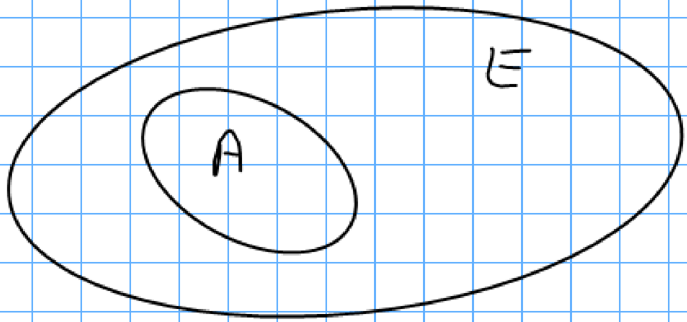
Chapitre 1 : Proportions

I Proportions et pourcentages

1) Définitions



Soit A une partie d'un ensemble E.

On note n_A et n_E le nombre d'éléments respectifs de A et de E

La proportion des éléments de A dans E (ou par rapport à E) est le quotient $p = \frac{n_A}{n_E}$

Vocabulaire : E est appelé population de référence

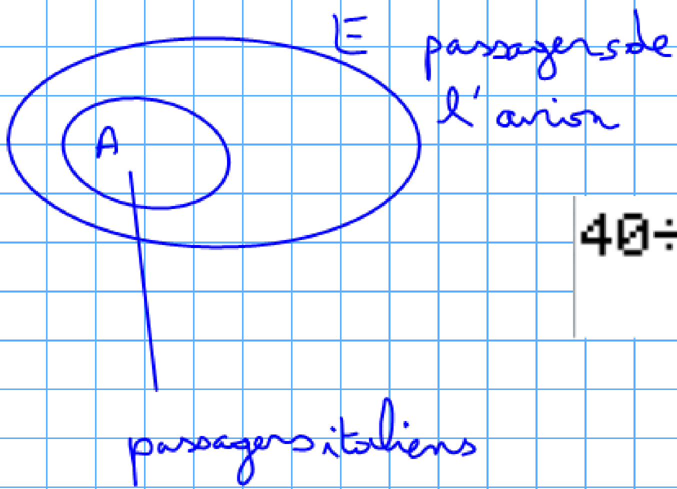
Exemple : 1 p35

1 **C** Dans un groupe de 85 voyageurs débarquant d'un avion en provenance de Rome, 40 personnes sont de nationalité italienne. Calculer la proportion d'Italiens dans le groupe de voyageurs ; écrire la proportion sous forme d'une fraction, puis donner sa valeur décimale arrondie à 10^{-3} près.

CONSEIL
Voir exercice résolu 1 page 29.

La population de référence E est le groupe de voyageurs. $n_E = 85$

La sous-population A est le groupe de personnes italiennes. $n_A = 40$



La proportion d'italiens dans le groupe de voyageurs est : $p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{40}{85}$

40÷85
0.4705882353

$\simeq 0{,}471$ à 10^{-3} près

__Remarque :__ proportion exprimée en pourcentage

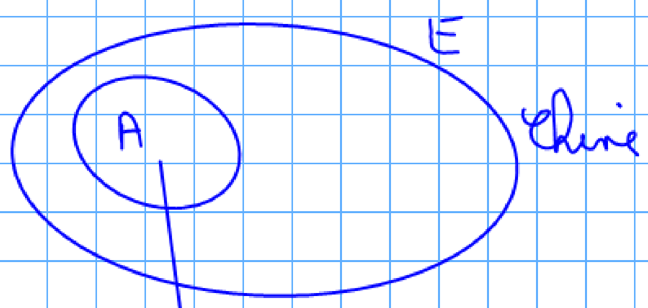
$$p = \frac{47{,}1}{100} = 47{,}1\ \%$$

"pourcent" % signifie "divisé par 100"

__Application__ : n°3 p35

3 En 2010, la population de la Chine était évaluée à 1,3 milliard d'habitants, dont 65 millions habitaient la province de Anhui. Quelle proportion de la population chinoise représentait la population de la province de Anhui ?

Remarque : en 2010, la population de la France était à peu près égale à celle de la province de Anhui.



province de Chine appelée Anhui.

La population de référence E est la population de Chine $n_E = 1,3$ milliards

La sous-population A est la population de la province d'Anhui $n_A = 65$ millions

La proportion de la province d'Anhui dans la population chinoise est :

$$p = \frac{n_A}{n_E}$$

attention, il faut convertir n_A et n_E dans une même unité.

Sachant que 1 milliard = 1000 millions

1,3 milliard $\rightarrow \dfrac{1,3 \times 1000}{1}$

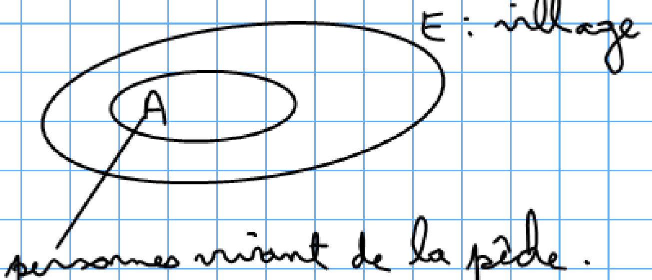
$$p = \frac{65}{1300} = \frac{\cancel{13} \times 5}{\cancel{13} \times 100} = 5\,\%$$

2) Calcul d'effectifs

Méthode : Pour calculer l'effectif d'une population à partir d'une proportion on utilise le produit en croix

Exemple 1 : Dans un petit village portuaire, les cinq sixièmes des 720 habitants vivent de la pêche.

Combien de personnes vivent de la pêche ?



La population de référence E est la population du village. $n_E = 720$

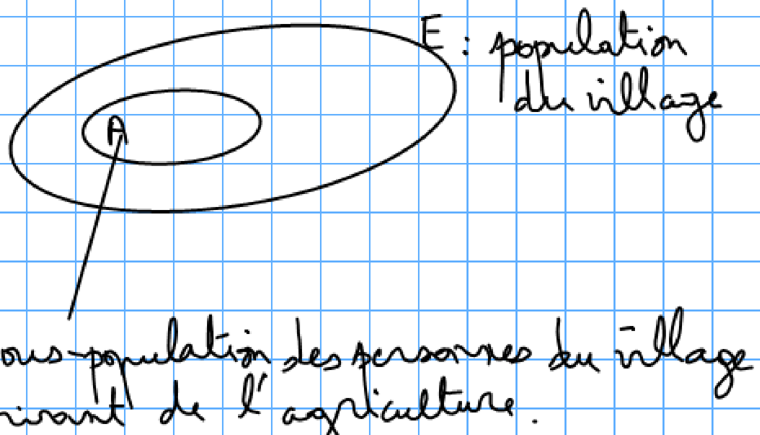
La sous-population A est la sous-population des personnes vivant de la pêche. $n_A = ?$

La proportion d'habitants du village qui vivent de la pêche est $p = \frac{5}{6}$

$p = \frac{n_A}{n_E}$ donc $\frac{5}{6} = \frac{n_A}{720}$

Par produit en croix, $n_A = \frac{5 \times 720}{6} = 600$

Exemple 2 : Dans un village 697 personnes vivent de l'agriculture ce qui représente 82% de la population. Combien de personnes vivent dans ce village ?



La population de référence E est la population du village et $n_E = ?$

La sous-population A est la sous-population des personnes vivant de l'agriculture et $n_A = 697$

La proportion d'habitants du village vivant de l'agriculture est $p = 82\% = \frac{82}{100}$

$$p = \frac{n_A}{n_E} \quad \text{donc} \quad \frac{82}{100} = \frac{697}{n_E}$$

Par produit en croix on a :

$$n_E = \frac{697 \times 100}{82} = 850$$

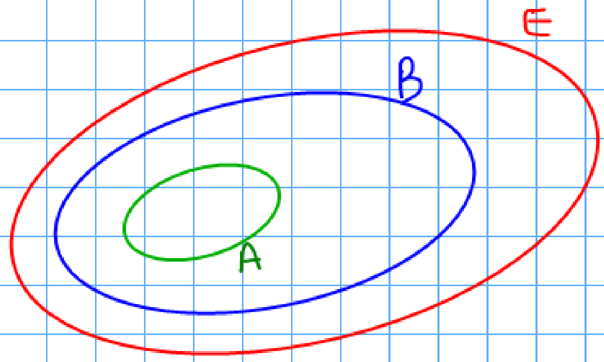
remarque : $\frac{0,82}{1} = \frac{697}{n_E}$

$$n_E = \frac{697 \times 1}{0,82} = 850$$

3) Proportions échelonnées

A, B et E sont des populations telles que A est une sous-population de B

B est une sous-population de E



La proportion de A dans B est $p = \frac{n_A}{n_B}$ (*)

La proportion de B dans E est $p' = \frac{n_B}{n_E}$ (**)

<u>Déterminons la proportion de A dans E en fonction de p et p'.</u>

$$\frac{n_A}{n_E} = ?$$

D'après (*) on a $\frac{p}{1} = \frac{n_A}{n_B}$ donc par produit en croix $n_A = \frac{p \times n_B}{1} = p \times n_B$

D'après (**) on a $\frac{p'}{1} = \frac{n_B}{n_E}$ donc par produit en croix : $n_E = \frac{n_B \times 1}{p'} = \frac{n_B}{p'}$

On en déduit que $\frac{n_A}{n_E} = \frac{p \times n_B}{\left(\frac{n_B}{p'}\right)} = p \times \cancel{n_B} \times \frac{p'}{\cancel{n_B}} = p \times p'$

<u>Remarque</u> : Diviser c'est multiplier par l'inverse

Propriété : Si p est la proportion de A dans B et p' est celle de B dans E alors la proportion P de A dans E est : $P = p \times p'$

Illustration :

$$\begin{tikzcd}
\text{effectif } n_E \text{ de la population } E \arrow[r, "\times p'"] \arrow[rr, bend right, "\times pp'"'] & \text{effectif } n_B \text{ de la population } B \arrow[r, "\times p"] & \text{effectif } n_A \text{ de la population } A
\end{tikzcd}$$

Exemple : Dans une famille $\frac{2}{3}$ des membres sont musiciens et parmi ces musiciens $\frac{3}{4}$ jouent du violon. Quelle est la proportion des membres de la famille qui jouent du violon ?

$$\begin{tikzcd}
\text{effectif } n_E \text{ de la famille} \arrow[r, "\times \frac{2}{3}"] \arrow[rr, bend right, "\times\left(\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\right)"'] & \text{effectif } n_B \text{ des musiciens} \arrow[r, "\times \frac{3}{4}"] & \text{effectif } n_A \text{ des violonistes}
\end{tikzcd}$$

La proportion des membres de la famille qui jouent du violon est $\frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{2}{\cancel{3}} = \frac{1}{2}$

Remarque : en français, le problème peut se formuler de la façon suivante :

$\frac{3}{4}$ des $\frac{2}{3}$ de la famille jouent du violon.

La traduction mathématique est

$\frac{\cancel{3}}{4} \times \frac{2}{\cancel{3}}$ de la famille jouent du violon

soit $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ de la famille joue du violon.

A retenir :

... de quelque chose

... $\times$ quelque chose

Exemple : $\frac{2}{3}$ des 375 habitants d'un village sont propriétaires

$\frac{2}{3} \times 375 = 250$: il y a 250 propriétaires dans le village.

Application

Application (VOIR EXERCICE RÉSOLU 4)

Un lycée polyvalent comporte des sections d'enseignement technologique (STMG, …) et des sections d'enseignement général (L, S,…).

1. La proportion d'élèves de la section STMG parmi les élèves de l'enseignement technologique est égale à 0,6.
La proportion d'élèves de l'enseignement technologique parmi les élèves du lycée est égale à 0,8.
Calculer la proportion d'élèves du lycée qui sont en STMG.

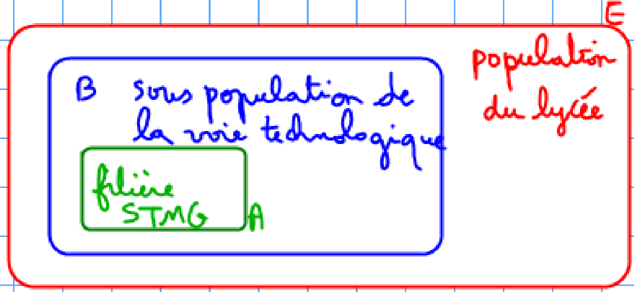
MÉTHODE

Dans une situation de deux inclusions successives, pour calculer une proportion connaissant les deux autres :

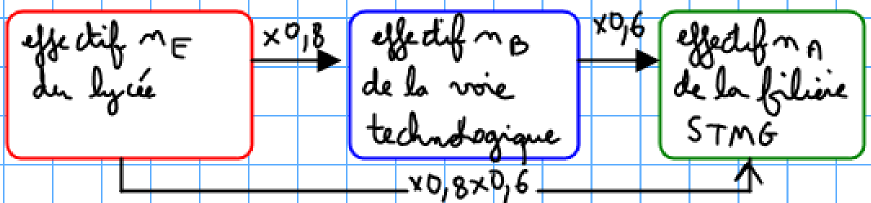
1. On détermine de façon précise les trois populations concernées A, B et E, telles que A soit une sous-population de B et B soit une sous-population de E.

2. On calcule la proportion recherchée en utilisant l'égalité $P = pp'$, où p est la proportion de A dans B, p' celle de B dans E et P celle de A dans E.

Traduisons l'énoncé par un schéma :



Les populations A, B, E étant identifiées telles que $A \subset B \subset E$ on peut réaliser le schéma en reportant les données :

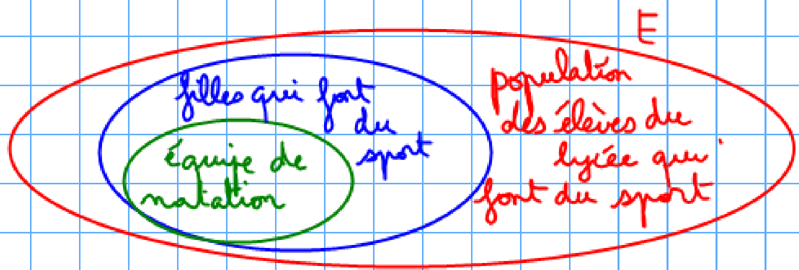


La proportion d'élèves de la filière STMG parmi l'ensemble des élèves du lycée est $P = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$ soit 48 %

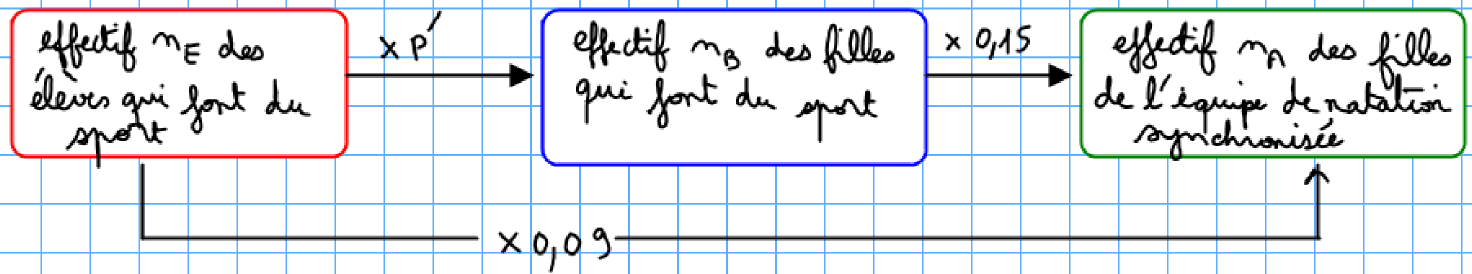
2. Ce lycée a une équipe de natation synchronisée (pratiquée exclusivement par des filles).
La proportion des pratiquantes de natation synchronisée parmi les filles qui font du sport au lycée est égale à 15 %.
La proportion des pratiquantes de natation synchronisée parmi les élèves (garçons et filles) qui font du sport au lycée est égale à 9 %.
Quelle est la proportion de filles parmi les élèves qui font du sport au lycée ?

→ VOIR EXERCICES 22 À 28, P. 37

On identifie les populations A, B et E telles que $A \subset B \subset E$ à l'aide d'un schéma.



Pour dresser le schéma ci-dessous on se sert du graphique précédent puis on reporte les proportions citées entre les blocs de couleur



On a $p' \times 0{,}15 = 0{,}09$ En divisant membre à membre par 0,15 on obtient :

$$\frac{p' \times \cancel{0{,}15}}{\cancel{0{,}15}} = \frac{0{,}09}{0{,}15}$$

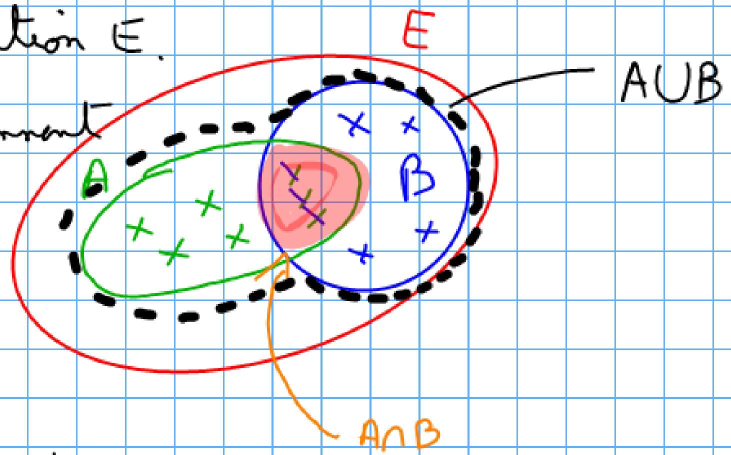
d'où $p' = \frac{0{,}09}{0{,}15} = 0{,}6 = 60\,\%$

Les filles représentent 60 % des élèves du lycée qui font du sport.

I Proportions, réunion et intersection

1) Définitions

On considère 2 sous-populations A et B d'une même population E.



- $A \cap B$ est la sous-population des individus qui appartiennent à la sous-population A **et** à la sous-population B.

  $A \cap B$ est l'intersection de A et de B
  « A inter B »

- $A \cup B$ est la sous-population des individus qui appartiennent à la sous-population A **ou** à la sous-population B, c'est à dire qui appartiennent à l'une au moins des deux sous-populations.

  $A \cup B$ est la réunion de A et de B.
  « A union B »

Remarque : En mathématiques, « ET » correspond toujours à « les deux »
« OU » correspond toujours à « l'un, l'autre ou les deux »

notations : on note n_A, n_B, $n_{A\cup B}$, $n_{A\cap B}$ les effectifs

et p_A, p_B, $p_{A\cup B}$, $p_{A\cap B}$ les proportions des sous-populations

A, B, $A\cup B$, $A\cap B$ dans la population E.

Propriété :

$$\boxed{\begin{array}{l} n_{A\cup B} = n_A + n_B - n_{A\cap B} \\ \\ p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B} \end{array}}$$

Exemple : A la suite de plaintes de consommateurs, un fabriant d'appareils ménagers inspecte les 500 derniers appareils sortis d'usine. Il constate que 25 ont un défaut A, 19 ont un défaut B, 12 ont un défaut C. Parmi les appareils défectueuse 5 ont à la fois le défaut A et le défaut B, les autres n'ont qu'un seul défaut.

1. Déterminer la proportion d'appareils inspectés ayant le défaut A ou le défaut B.
2. Déterminer la proportion d'appareils inspectés ayant le défaut B ou le défaut C.

Solution : Compréhension de l'énoncé :

Soit E la population des appareils inspectés. $n_E = 500$

Soit A, B, C les sous-populations des appareils présentant respectivement les défauts A, B, C

on a : $n_A = 25$; $n_B = 19$; $n_C = 12$.

$A \cap B$: sous-population des appareils présentant le défaut A et le défaut B. $n_{A\cap B} = 5$

$A \cup B$: sous-population des appareils présentant le défaut A ou le défaut B $n_{A\cup B} = ?$

$B \cap C$: sous-population des appareils présentant les défauts B et C $n_{B\cap C} = 0$

$A \cap C$: sous-population des appareils présentant le défaut A et le défaut C $n_{A\cap C} = 0$

1) Déterminons $P_{A\cup B}$

On a $P_{A\cup B} = P_A + P_B - P_{A\cap B}$

$$= \frac{n_A}{n_E} + \frac{n_B}{n_E} - \frac{n_{A\cap B}}{n_E} = \frac{25}{500} + \frac{19}{500} - \frac{5}{500} = \frac{25+19-5}{500}$$

$$= \frac{39}{500} \overset{\times 2}{=} \frac{78}{1000} \overset{:10}{=} \frac{7{,}8}{100} = 7{,}8\%$$

2) Déterminons $P_{B\cup C}$

On a $P_{B\cup C} = P_B + P_C - P_{B\cap C}$

$$= \frac{n_B}{n_E} + \frac{n_C}{n_E} - \frac{n_{B\cap C}}{n_E} = \frac{19}{500} + \frac{12}{500} - \frac{0}{500} = \frac{31}{500} = 6{,}2\%$$

Remarque : $B \cap C = \emptyset$ Ensemble vide

Les sous-populations B et C sont dites disjointes

B C

Application (VOIR EXERCICE RÉSOLU 3)

1. Un club sportif propose plusieurs activités, entre autres le judo et le yoga. Parmi les 90 membres du club, 25 pratiquent le judo, 31 pratiquent le yoga et 7 pratiquent les deux. Calculer la proportion des membres du club qui pratiquent le judo ou le yoga.

2. Dans ce même club, 10 membres pratiquent le tir à l'arc, mais ne pratiquent pas le judo. Calculer la proportion des membres du club qui pratiquent le judo ou le tir à l'arc.

→ VOIR EXERCICES 16 À 21, P. 36

Soit E la population des membres du club , $n_E = 90$

J : sous-population des membres pratiquant le judo $n_J = 25$

Y : sous-population des membres pratiquant le YOGA $n_Y = 31$

$J \cap Y$: sous-population des membres pratiquant le judo et le yoga $n_{J\cap Y} = 7$

1) Déterminons $P_{J\cup Y}$:

$$P_{J\cup Y} = P_J + P_Y - P_{J\cap Y}$$
$$= \frac{n_J}{n_E} + \frac{n_Y}{n_E} - \frac{n_{J\cap Y}}{n_E}$$
$$= \frac{25}{90} + \frac{31}{90} - \frac{7}{90} = \frac{25+31-7}{90} = \frac{49}{90} \approx 54{,}44\%$$

2) Soit A : sous-population des membres pratiquant le tir à l'arc $n_A = 10$

$A \cap J$: sous-population des membres pratiquant le tir à l'arc et le judo $n_{A\cap J} = 0$

$A \cap J = \emptyset$

Les sous-populations A et J sont disjointes

$$P_{J\cup A} = P_J + P_A - P_{J\cap A}$$
$$= 25/90 + 10/90 - 0/90 = \frac{35}{90} = \frac{7}{18}$$