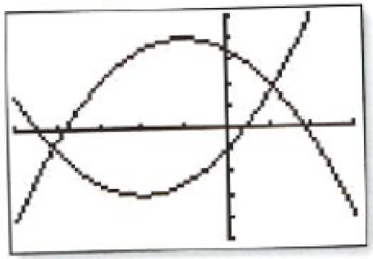
64 Polynômes du second degré

Les fonctions f et g sont définies sur $[-5\,;3]$ par :
$f(x)=0{,}5x^2+2x-1$
$g(x)=-0{,}5x^2-x+3{,}5$.
On a obtenu à la calculatrice les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



1 **a.** Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$.
b. Calculer $g'(x)$, puis $g''(x)$.
2 Démontrer la convexité de ces fonctions.

1) f et g sont continues et dérivables deux fois sur $I=[-5;3]$ car ce sont des fonctions polynôme.

Pour tout $x\in[-5;3]$

$f'(x)=x+2 \quad f''(x)=1>0$

$g'(x)=-x-1 \quad g''(x)=-1<0$

2) La convexité d'une fonction dépend du signe de sa dérivée seconde. Il en résulte que f est convexe sur I, g est concave sur I

1. Posons $I=[-3;3]$

f est continue et deux fois dérivable sur I car c'est une fonction polynôme.

Pour tout $x\in I$ on a : $f'(x)=3x^2-3$

2. $f''(x)=0$

$\iff 6x=0$

$\iff \dfrac{\cancel{6}x}{\cancel{6}}=\dfrac{0}{6}$

$\iff x=0$

$f''(x)=6x$

x	-3		0		3
$f''(x)=6x$		$-$	0	$+$	

3. f'' s'annule en changeant de signe pour $x=0$: ceci se traduit graphiquement par un p^t d'inflexion

69 Position d'une tangente

Soit la fonction f définie sur $[\,1\,;5\,]$ par :

$$f(x)=x^3-6x^2+11x-8.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1 Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.

2 **a.** Justifier que $d(x)=f(x)-(-x)=(x-2)^3$.

b. Étudier le signe de cette différence $d(x)$.

c. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ sur $[\,1\,;5\,]$.

3 Que représente le point d'abscisse 2 pour la courbe $\mathscr{C}$? Justifier en étudiant le signe de la dérivée seconde $f''(x)$.

1. f est continue et deux fois dérivable sur $I=[1;5]$ car c'est une fonction polynôme.
La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a a pour équation :
$y=f'(a)(x-a)+f(a)$ pour $a=2$ on a :
$\mathscr{D} : y=f'(2)(x-2)+f(2)$

Pour tout $x\in I$ $f'(x)=3x^2-12x+11$

$f'(2)=12-24+11$
$=-1$

$f(2)=8-24+22-8$
$=-2$

$\mathscr{D} : y=-1(x-2)-2$

$\mathscr{D} : y=-x$

2a. D'une part :

$f(x)-(-x)=x^3-6x^2+11x-8+x$
$=x^3-6x^2+12x-8$

D'autre part :

$(x-2)^3=(x-2)^2\times(x-2)$
$=(x^2-4x+4)(x-2)$
$=x^3-2x^2-4x^2+8x+4x-8$
$=x^3-6x^2+12x-8$

On a donc $f(x)-(-x)=(x-2)^3$

2b. $(x-2)^3=\underbrace{(x-2)^2}_{\geq 0}\times(x-2)$: du signe de $(x-2)$

x	1		2		5
$d(x)$		$-$	0	$+$	

c) | | C_f en dessous de $\mathscr{D}$ | | C_f au dessus de $\mathscr{D}$ | |

69 Position d'une tangente

Soit la fonction f définie sur $[\,1\,;5\,]$ par :

$$f(x)=x^3-6x^2+11x-8\,.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

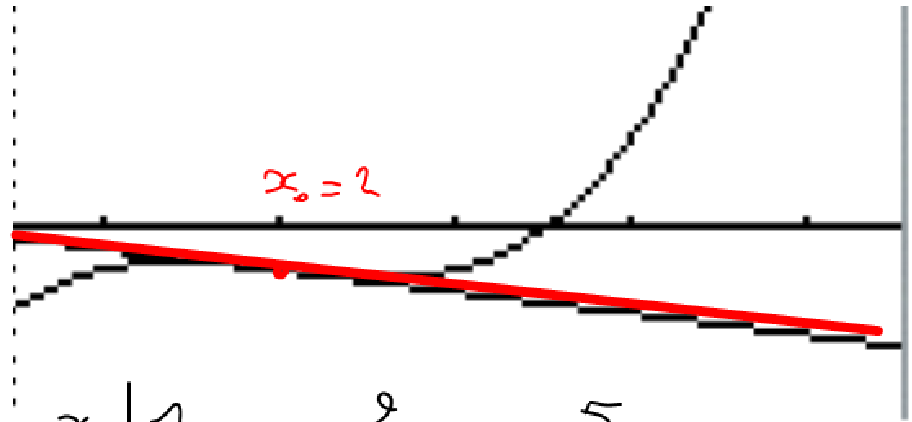
1 Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.

2 **a.** Justifier que $d(x)=f(x)-(-x)=(x-2)^3$.

b. Étudier le signe de cette différence $d(x)$.

c. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ sur $[\,1\,;5\,]$.

3 Que représente le point d'abscisse 2 pour la courbe $\mathscr{C}$? Justifier en étudiant le signe de la dérivée seconde $f''(x)$.



c) $\mathscr{C}$ est en dessous de $\mathscr{D}$ sur $[1;2]$

$\mathscr{C}$ est au dessus de $\mathscr{D}$ sur $[2;5]$

3. $\mathscr{C}$ traverse $\mathscr{D}$ en $x=2$ donc $\mathscr{C}$ présente un point d'inflexion en $x=2$.

x	1	2	5
$f''(x)$	$-$	0	$+$
convexité de f	f est concave		f est convexe

$\mathscr{C}_f$ est située sous ses tangentes

inflexion

$\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en $x=2$

$\mathscr{C}_f$ est située au dessus de ses tangentes

Pour tout $x \in I$ $f'(x)=3x^2-12x+11$

$f''(x)=6x-12=6(x-2)$: du signe de $(x-2)$.

84 Sur la courbe de la dérivée

Soit une fonction f deux fois dérivable sur $[-1\,;3]$. $\mathscr{C}'$ est la courbe de sa dérivée.

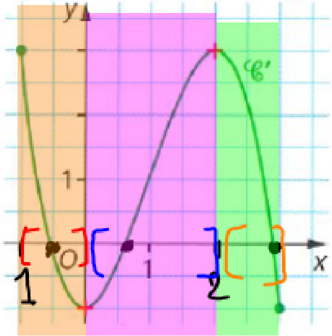
1 a. Résoudre l'équation $f'(x)=0$, avec la précision permise par le graphique.

b. Indiquer le signe de $f'(x)$.

2 a. Dresser le tableau de variations de f'.

b. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle un point d'inflexion ?

3 Pour les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ suivantes, préciser celle qui représente la fonction f et celle qui représente la dérivée seconde f'' de f, en justifiant celles qui ne conviennent pas.

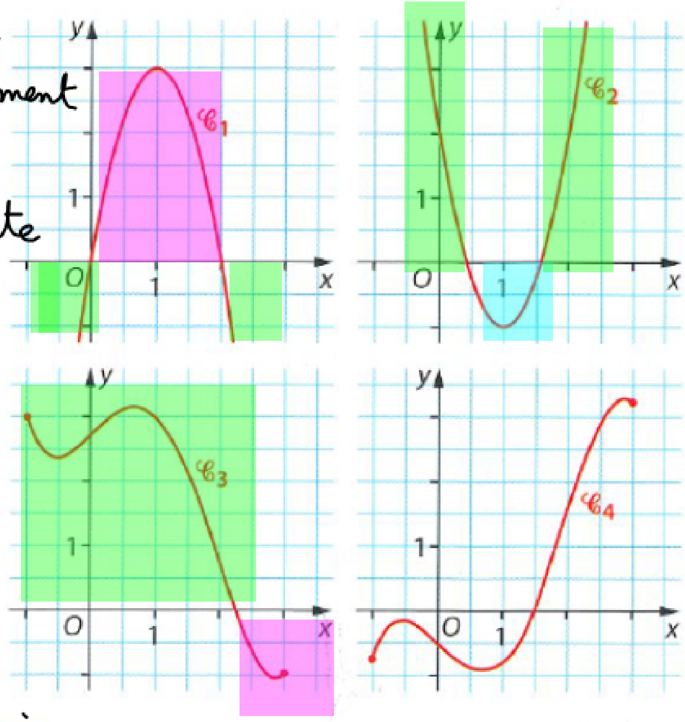


2b) Il y a un point d'inflexion si et seulement s'il y a changement de convexité.

or f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I

f est concave sur I ssi f' est décroissante sur I.

Le point d'inflexion se produit donc lorsque f' change de sens de variation.



1. a) $f'(x)=0 \iff x=-0{,}6$ ou $x=0{,}6$ ou $x=2{,}9$

b)

x	-1		$-0{,}6$		$0{,}6$		$2{,}9$		3
$f'(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

2 a)

x	-1		0		2		3
f'	3	↘	−1	↗	3	↘	−1

x	-1		$-0{,}6$		$0{,}6$		$2{,}9$		3
f		↗		↘		↗		↘	

$\longrightarrow \mathscr{C}_4$

$\mathscr{C}$ présente 2 points d'inflexion : en $x=0$ et en $x=2$.

Enzo VDC.

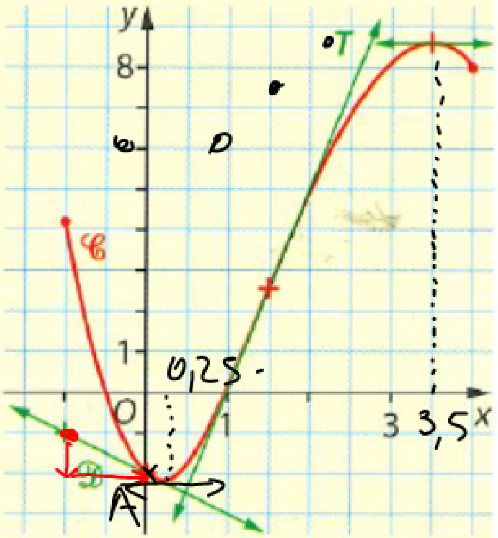
3. Dressons le tableau de signe de f'' en fonction de la convexité de f et le tableau de variations de f en fonction du signe de f'.

x	-1		0		2		3
$f''(x)$		−	0	+	0	−	

$\longrightarrow \mathscr{C}_1$.

82 QCM – Utiliser la courbe d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[-1\,;4]$ par sa courbe représentative $\mathscr{C}$.
Les tangentes à $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0 et 1,5 sont respectivement $\mathscr{D}$ et T.



Pour chaque proposition, donner la bonne réponse.

1 $f'(0)$ est égal à :
a. -2. b. -1. c. $-0{,}5$.

2 La dérivée f' s'annule en :
a. $-0{,}5$. b. 0. c. $3{,}5$.

3 Sur $[-1\,;4]$, la fonction f est :
a. convexe. b. concave. c. ni l'un ni l'autre.

4 La dérivée f' est croissante sur :
a. $[-1\,;4]$. b. $[-1\,;1{,}5]$. c. $[1{,}5\,;4]$.

1. $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la droite $\mathscr{D}$ tangente à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $x_A = 0$.

$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-1}{+1} = -1$ $\qquad f'(0) = -1$

2. f' s'annule en tout point où $\mathscr{C}_f$ présente une tangente horizontale.

3. f n'a pas une convexité fixe sur $[-1\,;4]$.
Elle est convexe sur $[-1\,;1{,}5]$
et concave sur $[1{,}5\,;4]$

4. f est convexe sur $[-1\,;1{,}5]$ donc f' est croissante sur cet intervalle.

Propriété : f' est croissante sur I ssi f est convexe sur I
ssi f'' est positive sur I

83 Vrai ou faux ? – Utiliser un tableau

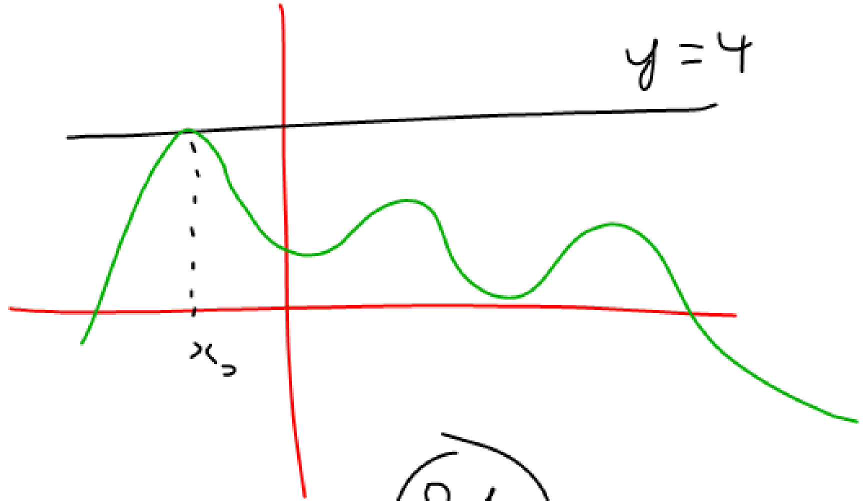
On considère une fonction f dérivable sur $[-3\,;6]$ dont on donne le tableau de variations :

x	-3		1		4	α	6
$f(x)$	3	↘	1	↗	5	0	-1

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[-3\,;6]$. VRAI
2. La droite d'équation $y = 4$ est tangente à la courbe représentative de f. FAUX.
3. Pour tout réel x de $[-3\,;4]$, $f(x) > 0$.
4. Pour tout réel x de $[-3\,;4]$, $f'(x) \geq 0$.

à terminer



+ 81 autocorrection.

2. $y = 4$ est l'équation d'une droite horizontale.

$y = 4$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ $\Leftrightarrow$ $\exists\, x_0$ tq $f(x_0) = 4$ et $f'(x_0) = 0$.

On ne peut pas savoir en revanche.

$f'(4) = 0$ et $y = 5$ est tangente horizontale.

3. Sur $[-3;4]$ f atteint son minimum de 1 en $x_0 = 1$ donc f est positive sur $[-3;4]$ VRAI
4. f n'est pas monotone sur $[-3;4]$ donc f' n'est pas de signe constant sur $[-3;4]$ FAUX

81 Raisonner et chercher à démontrer

Sur la courbe de coût total de l'exercice **73**, on remarque une tangente particulière en A.

1 a. D'après le graphique, combien y a-t-il de tangente(s) à la courbe $\mathscr{C}$ passant par l'origine ?

b. Proposer une manière de déterminer ce point A d'abscisse a.

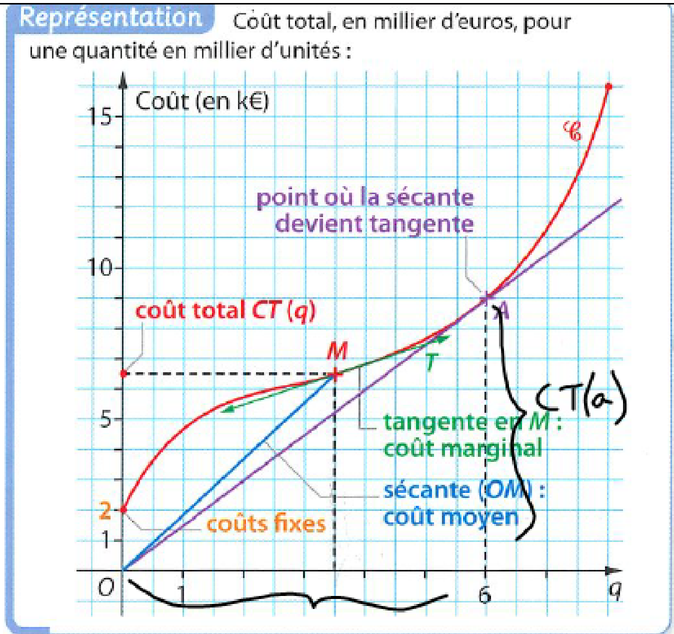
c. L'appliquer à la fonction de coût total :

$CT(q) = q^3 - 12q^2 + 48q$, pour $q \in [0;9]$.

2 Sachant que le coût moyen est $C_M(q) = \dfrac{CT(q)}{q}$, calculer la dérivée de $C_M(q)$ en fonction de q.
En déduire que le coût moyen est égal au coût marginal quand le coût moyen est minimum.

3 Démontrer que le coût marginal est minimum pour la quantité q_0, où la courbe de coût total admet un point d'inflexion.

Représentation Coût total, en millier d'euros, pour une quantité en millier d'unités :



Aide

Pour une production q, le **coût marginal** est le coefficient directeur de la **tangente** à $\mathscr{C}$ en M et le **coût moyen** est le coefficient directeur de la **sécante** (OM).

1. a) on conjecture qu'il n'existe qu'une seule tangente à $\mathscr{C}$ passant par l'origine.

b. Donnons l'équation générale d'une tangente en $A(a; f(a))$

$T : y = CT'(a)(x - a) + CT(a)$

Exprimons le fait que $O \in T$

$O(0;0) \in T$

$\Leftrightarrow 0 = CT'(a)(0 - a) + CT(a)$

$\Leftrightarrow a\,CT'(a) = CT(a)$

$\Leftrightarrow CT'(a) = \dfrac{CT(a)}{a} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

c) $CT'(a) = 3a^2 - 24a + 48$

$\dfrac{CT(a)}{a} = a^2 - 12a + 48$; $a \neq 0$

$CT'(a) = \dfrac{CT(a)}{a} \Leftrightarrow 3a^2 - 24a + \cancel{48} = a^2 - 12a + \cancel{48}$

$\Leftrightarrow 3a^2 - 24a - a^2 + 12a = 0$

$\Leftrightarrow 2a^2 - 12a = 0$

$\Leftrightarrow 2a(a - 6) = 0 \Leftrightarrow 2a = 0$ ou $a - 6 = 0$

impossible par hypothèse ou $a = 6$

2) $C_M(q) = q^2 - 12q + 48$

$C_M'(q) = 2q - 12$
$= 2(q - 6)$

$C_M'(q) = 0 \Leftrightarrow q = 6$

Le coût moyen est minimal pour $q = 6$ et pour $q = 6$ on a établi que le coût moyen $\dfrac{CT(q)}{q}$ est égal au coût marginal $CT'(q)$.

3) Le coût marginal est $CT'(q)$
il est minimum quand sa dérivée $CT''(q)$ s'annule en changeant de signe, ce qui traduit une inflexion pour la fonction CT.

67 Existence d'un point d'inflexion

On considère la fonction f définie sur $[-3\,;3]$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1\,.$$

1 Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2 Déterminer la solution x_0 de l'équation $f''(x) = 0$.
Puis étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-3\,;3]$.

3 La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?

1) f est définie, continue et deux fois dérivable sur $I = [-3;3]$ car c'est une fonction polynôme.

pour tout $x \in I$ $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f''(x) = 6x$

2) $f''(x) = 0 \iff 6x = 0 \iff \frac{\cancel{6}x}{\cancel{6}} = \frac{0}{6}$

$\iff x = 0$

x	-3	0	3
$f''(x)$	$-$ fonction concave	0	$+$ fonction convexe

3) f'' s'annule en changeant de signe pour $x = 0$
donc $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion en $x = 0$
Les coordonnées du point d'inflexion sont $A(0;1)$