87 Étude d'une fonction de coût total

L'entreprise chinoise Shishi produit du tissu en coton qu'elle conditionne en « roules » de 2 000 m de long et 1,5 m de large. Elle peut fabriquer au maximum 10 km en continu.

Le coût total de production, en euro, est donné en fonction de la longueur x, en km, par la formule :

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750 \text{, où } x \in [0;10].$$

1) 1 article est vendu 400€

donc x articles sont vendus

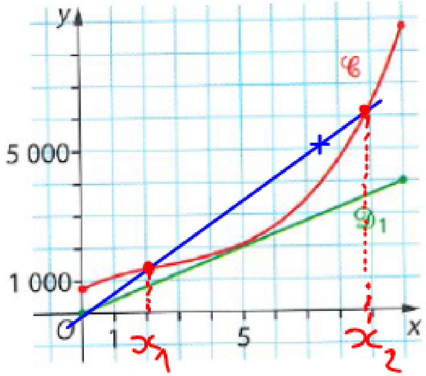
$x \times 400 = 400x = R(x)$

$y = 400x$ est donc la droite représentant la recette.

graphiquement $\mathscr{C}$ est toujours située au dessus de $\mathscr{D}_1$, cela traduit le fait que pour un prix de vente unitaire de 400€, la recette est toujours inférieure au coût de production et que l'entreprise ne dégage aucun bénéfice.

PARTIE A Étude du bénéfice

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation $y = 400x$.



1 Au vu du graphique, expliquer pourquoi l'entreprise Shishi ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix du marché est égal à 400 euros par km.

2 Dans cette question, on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros par km.

a. Reproduire le plus précisément possible le graphique précédent. *(Utiliser le tableau de valeurs de la fonction C sur calculatrice.)* Puis tracer sur le graphique la droite $\mathscr{D}_2$ d'équation $y = 680x$.

Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise Shishi réalise un bénéfice si le prix du marché est de 680 euros par km.

B est une fonction polynôme donc définie, continue et 2 fois dérivable sur $I = [0;10]$ et pour tout $x \in I$

Les variations de B dépendent du signe de sa dérivée

b. Soit la fonction B définie sur $[0;10]$ par :

$$B(x) = 680x - C(x).$$

Démontrer que pour tout réel x de $[0;10]$, on a :

$$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180.$$

c. Étudier les variations de la fonction B sur $[0;10]$.

En déduire la quantité produite et vendue pour laquelle le bénéfice réalisé par l'entreprise Shishi est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

2) on réalise un bénéfice sur l'intervalle $]x_1; x_2[$

avec $x_1 \simeq 2,063$

$x_2 \simeq 8,715$

b) on a $R(x) = 680x$

$B(x) = R(x) - C(x)$

$= 680x - C(x)$

$B(x) = 680x - (15x^3 - 120x^2 + 500x + 750)$

$= 680x - 15x^3 + 120x^2 - 500x - 750$

$= -15x^3 + 120x^2 + 180x - 750$

$B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$ ■

Etudions le signe de $B'(x) = 15(-3x^2+16x+12)$ du signe de $-3x^2+16x+12$

$\Delta = b^2 - 4ac$ avec $a = -3$ $b = 16$ $c = 12$

$= (16)^2 - 4 \times (-3) \times 12$

$= 256 + 144 = 400$ $\sqrt{\Delta} = \sqrt{400} = 20$

Les racines r_1 et r_2 de $B'(x)$ sont :

$$r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16+20}{-6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$$r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16-20}{-6} = 6$$

$a<0$: B' est négative à l'extérieur des racines

x	0		x_1		6		x_2		10
$B'(x)$		+			0		−		
$B(x)$	-750	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1410	$\searrow$	0	$\searrow$	-1950

$B(0) = R(0) - C(0)$

$= 680 \times 0 - 750$

$= -750$

$B(6) = R(6) - C(6)$

$= 680 \times 6 - 2670$

$= 1410$

$B(10) = 680 \times 10 - 8750$

Le bénéfice maximal est réalisé pour $x = 6$ soit 6km de tissus et vaut 1410€.

PARTIE B Étude du coût marginal

Le **coût marginal** C_m peut être assimilé à la dérivée du coût total. Ainsi, sur [0 ; 10], $C_m(x) = C'(x)$.

1 Calculer $C_m(x)$ et étudier les variations de C_m sur l'intervalle [0 ; 10].

2 En déduire que le coût marginal C_m admet un minimum au point d'inflexion de la courbe de coût total C.

B $C_m(x) = C'(x) = 45x^2 - 240x + 500$

Les variations de C_m dépendent du signe de sa dérivée.

Pour tout $x \in [0;10]$ $C_m'(x) = 90x - 240$
$= 30(3x - 8)$

$C'_m(x) = 0 \iff 3x - 8 = 0$
$\iff 3x = 8$
$\iff \frac{3x}{3} = \frac{8}{3}$
$\iff x = \frac{8}{3}$

D'où le tableau de variation de C_m :

x	0		$8/3$		10
$C'_m(x)$		$-$	0	$+$	
$C_m(x)$		↘		↗	

C_m admet un minimum pour $x = 8/3$

or on a $C'_m(x) = C''(x)$

C'' s'annule en changeant de signe pour $x = 8/3$ ce qui traduit un point d'inflexion pour C en $x = \frac{8}{3}$

PARTIE C Étude du coût moyen

Le **coût moyen** CM mesure le coût par unité produite. Ainsi, sur]0 ; 10], $CM(x) = \frac{C(x)}{x}$.

1 Par calcul formel, on a obtenu :

	Terminé
$cm(x) := \frac{15\cdot x^3 - 120\cdot x^2 + 500\cdot x + 750}{x}$	
$\text{factor}\left(\frac{d}{dx}(cm(x))\right)$	$\frac{30\cdot(x-5)\cdot(x^2+x+5)}{x^2}$

Justifier l'expression obtenue pour la dérivée $CM'(x)$ du coût moyen.

2 En déduire les variations de CM sur]0 ; 10].

3 **a.** Pour quelle longueur x_0 de tissu produite le coût moyen est-il minimum ? Que valent dans ce cas le coût moyen, le coût marginal et le coût total ?

b. Si le prix du marché est 680 euros par km, quel est le bénéfice réalisé par l'entreprise si elle fabrique et vend une longueur de tissu de x_0 km ?

$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$
$= \frac{15x^3 - 120x^2 + 500x + 750}{x}$
$= \frac{15x^3}{x} - \frac{120x^2}{x} + \frac{500x}{x} + \frac{750}{x}$
$= 15x^2 - 120x + 500 + \frac{750}{x}$

$C_M'(x) = 30x - 120 - \frac{750}{x^2}$

(on met au même dénominateur)

$C_M'(x) = \frac{30x^3 - 120x^2 - 750}{x^2}$

or $30(x-5)(x^2+x+5)$
$= 30(x^3 + x^2 + 5x - 5x^2 - 5x - 25)$
$= 30(x^3 - 4x^2 - 25)$
$= 30x^3 - 120x^2 - 750$

on a donc $C_M'(x) = \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}$

forme factorisée très utile pour en étudier le signe ... 2- Les variations de C_M dépendent du signe de sa dérivée

or $x^2 > 0$ $x^2 + x + 5 > 0$ car $\Delta = 1^2 - 4\times 5 < 0$

donc $C_M'(x)$ est du signe de $x - 5$ (expression de la forme $ax+b$)

x	0		5		10
$C_M'(x)$		$-$	0	$+$	
$C_M(x)$		↘		↗	

3a) le coût moyen est minimum pour $x = 5$ (graphiquement la tangente passe par l'origine) et le coût marginal est égal au coût moyen (voir exo 81)

$C(5) = 15 \times 5^3 - 120 \times 5^2 + 500 \times 5 + 750 = 2125$

$C_m(5) = 45 \times 5^2 - 240 \times 5 + 500 = 425$

$C_M(5) = \dfrac{C(5)}{5} = \dfrac{2125}{5} = 425$

on a bien $C_m(5) = C_M(5)$

Propriété : lorsque le coût moyen est minimal, le coût marginal est égal au coût moyen

b. $x_0 = 5$ $\quad B(5) = R(5) - C(5)$

$= 680 \times 5 - 2125$

$= 1275$

Si le prix du marché est 680€ le kilomètre, alors le bénéfice réalisé pour la vente de 5km est 1275€.