on en déduire pour la fonction $f$ ?

**3** La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle un point d'inflexion ? Si oui, en quelle abscisse ?

1) a) $f'(-3)$ correspond au coefficient directeur de la droite $T_1$ tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse $-3$

$f'(-3) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+5}{+1}$

la tangente en B a une pente inférieure à celle de $T_1$ on a donc $f'(x_B) < 5$

la tangente en C est horizontale donc son coefficient directeur est nul :

on a donc $f'(x_C) = f'(-1) = 0$

Par ailleurs $f'(1)$ correspond au coeff directeur de $T_3$ : on a $f'(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{+1} = -3$

on observe donc que le nombre dérivé diminue sur $[-3\,;1]$

il en résulte que $f'$ est décroissante sur $[-3\,;1]$

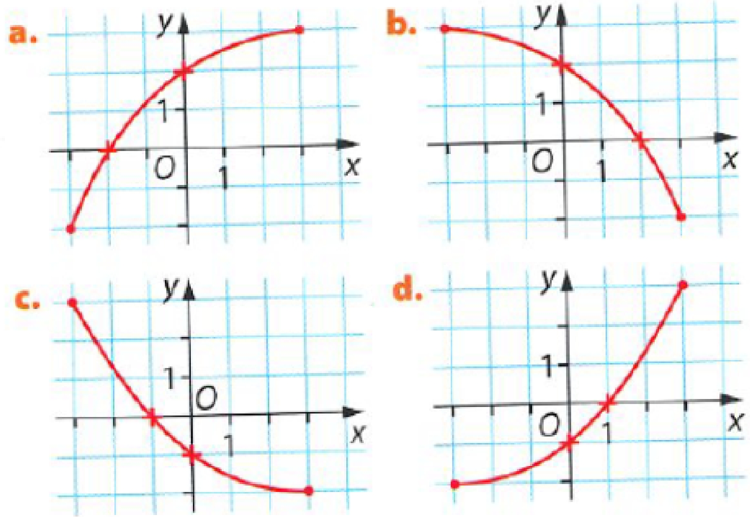
b) $f'$ est décroissante sur $[-3\,;1]$ donc $f$ est concave sur $[-3\,;1]$, ce qui est cohérent avec le fait que $\mathscr{C}_f$ soit en dessous de ses tangentes sur $[-3\,;1]$

2- $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de ses tangentes sur $[1\,;5]$ donc $f$ est convexe sur $[1\,;5]$ et donc il en résulte que $f'$ est croissante sur $[1\,;5]$

3. Le point d'inflexion correspond au changement de convexité, c'est à dire pour $x = 1$.

## 62 Variation de $f'$ sur la courbe $\mathscr{C}_f$

Pour chaque courbe ci-dessous représentant une fonction $f$ dérivable sur $[-3\,;3]$, indiquer le sens de variation de la fonction $f$ et de sa dérivée $f'$.




Les variations de $f'$ dépendent de la convexité de $f$ : si $f$ est concave sur I alors $f'$ est décroissante sur I. si $f$ est convexe sur I alors $f'$ est croissante sur I.

Posons $I = [-3;3]$

a - $f$ est croissante sur $[-3;3]$ ~~et~~ est concave sur $[-3;3]$ donc $f'$ est décroissante sur $[-3;3]$

b. $f$ est décroissante et concave sur I donc $f'$ est décroissante sur I.

c - $f$ est décroissante et convexe sur I donc $f'$ est croissante sur I

d - $f$ est croissante et convexe sur I donc $f'$ est croissante sur I.

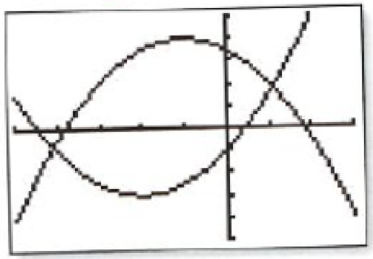
## 64 Polynômes du second degré

Les fonctions $f$ et $g$ sont définies sur $[-5\,;3]$ par :

$f(x)=0{,}5x^2+2x-1$

$g(x)=-0{,}5x^2-x+3{,}5$ .

On a obtenu à la calculatrice les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ .



**1** **a.** Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$ .

**b.** Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$ .

**2** Démontrer la convexité de ces fonctions.

## 67 Existence d'un point d'inflexion

On considère la fonction $f$ définie sur $[-3\,;3]$ par :

$$f(x)=x^3-3x+1 .$$

**1** Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ .

**2** Déterminer la solution $x_0$ de l'équation $f''(x)=0$ .
Puis étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-3\,;3]$ .

**3** La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?