

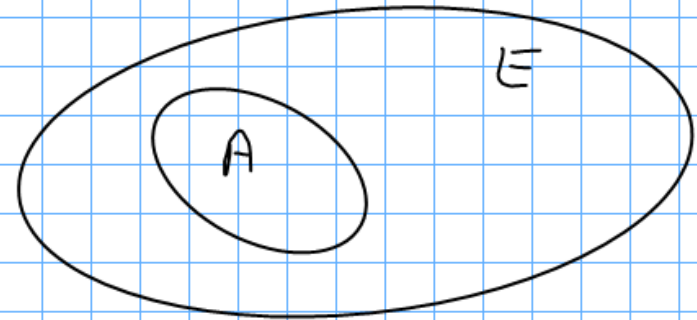
# Chapitre 1: Proportions

## I Proportions et pourcentages

### 1) Définitions

Soit  $A$  une partie d'un ensemble  $E$ .

On note  $n_A$  et  $n_E$  le nombre d'éléments respectifs de  $A$  et de  $E$



La proportion des éléments de  $A$  dans  $E$  (ou par rapport à  $E$ ) est le quotient 
$$p = \frac{n_A}{n_E}$$

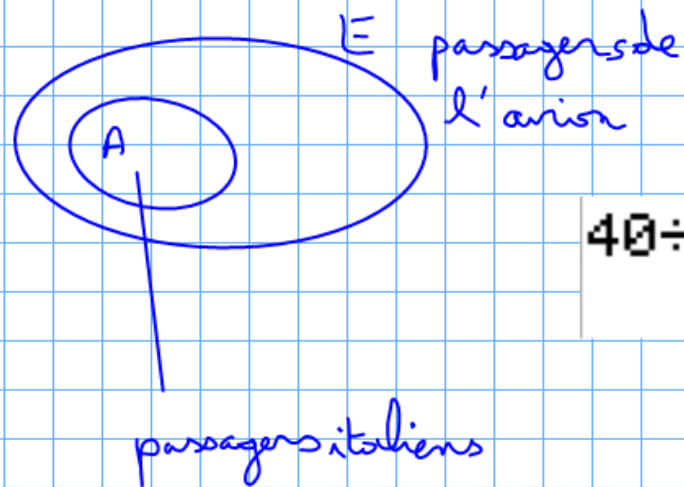
Vocabulaire :  $E$  est appelée population de référence

Exemple: 1 p35

**1** **C** Dans un groupe de 85 voyageurs débarquant d'un avion en provenance de Rome, 40 personnes sont de nationalité italienne. Calculer la proportion d'Italiens dans le groupe de voyageurs ; écrire la proportion sous forme d'une fraction, puis donner sa valeur décimale arrondie à  $10^{-3}$  près.

**CONSEIL**

Voir exercice résolu 1 page 29.



$$40 \div 85$$

$$0.4705882353$$

$$\approx 0,471 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}$$

La population de référence E est le groupe de voyageurs.  $n_E = 85$   
 La sous-population A est le groupe de personnes italiennes.  $n_A = 40$

La proportion d'italiens dans le groupe de voyageurs est :  $p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{40}{85}$

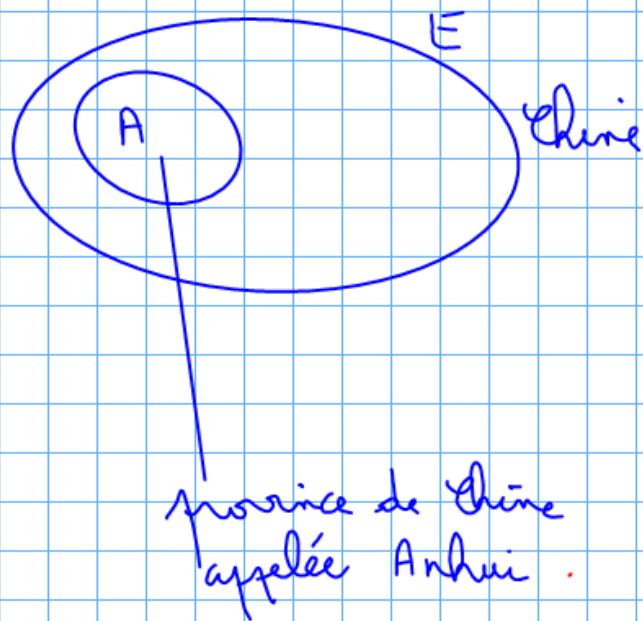
Remarque: proportion exprimée en pourcentage

$$p = \frac{47,1}{100} = 47,1\%$$

Application : n°3 p35 "pourcent" % signifie "divisé par 100"

**3** En 2010, la population de la Chine était évaluée à 1,3 milliard d'habitants, dont 65 millions habitaient la province de Anhui. Quelle proportion de la population chinoise représentait la population de la province de Anhui ?

Remarque : en 2010, la population de la France était à peu près égale à celle de la province de Anhui.



La population de référence  $E$  est la population de Chine  $n_E = 1,3$  milliards

La sous-population  $A$  est la population de la province d'Anhui  $n_A = 65$  millions

La proportion de la province d'Anhui dans la population chinoise est :

$$p = \frac{n_A}{n_E}$$

attention, il faut convertir  $n_A$  et  $n_E$  dans une même unité.

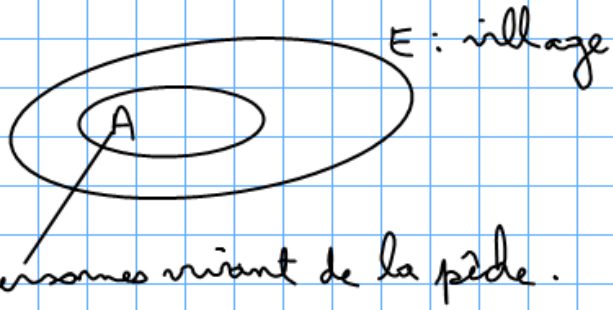
Sachant que ~~1 milliard = 1000 millions~~  
1,3 milliard  $\rightarrow \frac{1,3 \times 1000}{1}$

$$p = \frac{65}{1300} = \frac{\cancel{13} \times 5}{\cancel{13} \times 100} = 5\%$$

## 2) Calcul d'effectifs

Méthode: Pour calculer l'effectif d'une population à partir d'une proportion on utilise le produit en croix

Exemple 1: Dans un petit village portuaire, les cinq sixièmes des 720 habitants vivent de la pêche.  
Combien de personnes vivent de la pêche ?



La population de référence E est la population du village.  $n_E = 720$

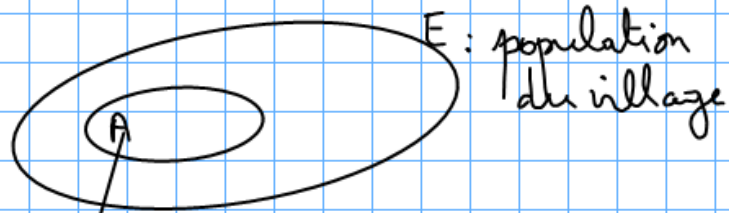
La sous-population A est la sous-population des personnes vivant de la pêche.  $n_A = ?$

La proportion d'habitants du village qui vivent de la pêche est  $p = \frac{5}{6}$

$$p = \frac{n_A}{n_E} \quad \text{donc} \quad \frac{5}{6} = \frac{n_A}{720}$$

Par produit en croix,  $n_A = \frac{5 \times 720}{6} = 600$

Exemple 2: Dans un village 697 personnes vivent de l'agriculture ce qui représente 82% de la population. Combien de personnes vivent dans ce village ?



sous-population des personnes du village vivant de l'agriculture.

La population de référence E est la population du village et  $n_E = ?$

La sous-population A est la sous-population des personnes vivant de l'agriculture et  $n_A = 697$

La proportion d'habitants du village vivant de l'agriculture est  $p = \frac{82\%}{100} = \frac{82}{100}$

$$p = \frac{n_A}{n_E} \quad \text{donc} \quad \frac{82}{100} = \frac{697}{n_E}$$

Par produit en croix on a:

$$n_E = \frac{697 \times 100}{82} = 850$$

remarque:  $\frac{0,82}{1} = \frac{697}{n_E}$

$$n_E = \frac{697 \times 1}{0,82} = 850$$

## Applications

### Application 1 (VOIR EXERCICE RÉSOLU 1)

Sur les 15 joueurs d'une équipe de rugby jouant un samedi, 4 ont moins de 20 ans. Calculer la proportion de joueurs de l'équipe qui ont moins de 20 ans ; donner la valeur décimale arrondie à  $10^{-2}$  près du résultat.

La population de référence E est l'équipe de rugby et  $n_E = 15$ .

La sous-population A est la sous-population des joueurs de moins de 20 ans.

$$n_A = 4$$

La proportion de joueurs de l'équipe de moins de 20 ans est  $p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{4}{15} \approx 0,27$

### Application 2 (VOIR EXERCICE RÉSOLU 2)

Un club de football compte 36 joueurs « débutants ». Calculer le nombre total de joueurs du club, sachant que les « débutants » représentent 28,8 % de l'effectif total.

La population de référence E est le club de football et  $n_E = ?$

La sous-population A est le groupe de débutants et  $n_A = 36$

La proportions de débutants dans le club est  $p = 28,8\% = \frac{28,8}{100}$

$$p = \frac{n_A}{n_E} \text{ donc } \frac{28,8}{100} = \frac{36}{n_E}$$

Par produit en croix  $n_E = \frac{36 \times 100}{28,8} = 125$



### 3) Proportions échelonnées

A, B et E sont 3 populations telles que :

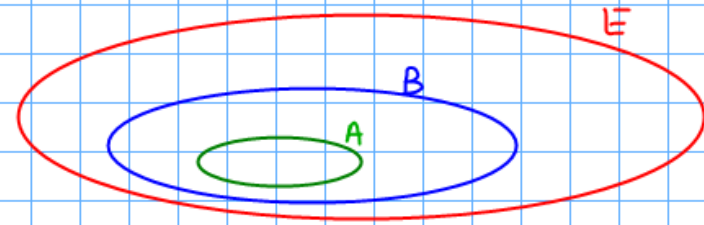
ACB et BCE ; on a donc ACBE

« A est inclus dans B »

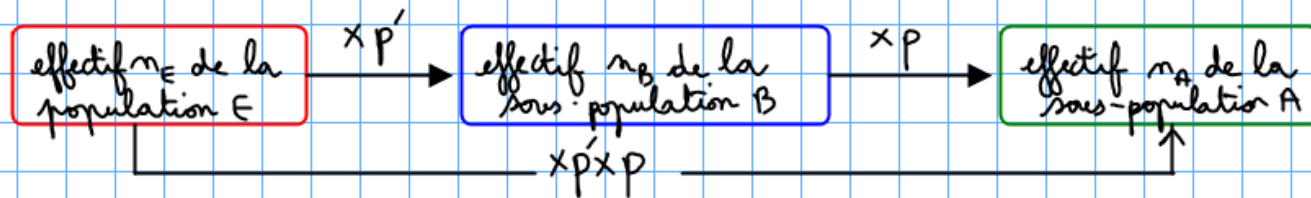
- A est une sous-population de B
- B est une sous-population de E.

On note  $p$  la proportion de A dans B et  $p'$  la proportion de B dans E

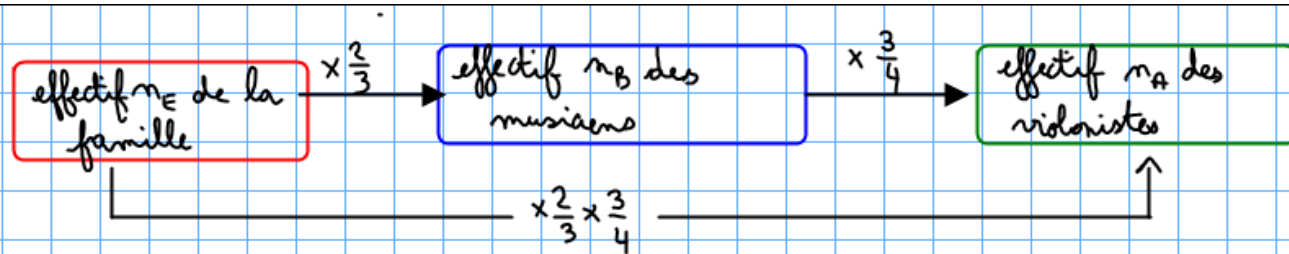
Propriété : La proportion de A dans E est  $P = p \times p'$



### Illustration:



Exemple : Dans une famille  $\frac{2}{3}$  des membres sont musiciens, et parmi les musiciens les  $\frac{3}{4}$  jouent du violon.  
Quelle est la proportion de violonistes dans cette famille ?



$$P = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{2 \times 1}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

La proportion de violonistes dans cette famille est  $P = \frac{1}{2} = 50\%$

## Application

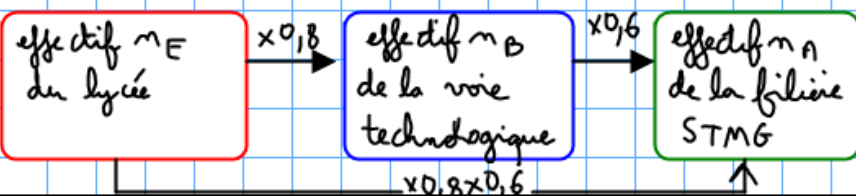
### Application (VOIR EXERCICE RÉSOLU 4)

Un lycée polyvalent comporte des sections d'enseignement technologique (STMG, ...) et des sections d'enseignement général (L, S, ...).

1. La proportion d'élèves de la section STMG parmi les élèves de l'enseignement technologique est égale à 0,6.

La proportion d'élèves de l'enseignement technologique parmi les élèves du lycée est égale à 0,8.

Calculer la proportion d'élèves du lycée qui sont en STMG.



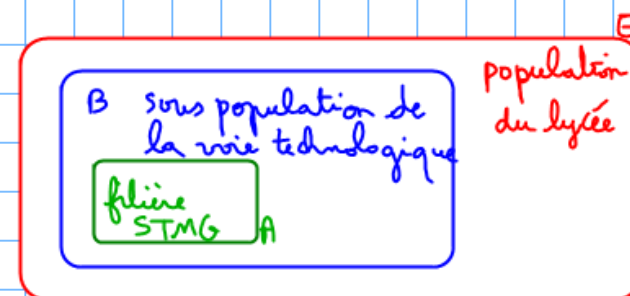
### MÉTHODE

Dans une situation de deux inclusions successives, pour calculer une proportion connaissant les deux autres :

1. On détermine de façon précise les trois populations concernées  $A$ ,  $B$  et  $E$ , telles que  $A$  soit une sous-population de  $B$  et  $B$  soit une sous-population de  $E$ .

2. On calcule la proportion recherchée en utilisant l'égalité  $P = pp'$ , où  $p$  est la proportion de  $A$  dans  $B$ ,  $p'$  celle de  $B$  dans  $E$  et  $P$  celle de  $A$  dans  $E$ .

Traduisons l'énoncé par un schéma :



Les populations  $A$ ,  $B$ ,  $E$  étant identifiées telles que  $A \subset B \subset E$  on peut réaliser

le schéma en reportant les données :



La proportion d'élèves de la filière STMG parmi l'ensemble des élèves du lycée est  $P = 0,8 \times 0,6 = 0,48$  soit 48%

2. Ce lycée a une équipe de natation synchronisée (pratiquée exclusivement par des filles).

La proportion des pratiquantes de natation synchronisée parmi les filles qui font du sport au lycée est égale à 15 %.

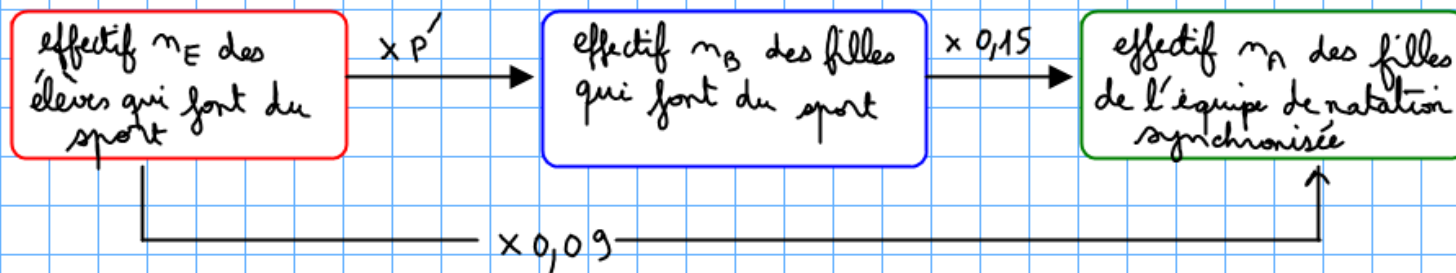
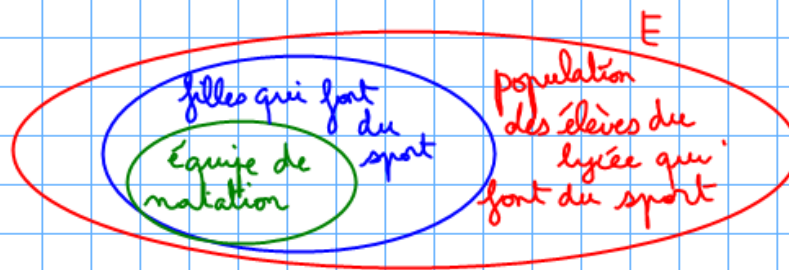
La proportion des pratiquantes de natation synchronisée parmi les élèves (garçons et filles) qui font du sport au lycée est égale à 9 %.

Quelle est la proportion de filles parmi les élèves qui font du sport au lycée ?

→ VOIR EXERCICES 22 À 28, P. 37

Pour dresser le schéma ci-dessous on se sert du graphique précédent puis on reporte les proportions citées entre les blocs de couleur

On identifie les populations A, B et E telles que  $A \subset B \subset E$  à l'aide d'un schéma.



On a  $P' \times 0,15 = 0,09$

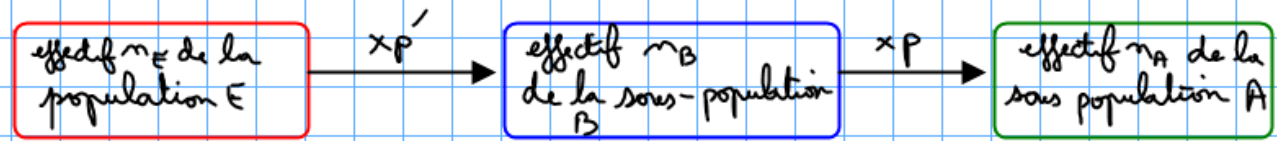
$$\frac{P' \times 0,15}{0,15} = \frac{0,09}{0,15}$$

en divisant membre à membre par 0,15 on obtient :

d'où  $P' = \frac{0,09}{0,15} = 0,6 = 60\%$

Les filles représentent 60% des élèves du lycée qui font du sport.

Démonstration de la propriété:



$\frac{p'}{1} = \frac{n_B}{n_E}$  par produit en croix on a  $n_B = \frac{p' \times n_E}{1} = p' \times n_E$  (\*)

$\frac{p}{1} = \frac{n_A}{n_B}$  par produit en croix on a  $n_A = \frac{n_B \times p}{1} = n_B \times p$

on a donc  $n_A = p' \times n_E \times p$

or  $P = \frac{n_A}{n_E}$  donc  $P = \frac{p' \times n_E \times p}{n_E} = p' \times p$

## II Proportions, réunion et intersection

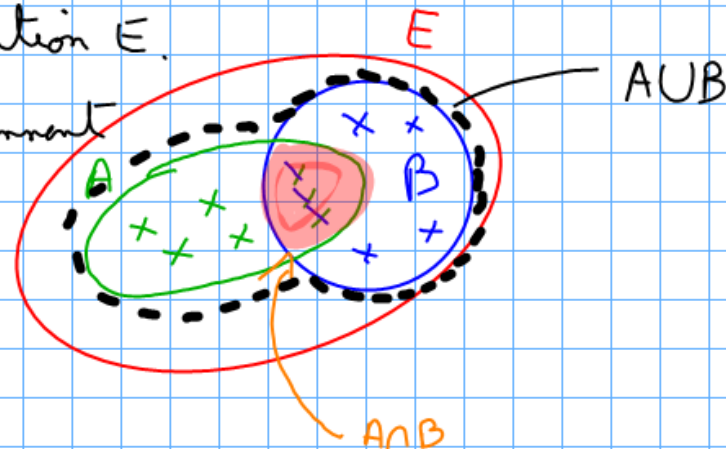
### 1) Définitions

On considère 2 sous-populations A et B d'une même population E.

- $A \cap B$  est la sous-population des individus qui appartiennent à la sous-population A et à la sous-population B.

$A \cap B$  est l'intersection de A et de B

↑ « A inter B »



- $A \cup B$  est la sous-population des individus qui appartiennent à la sous-population A ou à la sous-population B, c'est à dire qui appartiennent à l'une au moins des deux sous-populations.

$A \cup B$  est la réunion de A et de B.

↑ « A union B »

Remarque: En mathématiques, « ET » correspond toujours à « les deux »  
« OU » correspond toujours à « l'un, l'autre ou les deux »

notations: on note  $n_A, n_B, n_{A \cup B}, n_{A \cap B}$  les effectifs

et  $p_A, p_B, p_{A \cup B}, p_{A \cap B}$  les proportions des sous-populations  $A, B, A \cup B, A \cap B$  dans la population  $E$ .

Propriété:

$$n_{A \cup B} = n_A + n_B - n_{A \cap B}$$

$$p_{A \cup B} = p_A + p_B - p_{A \cap B}$$

Exemple: À la suite de plaintes de consommateurs, un fabricant d'appareils ménagers inspecte les 500 derniers appareils sortis d'usine. Il constate que 25 ont un défaut A, 19 ont un défaut B, 12 ont un défaut C. Parmi les appareils défectueux 5 ont à la fois le défaut A et le défaut B, les autres n'ont qu'un seul défaut.

1. Déterminer la proportion d'appareils inspectés ayant le défaut A ou le défaut B.
2. Déterminer la proportion d'appareils inspectés ayant le défaut B ou le défaut C.

Solution: Compréhension de l'énoncé:

Soit  $E$  la population des appareils inspectés.  $n_E = 500$

Soit  $A, B, C$  les sous-populations des appareils présentant respectivement les défauts  $A, B, C$

on a :  $n_A = 25$ ;  $n_B = 19$ ;  $n_C = 12$ .

$A \cap B$ : sous-population des appareils présentant le défaut  $A$  **et** le défaut  $B$ .  $n_{A \cap B} = 5$

$A \cup B$ : sous-population des appareils présentant le défaut  $A$  **ou** le défaut  $B$   $n_{A \cup B} = ?$

$B \cap C$ : sous-population des appareils présentant les défauts  $B$  **et**  $C$   $n_{B \cap C} = 0$

$A \cap C$ : sous-population des appareils présentant le défaut  $A$  **et** le défaut  $C$   $n_{A \cap C} = 0$

1) Déterminons  $P_{A \cup B}$  On a  $P_{A \cup B} = P_A + P_B - P_{A \cap B}$

2) Déterminons  $P_{B \cup C}$  
$$= \frac{n_A}{n_E} + \frac{n_B}{n_E} - \frac{n_{A \cap B}}{n_E} = \frac{25}{500} + \frac{19}{500} - \frac{5}{500} = \frac{25 + 19 - 5}{500}$$

On a  $P_{B \cup C} = P_B + P_C - P_{B \cap C}$   
$$= \frac{n_B}{n_E} + \frac{n_C}{n_E} - \frac{n_{B \cap C}}{n_E} = \frac{19}{500} + \frac{12}{500} - \frac{0}{500} = \frac{31}{500} = 6,2\%$$
  
$$= \frac{39}{500} = \frac{78}{1000} = \frac{7,8}{100} = 7,8\%$$

Remarque:  $B \cap C = \emptyset$   
Ensemble vide

Les sous-populations  $B$  et  $C$  sont dites **disjointes**  $\textcircled{B}$   $\textcircled{C}$

**Application** (VOIR EXERCICE RÉSOLU 3)

1. Un club sportif propose plusieurs activités, entre autres le judo et le yoga. Parmi les 90 membres du club, 25 pratiquent le judo, 31 pratiquent le yoga et 7 pratiquent les deux. Calculer la proportion des membres du club qui pratiquent le judo ou le yoga.

2. Dans ce même club, 10 membres pratiquent le tir à l'arc, mais ne pratiquent pas le judo. Calculer la proportion des membres du club qui pratiquent le judo ou le tir à l'arc.

→ VOIR EXERCICES 16 À 21, P. 36

Soit  $E$  la population des membres du club,  $n_E = 90$   
 $J$ : sous-population des membres pratiquant le judo  $n_J = 25$

$Y$ : sous-population des membres pratiquant le YOGA  $n_Y = 31$

$J \cap Y$ : sous-population des membres pratiquant le judo **et** le yoga  $n_{J \cap Y} = 7$

1) Déterminons  $P_{J \cup Y}$ :

$$P_{J \cup Y} = P_J + P_Y - P_{J \cap Y}$$
$$= \frac{n_J}{n_E} + \frac{n_Y}{n_E} - \frac{n_{J \cap Y}}{n_E}$$

$$= \frac{25}{90} + \frac{31}{90} - \frac{7}{90} = \frac{25 + 31 - 7}{90} = \frac{49}{90} = 54,44\%$$

2) Soit  $A$ : sous-population des membres pratiquant le tir à l'arc  $n_A = 10$

$A \cap J$ : sous-population des membres pratiquant le tir à l'arc **et** le judo  $n_{A \cap J} = 0$

Les sous-populations  $A$  et  $J$  sont **disjointes**

$$P_{J \cup A} = P_J + P_A - P_{J \cap A}$$
$$= \frac{25}{90} + \frac{10}{90} - \frac{0}{90} = \frac{35}{90} = \frac{7}{18}$$