Chapitre 2 : Fonctions polynômes du second degré

I Différentes formes d'une expression du second degré

1) Forme développée

Définition : On appelle fonction polynôme du second degré ou encore trinôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression du type

(1) : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont 3 réels tels que $a \neq 0$

L'expression (1) est la forme développée de $f(x)$

Exemples :

- $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ est une expression du second degré du type ax^2+bx+c
  avec $a = -1$; $b = 3$; $c = -2$
- $f(x) = -2x + 7x^2 + 4$ est une expression du second degré du type ax^2+bx+c
  avec $a = 7$; $b = -2$; $c = 4$ En effet $f(x) = 7x^2 - 2x + 4$ en respectant l'ordre décroissant des puissances de x
- $f(x) = x^2$ est une expression du second degré de la forme ax^2+bx+c
  avec $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$

2) représentation graphique

Définition : Soit f la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq$
La courbe représentative de f dans un repère du plan est une parabole $\mathcal{P}$ dont le sommet S a pour abscisse $x_S = -\frac{b}{2a}$

On note souvent $x_S = \alpha$, $\boxed{\alpha = -\frac{b}{2a}}$

Propriété. Dans un repère orthogonal, la parabole $\mathcal{P}$ admet pour axe de symétrie la droite passant par le sommet S et parallèle à l'axe des ordonnées.

- si $a < 0$: $\mathcal{P}$ est tournée vers le bas
- si $a > 0$: $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut.

Si $a > 0$

$\mathcal{P}$ est « orientée vers le haut »

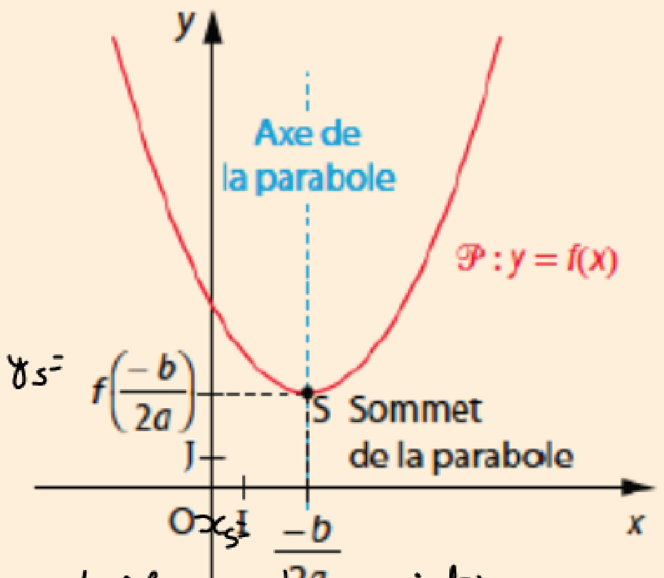


tableau de variation

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\searrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$

Si $a < 0$

$\mathcal{P}$ est « orientée vers le bas »

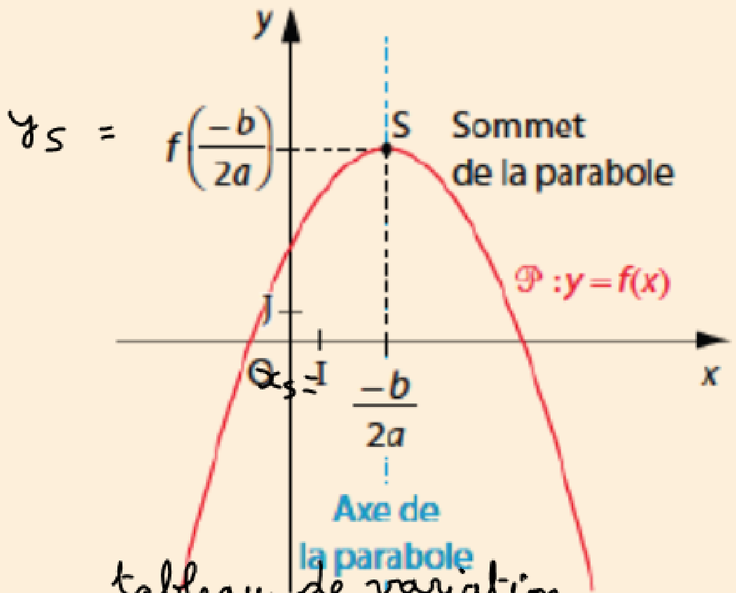


tableau de variation

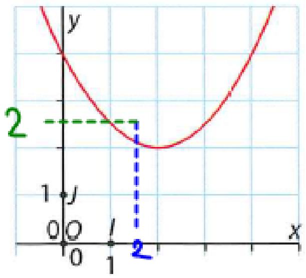
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\nearrow$	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	$\searrow$

Application : page 126

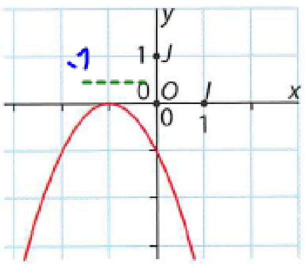
5 Chacun des tracés suivants est celui de la parabole représentative d'une fonction polynôme f de degré 2, définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.

Pour chacun des cas, préciser le signe de a et dresser le tableau de variation de f.

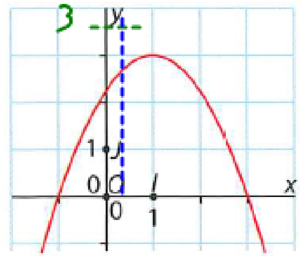
a)



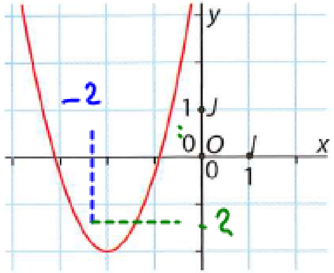
b)



c)



d)



a) $a > 0$ car $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↘	2	↗	

b) $a < 0$ car la parabole est tournée vers le bas

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

c) $a < 0$ car la parabole est tournée vers le bas

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	3	↘	

d) $a > 0$ car $\mathcal{P}$ · tournée vers le haut

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		↘	-2	↗	

8 Chacun des tableaux de variation suivants est celui d'une fonction polynôme f de degré 2, définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.
Pour chacun des cas, préciser le signe de a et tracer à main levée une parabole possible qui pourrait être représentative de f.

a)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↘

b)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

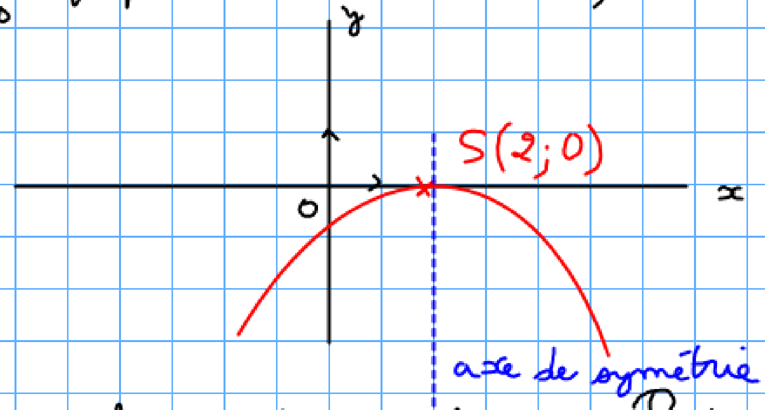
c)

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

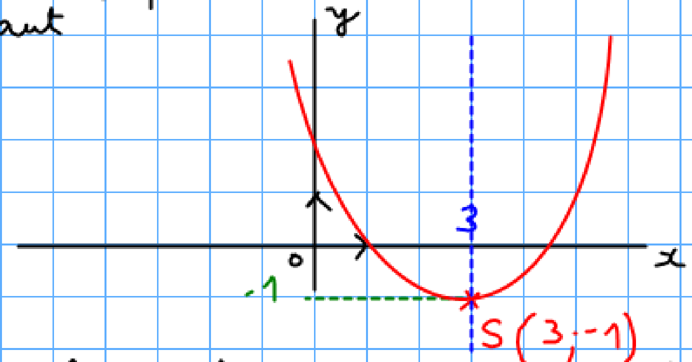
d)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	-3	↘

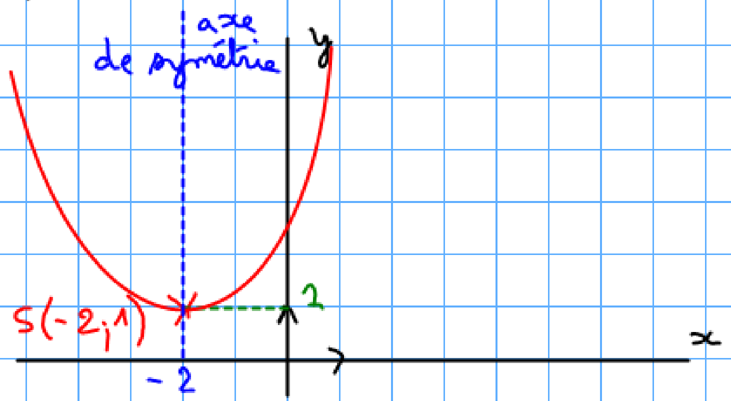
a) $a < 0$ car f présente un maximum ; $\mathcal{P}$ est tournée vers le bas



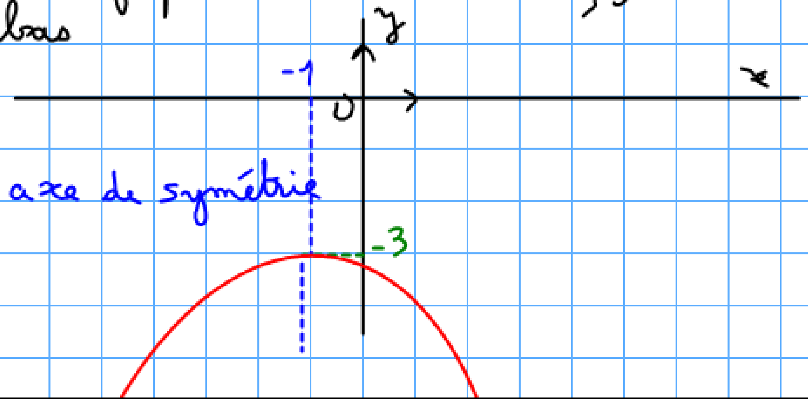
b) $a > 0$ car f présente un minimum ; $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut



c) $a > 0$ car f présente un minimum ; $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut

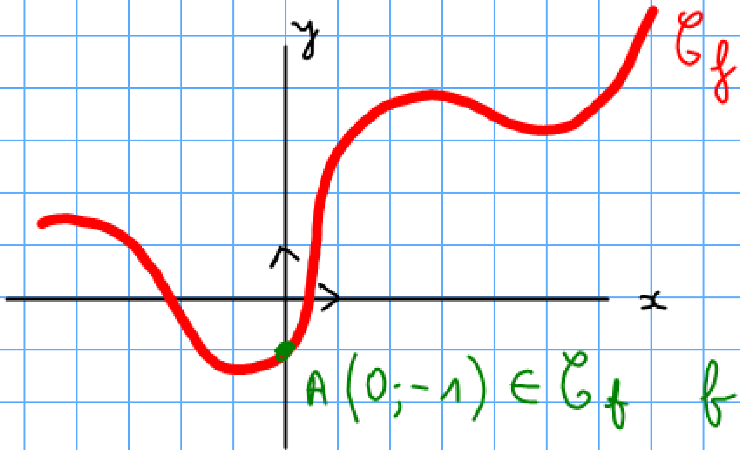


d) $a < 0$ car f présente un maximum ; $\mathcal{P}$ est tournée vers le bas



Remarque : Ordonnée à l'origine

On appelle ordonnée à l'origine, l'ordonnée du point d'intersection d'une courbe avec l'axe des ordonnées.



$f(0) = -1$

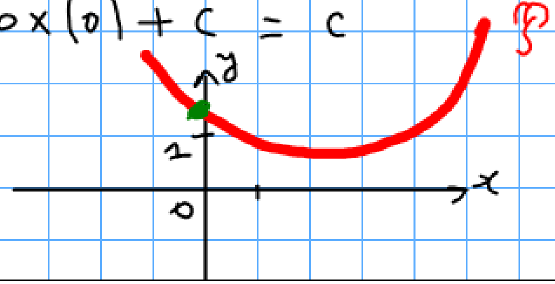
graphiquement, l'ordonnée à l'origine est égale à -1 et correspond à $f(0)$.

Ordonnée à l'origine d'une fonction du second degré :

Soit f une fonction du second degré définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$

on a alors $f(0) = a \times (0)^2 + b \times (0) + c = c$

$f(0) = c$



$a > 0$ car $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut

$c = 1{,}5$

3) Forme canonique

Propriété et définition : Pour toute fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, on peut trouver deux nombres réels α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Cette expression est appelée forme canonique de f et on a :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha ; \beta)$