COURS CHAPITRE 3

I SUITES GÉOMÉTRIQUES

1 DÉFINITION

Dire qu'une suite (u_n) est *géométrique* signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n, $U_{n+1} = q \times U_n$

Le réel q est appelé raison de la suite

2 PROPRIÉTÉ 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$U_n = U_0 \times q^n$$

3 PROPRIÉTÉ 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_1 alors pour tout entier n,

$$U_n = U_1 \times q^{n-1}$$

4 PROPRIÉTÉ

Si (u_n) une suite géométrique de raison q alors pour tout entier n et pour tout entier p,

$$U_n = U_p \times q^{n-p}$$

5 MONOTONIE, sens de variation d'une suite géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc :
$u_{n+1}-u_n \quad = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n$
$= u_0 \times q^n \times (q-1)$

La monotonie de la suite dépend du signe de u_0, q^n et $(q-1)$
– Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.
– Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q-1)$.

Nous pouvons en déduire les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 1

Soit q un réel non nul. Définissons par (q_n) la suite définie pour tout n par $q_n = q^n$
- Si $q < 0$ alors la suite (q_n) n'est pas monotone
- Si $q > 1$ alors la suite (q_n) est croissante
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (q_n) est décroissante
- Si $q = 1$ alors la suite (q_n) est constante

THÉORÈME 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul
– Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.
– Si $q > 0$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite (q_n).
– Si $q > 0$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite (q_n).

5 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS D'UNE SUITE GEOMETRIQUE

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n,

$$u_0+u_1+\cdot\quad\cdot\quad\cdot+u_n = \sum_{i=0}^{n} u_i = u_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{1}^{\text{er}} \text{ terme de la somme} \times \left(\frac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}\right)$$

Application : Exercices 28 à 30 page 23

Exercice n°28

a) $S = 1 + 1{,}1 + 1{,}1^2 + \dots + 1{,}1^{20}$

IV LIMITE D'UNE SUITE

1 LIMITE FINIE

a. DÉFINITION

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.

1. Dire que la suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]\ell-r; \ell+r[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N_0. On écrit :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite

Autrement dit, une suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ si tous les termes de la suite à partir d'un certain rang peuvent être aussi proches que voulu de ℓ.