Chapitre 2 :

Convexité

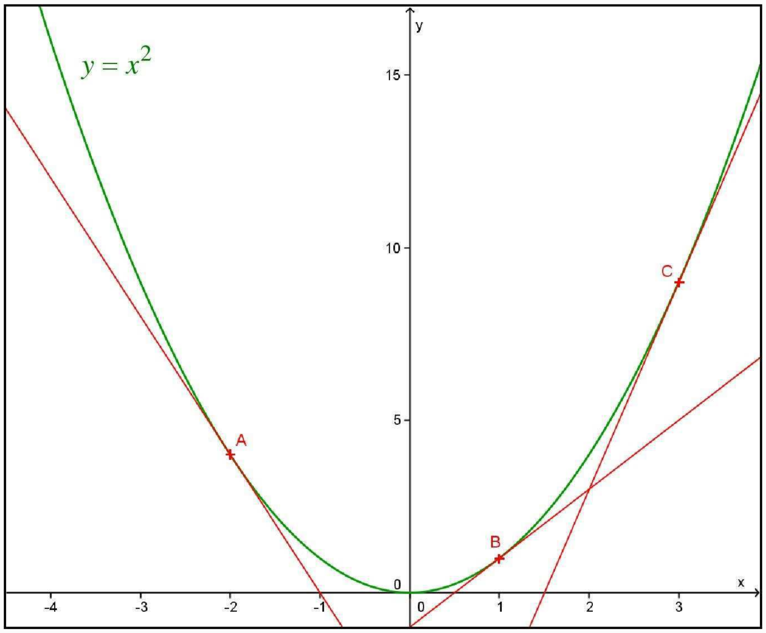
Cours – terminale ES

I – Fonction convexe, fonction concave

Définition 1: On appelle **fonction convexe** une fonction dérivable sur intervalle I, dont la courbe représentative est entièrement situé au dessus de chacune de ses tangentes

Exemple de fonction convexe

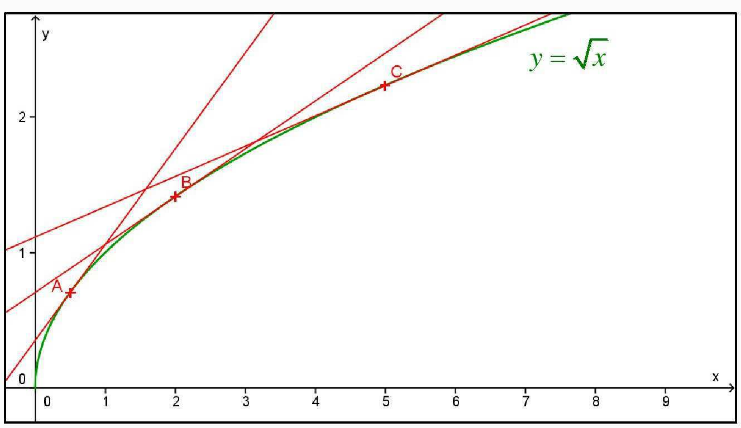
- La fonction $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.



Définition 2: On appelle **fonction concave** une fonction dérivable sur intervalle I, dont la courbe représentative est entièrement située au dessous de chacune de ses tangentes

Exemples de fonctions concaves

- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}$.



Propriété 1: • Une fonction est convexe sur un intervalle I si et seulement si sa dérivée est croissante sur I
• Une fonction est concave sur un intervalle I si et seulement si sa dérivée est décroissante sur I

Remarque : Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que f' est dérivable sur I alors la propriété 1 se traduit par :

• f est convexe sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$
• f est concave sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $f''(x) \leqslant 0$

où f'' désigne la fonction dérivée de f'.

Exemple : Étudier la convexité d'une fonction sur un intervalle

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$.

f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme et pour tout $x \in \mathbb{R}$
$f'(x) = 3x^2$. f' est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f''(x) = 6x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x) = 6x$		$-$	0	$+$	

$f''(x) \leqslant 0$ si $x \in]-\infty ; 0]$ donc f est concave sur $]-\infty ; 0]$
$f''(x) \geqslant 0$ si $x \in [0 ; +\infty[$ donc f est convexe sur $[0 ; +\infty[$

II – Point d'inflexion d'une courbe

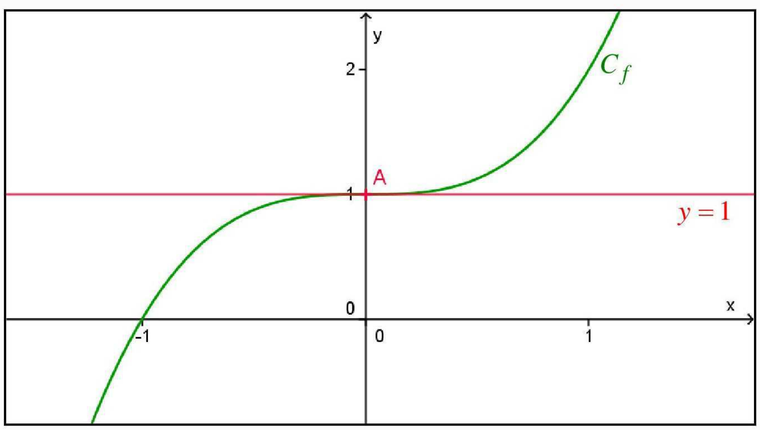
Définition 3: On appelle **point d'inflexion** un point où la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente.

Exemple : Reconnaître un point d'inflexion sur un graphique

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. On appelle C_f sa représentation graphique.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) = 3x^2$. $0(x - 0) + 1$

Équation de la tangente à C_f en $A(0, f(0))$: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ soit $y = 1$



La courbe C_f traverse sa tangente en A donc A est un point d'inflexion de C_f.

Propriété 2: Soit f une fonction 2 fois dérivable (f' est dérivable) sur un intervalle I.
La courbe représentative de f a un point d'inflexion d'abscisse x_0 si et seulement si f'' s'annule en changeant de signe en x_0.

Exemple : Trouver point d'inflexion par le calcul

On considère la fonction $f : x \mapsto x^3 + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. On appelle C_f sa représentation graphique.

On a dressé précédemment le tableau de signes de $f''(x)$ et on remarque que f'' s'annule en changeant de signe pour $x = 0$ donc C_f présente un point d'inflexion au point A d'abscisse $x_A = 0$ $A(0 ; f(0)) = (0 ; 1)$