Chapitre 2 : Second degré

I Fonctions polynômes du second degré : différentes formes d'une même expression

1) forme développée

Définition : on appelle fonction polynôme du second degré ou encore trinôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression algébrique du type

(1) $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec a, b, c 3 réels quelconques, et $a \neq 0$

Exemples : • $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ est une expression du second degré, du type ax^2+bx+c

avec $a = -1$; $b = 3$; $c = -2$

• $f(x) = -2x + 7x^2 + 4$ est une expression du second degré du type ax^2+bx+c

avec $a = 7$; $b = -2$; $c = 4$. En effet en remettant les termes dans l'ordre des puissances décroissantes de x on peut écrire $f(x) = 7x^2 - 2x + 4$

• $f(x) = x^2$ est une expression du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$
avec $a = 1$ $b = 0$ $c = 0$

2) représentation graphique

Définition : Soit f la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$

La courbe représentative de f dans un repère du plan est une parabole $\mathcal{P}$ dont le sommet S a pour abscisse $x_S = -\dfrac{b}{2a}$

On note souvent $x_S = \alpha$, $\boxed{\alpha = -\dfrac{b}{2a}}$

Propriété. Dans un repère orthogonal, la parabole $\mathcal{P}$ admet pour axe de symétrie la droite passant par le sommet S et parallèle à l'axe des ordonnées.

- si $a < 0$: $\mathcal{P}$ est tournée vers le bas
- si $a > 0$: $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut.

Si $a > 0$

$\mathcal{P}$ est « orientée vers le haut »

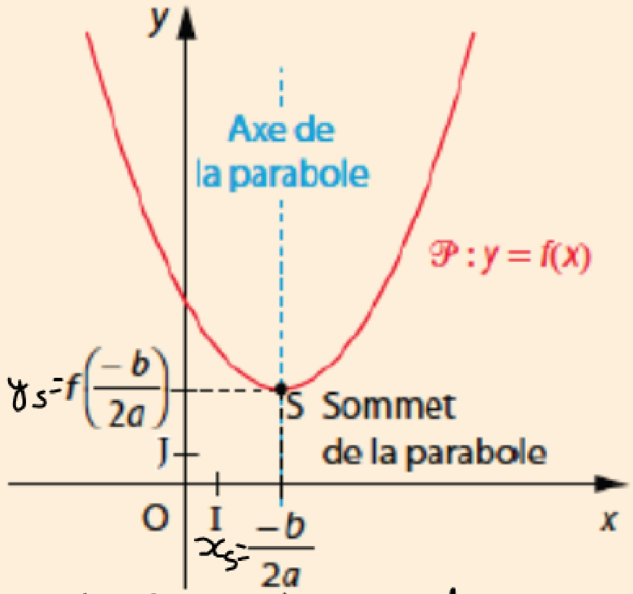


tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad -\frac{b}{2a} \qquad$ $+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\searrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ $\nearrow$

Si $a < 0$

$\mathcal{P}$ est « orientée vers le bas »

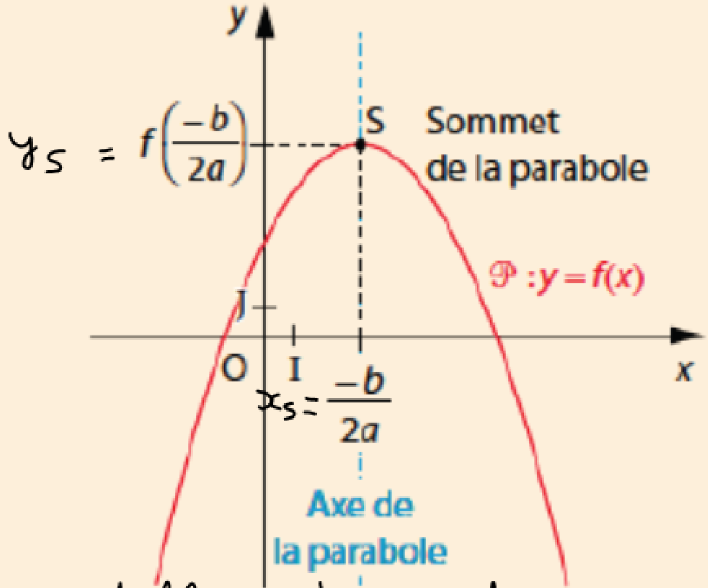


tableau de variation

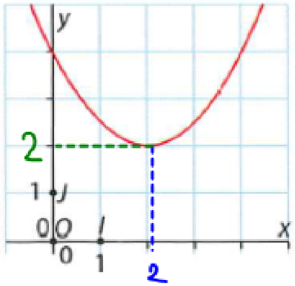
x	$-\infty$ $\qquad -\frac{b}{2a} \qquad$ $+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\nearrow$ $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ $\searrow$

Application : page 126

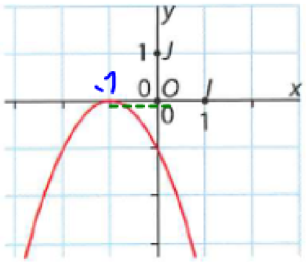
5 Chacun des tracés suivants est celui de la parabole représentative d'une fonction polynôme f de degré 2, définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.

Pour chacun des cas, préciser le signe de a et dresser le tableau de variation de f.

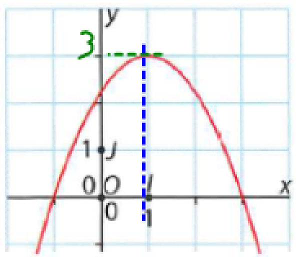
a)



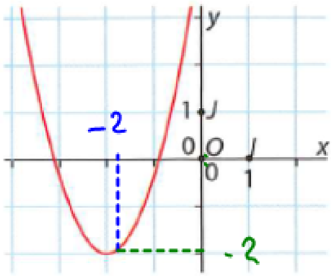
b)



c)



d)



a) $a > 0$ car P est tournée vers le haut

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↘	2	↗

b) $a < 0$ car la parabole est tou

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↘

c) $a < 0$ car la parabole est tournée

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	↗	3	↘

d) $a > 0$ car P · tournée vers le haut

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	-2	↗

8 Chacun des tableaux de variation suivants est celui d'une fonction polynôme f de degré 2, définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.

Pour chacun des cas, préciser le signe de a et tracer à main levée une parabole possible qui pourrait être représentative de f.

a)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	↗	0	↘

b)

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	↘	-1	↗

c)

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	↘	1	↗

d)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$	↗	-3	↘

8 Chacun des tableaux de variation suivants est celui d'une fonction polynôme f de degré 2, définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.
Pour chacun des cas, préciser le signe de a et tracer à main levée une parabole possible qui pourrait être représentative de f.

a)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

b)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	

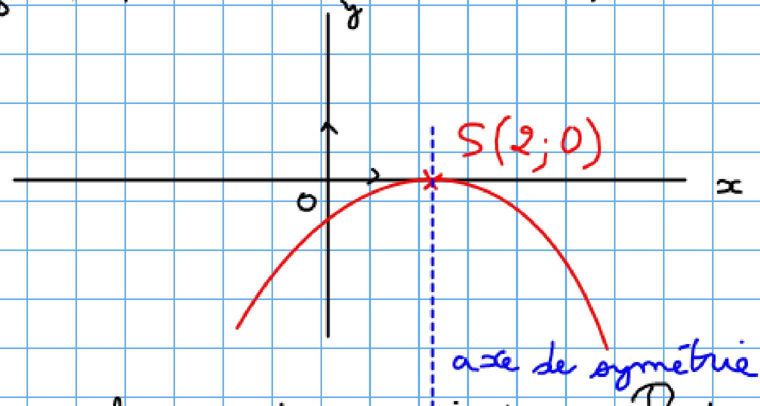
c)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		↘	1	↗	

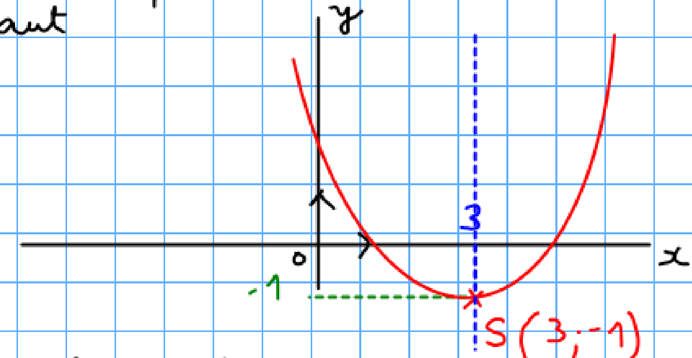
d)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↗	-3	↘	

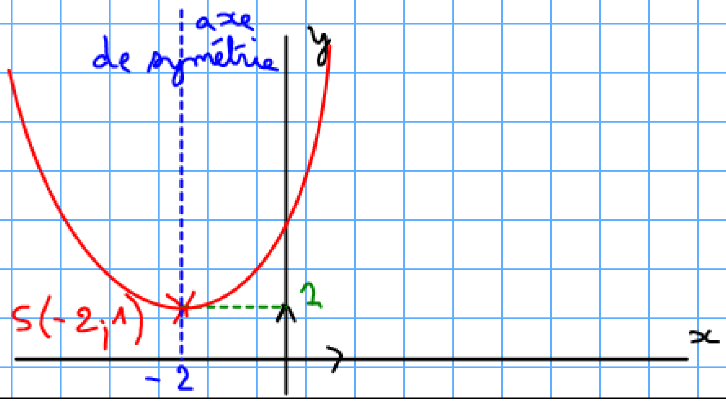
a) $a < 0$ car f présente un maximum ; $\mathcal{P}$ est tournée vers le bas



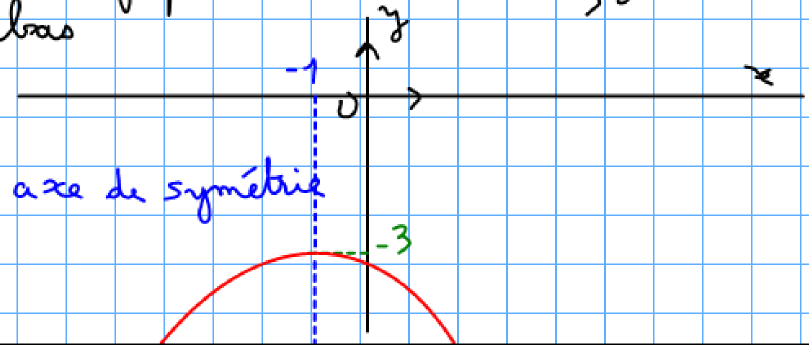
b) $a > 0$ car f présente un minimum ; $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut



c) $a > 0$ car f présente un minimum ; $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut

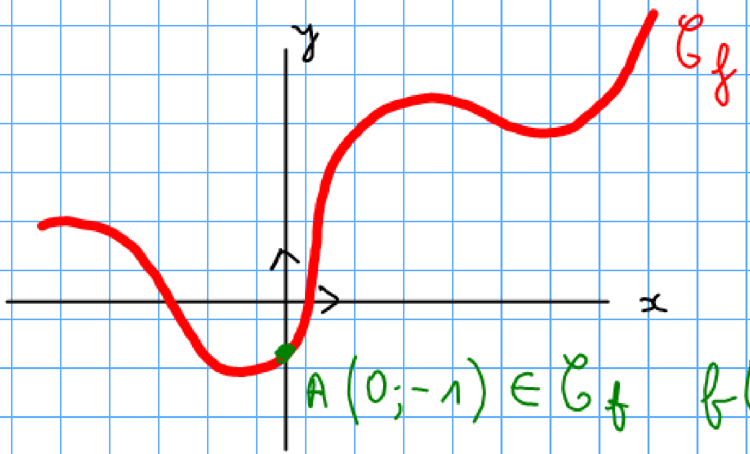


d) $a < 0$ car f présente un maximum ; $\mathcal{P}$ est tournée vers le bas



Remarque : Ordonnée à l'origine

On appelle ordonnée à l'origine, l'ordonnée du point d'intersection d'une courbe avec l'axe des ordonnées.



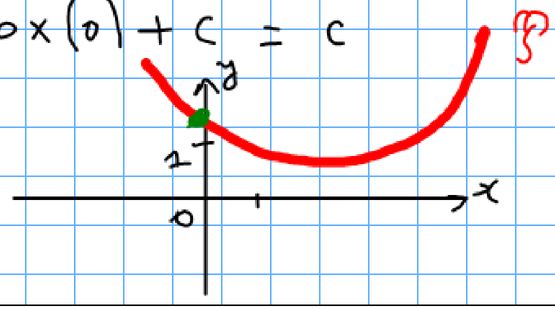
graphiquement, l'ordonnée à l'origine est égale à -1 et correspond à $f(0)$.

ordonnée à l'origine d'une fonction du second degré :

Soit f une fonction du second degré définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$

on a alors $f(0) = a \times (0)^2 + b \times (0) + c = c$

$f(0) = c$



$a > 0$ car $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut

$c = 1{,}5$

3) Forme canonique

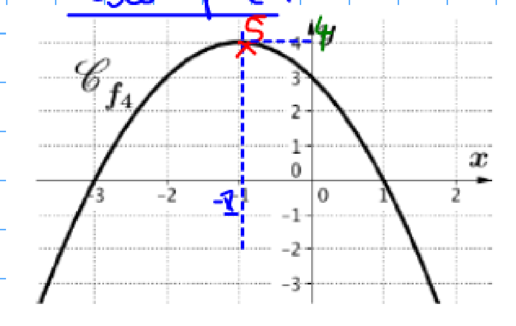
Propriété et définition : Pour toute fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, on peut trouver deux nombres réels α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Cette expression est appelée forme canonique de f et on a :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha ; \beta)$

Exemple :



Les coordonnées du sommet sont $S(-1 ; 4)$ donc $\alpha = -1$
$\beta = 4$

$$f(x) = a(x-(-1))^2 + 4$$
$$= a(x+1)^2 + 4$$

Déterminons la valeur de a

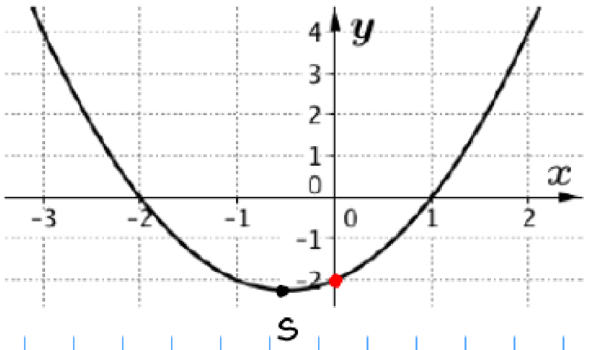
Par lecture graphique, on sait que $f(1) = 0$ or $f(1) = a \times (1+1)^2 + 4$
$= a \times 2^2 + 4$
$= 4a + 4$

donc $4a + 4 = 0 \iff 4a = -4 \iff \frac{4a}{4} = \frac{-4}{4}$
$\iff a = -1$

Exercice 2.4 **Who's who ?**

Laquelle des trois fonctions suivantes est représentée ci-dessous ? Pourquoi ?

$f(x) = -x^2 + x - 2$ $\qquad g(x) = x^2 + x + 1$ $\qquad h(x) = x^2 + x - 2$



La parabole est tournée vers le haut donc $a > 0$

Les antécédents de 0 sont -2 et 1

L'ordonnée à l'origine est -2 donc $c = -2$

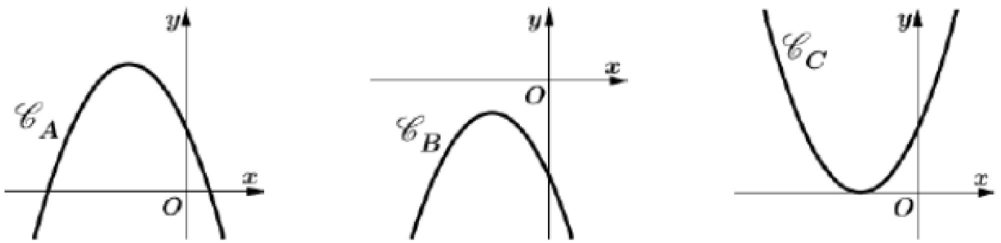
- proposition 1 : $a < 0$ donc ne convient pas
- proposition 2 : $c = 1$ donc ne convient pas
- proposition 3 : $a > 0$ $c = -2$ vérifions que $h(-2) = 0$ et que $h(1) = 0$

$h(-2) = (-2)^2 + (-2) - 2$
$= 4 - 2 - 2 = 0$

$h(1) = (1)^2 + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$

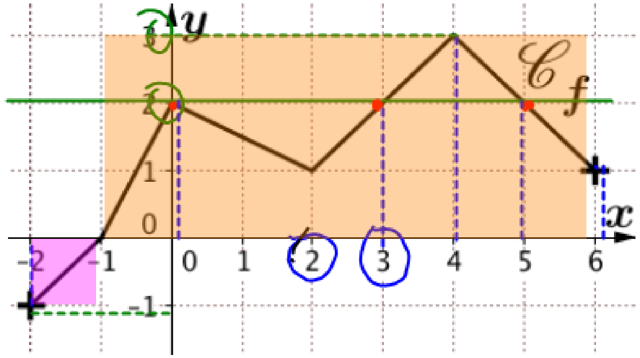
Exercice 2.7 **Who's who ?**

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 - 2x + 1$.
Laquelle des trois courbes ci-dessous représente la fonction f ? Pourquoi ?



Exercice 2.1 **Rappels Seconde - Fonctions**

1. Par lecture graphique, déterminer :
   (a) l'ensemble de définition de f ;
   (b) l'image de 4 par f ;
   (c) l'image de -2 par f ;
   (d) le(s) antécédent(s) de 2 par f ;
   (e) le(s) antécédent(s) de 3 par f ;
   (f) l'ordonnée à l'origine de f ;
   (g) le tableau de signe de f ;
   (h) les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.



2. Résoudre l'équation $4 - 8x = 0$.

a) $D_f = [-2 ; 6]$

b) $f(4) = 3$ c) $f(-2) = -1$

d) Les antécédents de 2 par f sont 0 ; 3 ; 5

e) l'unique antécédent de 3 par f est 3.

f) L'ordonnée à l'origine de f est 2 car $f(0) = 2$

g) $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en $x = -1$

x	-2		-1		6
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$\mathscr{C}_f$ est en dessous de l'axe des abscisses

$\mathscr{C}_f$ est au dessus de l'axe des abscisses

Exercice 2.1 **Rappels Seconde - Fonctions**

1. Par lecture graphique, déterminer :

   (a) l'ensemble de définition de f ;

   (b) l'image de 4 par f ;

   (c) l'image de -2 par f ;

   (d) le(s) antécédent(s) de 2 par f ;

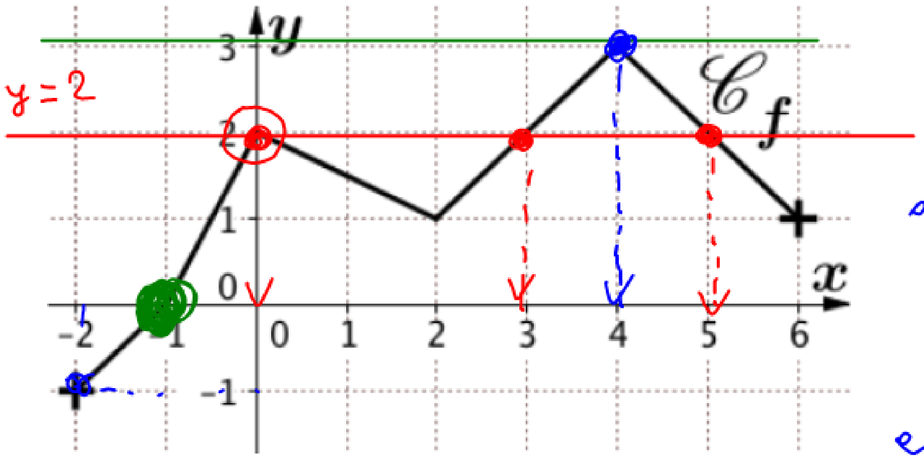
   (e) le(s) antécédent(s) de 3 par f ;

   (f) l'ordonnée à l'origine de f ;

   (g) le tableau de signe de f ;

   (h) les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$.

2. Résoudre l'équation $4 - 8x = 0$.



a) $\mathcal{D}_f = [-2 ; 6]$

b) $f(4) = 3$

c) $f(-2) = -1$

d) Les antécédents de 2 par f sont $0 ; 3 ; 5$

e) L'antécédent de 3 par f est 4.

f) $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en $y = 2$ donc l'ordonnée à l'origine est 2. et on a $f(0) = 2$

g)

x	-2		-1		6
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Exercice 2.3 **Second degré - Lectures graphiques**

On a tracé ci-dessous quatre fonctions du second degré. Pour chacune d'entre elle, déterminer :

- L'ordonnée à l'origine.
- Le signe du coefficient a.
- Les antécédents de 0 par cette fonction (s'ils existent).