17 À l'occasion d'une journée « portes ouvertes », un club de ski proposait une initiation au ski de fond ou bien une initiation à la marche à raquettes : il était impossible de participer aux deux initiations. Le bilan fait apparaître ~~que 35 % des visiteurs se sont initiés au ski de fond~~ ~~et 50 % se sont initiés à la marche à raquettes~~.

Calculer ~~la proportion des visiteurs qui se sont initiés au ski de fond ou à la marche à raquettes~~.

union

Populations disjointes

Soit E la population des visiteurs

Soit F la sous-population des personnes pratiquant le ski de fond

Soit R la sous-population des visiteurs pratiquant la raquette.

$F \cap R = \emptyset$ donc $P_{F \cap R} = 0$

$P_F = 35\% = \frac{35}{100} = 0{,}35$

$P_R = \frac{50}{100} = 0{,}5$

Déterminons

$P_{F \cup R} = P_F + P_R - P_{F \cap R}$

$= 0{,}35 + 0{,}50 - 0$

$= 0.85$

19 A et B désignent deux sous-populations d'une population E, telles que les proportions de A, B et $A \cup B$ dans E sont respectivement égales à 0,14, 0,09 et 0,16.

Calculer la proportion de $A \cap B$ dans E ; les populations A et B sont-elles disjointes ?

LE SAVIEZ-VOUS ?

Pour vérifier que deux sous-populations A et B ne sont pas disjointes, il suffit de vérifier que $p_{A \cup B} \neq p_A + p_B$.

En effet, la proposition « Si A et B sont disjointes, alors $p_{A \cup B} = p_A + p_B$ » équivaut à sa **contraposée** « Si $p_{A \cup B} \neq p_A + p_B$, alors A et B ne sont pas disjointes ».

→ *Voir Lexique p. 209.*

17 À l'occasion d'une journée « portes ouvertes », un club de ski proposait une initiation au ski de fond ou bien une initiation à la marche à raquettes : il était ~~impossible de participer aux deux initiations~~. Le bilan fait apparaître que 35 % des visiteurs se sont initiés au ski de fond et 50 % se sont initiés à la marche à raquettes.

Calculer la proportion des visiteurs qui se sont initiés au ski de fond ou à la marche à raquettes.

E : population des personnes participant aux portes ouvertes.

A : sous-population des personnes pratiquant la raquette $P_A = 0{,}50$

B : sous-population des personnes pratiquant le ski de fond $P_B = 0{,}35$

$A \cap B$: sous-population des personnes qui pratiquent les 2 activités $A \cap B = \emptyset$

$$P_{A \cup B} = P_A + P_B - P_{A \cap B}$$
$$= 0{,}50 + 0{,}35 - 0$$
$$= 0{,}85$$

19 p 36 à faire à la maison

16 **C** Au cours de l'assemblée générale du foyer socio-éducatif d'un lycée, les membres sont appelés à voter à bulletins secrets le rapport moral et le rapport financier présentés par le bureau.
Le dépouillement a permis d'établir que :
- 64,8 % des membres ont voté en faveur du rapport moral ;
- 79,3 % ont voté en faveur du rapport financier ;
- de plus, 62,8 % ont voté en faveur des deux rapports.

Calculer la proportion des membres ayant voté en faveur du rapport moral ou en faveur du rapport financier.

CONSEIL
Voir exercice résolu 3 page 31.

E : population des membres du foyer socio éducatif

A : sous-population des membres ayant voté en faveur du rapport moral.

p_A : proportion de A dans E $\quad p_A = 64,8\%$

B : sous-population des membres ayant voté en faveur du rapport financier.

p_B : proportion de B dans E $\quad p_B = 79,3\%$

$A \cap B$: sous-population des membres ayant voté pour les 2 rapports $\quad p_{A\cap B} = 62,8\%$

$A \cup B$: sous-population des membres ayant voté pour au moins un des deux rapports $\quad p_{A\cup B} = ?$

$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B} = 64,8\% + 79,3\% - 62,8\% = 81,3\%$

La proportion de membres ayant voté pour le rapport moral ou le rapport financier est de 81,3%

18 **C** A et B désignent deux sous-populations d'une population E, telles que les proportions de A, B et $A \cup B$ dans E sont respectivement égales à 0,42, 0,23 et 0,65.
Calculer la proportion de $A \cap B$ dans E ; les populations A et B sont-elles disjointes ?

CONSEIL
Calculer $p_{A\cap B}$ à partir de l'égalité $p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$, puis en déduire $n_{A\cap B}$.

$p_A = 0,42 \qquad p_B = 0,23 \qquad p_{A\cup B} = 0,65$

$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$

$0,65 = \underbrace{0,42 + 0,23} - p_{A\cap B}$

$0,65 = 0,65 - p_{A\cup B}$ donc $p_{A\cap B} = 0$ on en déduit que $A\cap B = \emptyset$: A et B sont disjointes

19 A et B désignent deux sous-populations d'une population E, telles que les proportions de A, B et $A \cup B$ dans E sont respectivement égales à 0,14, 0,09 et 0,16.
Calculer la proportion de $A \cap B$ dans E ; les populations A et B sont-elles disjointes ?

LE SAVIEZ-VOUS ?

Pour vérifier que deux sous-populations A et B ne sont pas disjointes, il suffit de vérifier que $p_{A \cup B} \neq p_A + p_B$.
En effet, la proposition « Si A et B sont disjointes, alors $p_{A \cup B} = p_A + p_B$ » équivaut à sa **contraposée**
« Si $p_{A \cup B} \neq p_A + p_B$, alors A et B ne sont pas disjointes ».
→ *Voir Lexique p. 209.*

$p_{A\cup B} = \underbrace{p_A + p_B} - p_{A\cap B}$

si $p_{A\cup B} = p_A + p_B$ cela veut dire que $p_{A\cap B} = 0$ et donc que $A\cap B = \emptyset$: A et B sont disjointes

D'une part :

$p_A + p_B = 0,14 + 0,09$
$= 0,23$

D'autre part :

$p_{A\cup B} = 0,16$

$p_{A\cup B} \neq p_A + p_B$ donc A et B ne sont pas disjointes

$p_{A\cap B} = p_A + p_B - p_{A\cup B}$
$= 0,23 - 0,16 = 0,07$

20 Dans un congrès international, 87 % des participants comprennent l'anglais ou le français. En particulier, 82 % des participants comprennent l'anglais et 72 % des participants comprennent le français.
Calculer la proportion des participants qui comprennent l'anglais et le français.

$p_{A\cup B} = p_A + p_B - p_{A\cap B}$
$0,87 = 0,82 + 0,72 - p_{A\cap B}$
$0,87 = 1,54 \quad - p_{A\cap B}$
$+ p_{A\cap B} = 1,54 - 0,87 = 0,67$

$p_{A\cap B} = 0,67$

E : population des participants
A : sous-population des participants comprenant l'anglais $p_A = 0,82$
B : sous-population des participants comprenant le français $p_B = 0,72$
$A\cap B$: sous population des participants qui comprennent l'anglais et le français $p_{A\cap B} = ?$
$A\cup B$: sous-population des participants qui comprennent l'anglais ou le français. $p_{A\cup B} = 0,87$

__Remarque :__ on a aussi $\boxed{p_{A\cap B} = p_A + p_B - p_{A\cup B}}$

21 Un examen est composé d'une épreuve pratique et d'une épreuve théorique. Pour réussir l'examen, il faut réussir chacune des deux épreuves.

Cette année, la proportion de candidats ayant réussi l'épreuve pratique est égale à 0,9, la proportion de candidats ayant réussi l'épreuve théorique est égale à 0,8 et la proportion de candidats ayant réussi au moins une épreuve est égale à 0,95. Calculer la proportion de candidats ayant réussi l'examen.

CONSEIL

Noter A la population des candidats ayant réussi l'épreuve pratique, noter B la population des candidats ayant réussi l'épreuve théorique, puis définir $A \cap B$ et $A \cup B$.

E : population des candidats à l'examen

A : sous-population des candidats qui réussissent l'épreuve pratique

$p_A = 0{,}9$

B : sous-population des candidats qui réussissent l'épreuve théorique

$p_B = 0{,}8$

$A \cup B$: sous-population des candidats ayant réussi au moins une épreuve $\quad p_{A\cup B} = 0{,}95$

$A \cap B$: sous-population des candidats ayant réussi l'examen (les 2 épreuves) $\quad p_{A\cap B} = ?$

D'après les exercices précédents, on a mis en évidence que :

$$p_{A\cap B} = p_A + p_B - p_{A\cup B}$$
$$= 0{,}9 + 0{,}8 - 0{,}95$$
$$= 0{,}75$$

41 *** **BAC** Dans le réseau ferroviaire français, les trains « Grandes lignes » sont de deux types, Corail ou TGV (Train à Grande Vitesse), et l'on propose aux clients de voyager en seconde ou en première classes.

Une enquête est réalisée dans une gare de province durant la première semaine d'un mois de juillet.
Sur les 2 450 billets vendus, 82 % sont des billets de seconde classe.
Sur les 850 billets TGV vendus, 14 % sont des billets de première classe.

1. Recopier et compléter le tableau d'effectifs suivant.

	Billets Corail (C)	Billets TGV (T)	Total
Billets Seconde Classe (S)	1278	731	2009
Billets Première Classe (P)	322	119	441
Total	1600	850	2 450

2. Vérifier que la proportion des billets de première classe parmi les billets Corail vendus durant la première semaine de ce mois de juillet est 20 % (arrondi à l'unité).

3. Le directeur de la gare peut-il déduire de cette enquête qu'approximativement 34 % des billets vendus dans sa gare durant la première semaine du mois de juillet sont des billets de première classe ? Justifier.

E : population des voyageurs

C : sous-population des voyageurs en train corail

T : sous-population des voyageurs en TGV

S : sous-population des voyageurs en 2nde cl

P : sous-population des voyageurs en 1cl.

$n_E = 2450$ $\quad n_S = 82\% \times n_E$

$= 0{,}82 \times 2450 = 2009$

$2450 - 2009 = 441 = n_P$

$n_T = 850 \quad 14\%$ de $850 = \frac{14}{100} \times 850 = 119$

$= n$ ...

$2009 - 731 = 1278$

$441 - 119 = 322$

$2450 - 850 = 1278 + 322$

42 *** 120 personnes atteintes d'une maladie ont accepté de servir de cobayes pour tester l'efficacité d'un nouveau médicament.
Pendant un mois, 80 personnes ont pris le médicament, les autres ont pris un placebo.
À l'issue de l'expérimentation, on a constaté une amélioration de la santé de 60 personnes parmi celles ayant pris le médicament et de 5 personnes parmi les autres.

1. Reproduire et compléter le tableau d'effectifs suivant.

	A Ont vu leur santé s'améliorer	$\overline{A}$ N'ont pas vu leur santé s'améliorer	Total
B Ont pris le médicament	60	20	80
$\overline{B}$ Ont pris le placebo	5	35	40
Total	65	55	120

total des personnes qui prennent le médicament

2. a) Calculer la fréquence des personnes qui ont vu leur santé s'améliorer parmi celles qui ont pris le médicament.

b) Calculer la fréquence des personnes qui ont vu leur santé s'améliorer parmi celles qui n'ont pas pris le médicament.

c) Calculer la fréquence des personnes qui ont pris le médicament parmi celles qui ont vu leur santé s'améliorer.

Méthode :
Dans cet exercice il faut faire attentif à la référence. Celle-ci est indiquée par "parmi celles qui..."

1) $120-80=40$ $\quad 80-60=20 \quad 120-55=60+5=65$

$40-5=35 \quad 20+35=55$

2) A : sous-population des personnes qui ont vu leur santé s'améliorer
$n_A = 65$

B : sous-population des personnes qui ont pris le médicament $n_B = 80$

$A\cap B$: sous-population des personnes qui ont pris le médicament et qui ont vu leur santé s'améliorer $\quad n_{A\cap B} = 60$

a) Parmi les 80 personnes qui ont pris le médicament, 60 ont vu leur santé s'améliorer

$p = \frac{60}{80} = \frac{6}{8} = 0,75$ c'est $\frac{n_{A\cap B}}{n_B}$

b) parmi les 40 personnes qui n'ont pas pris le médicament, 5 ont vu leur santé s'améliorer

$p = \frac{5}{40} = 0,125$ c'est $\frac{n_{A\cap \overline{B}}}{n_{\overline{B}}}$

c) Parmi les 65 personnes qui ont vu leur santé s'améliorer 60 ont pris le médicament

$p = \frac{60}{65} = 0,9231$ c'est $\frac{n_{A\cap B}}{n_A}$

43 *** Lors d'un discours au cours duquel il a donné les résultats des examens de fin d'études des deux universités du pays, le dictateur dirigeant ce pays a déclaré : « Dans l'Université du Nord, 82 % des garçons et 80 % des filles ont réussi.

Dans l'Université du Sud, 56 % des garçons et 52 % des filles ont réussi.

Je ne suis pas sexiste, mais il faut bien reconnaître que dans notre pays, les garçons réussissent mieux que les filles. »

1. Dans l'Université du Nord, il y avait 500 candidats de sexe masculin et 500 candidats de sexe féminin.
Calculer le nombre de garçons et le nombre de filles qui ont réussi dans cette université.

2. Dans l'Université du Sud, il y avait 800 candidats de sexe masculin et 200 candidats de sexe féminin.
Calculer le nombre de garçons et le nombre de filles qui ont réussi dans cette université.

3. a) Combien y avait-il de garçons candidats dans le pays ? Calculer la proportion des garçons qui ont réussi dans le pays.

b) Calculer de même la proportion des filles qui ont réussi dans le pays.

c) La conclusion du dictateur est-elle exacte ?

Le résultat surprenant de cet exercice est dû à ce que l'on appelle l'effet de structure.

Université du nord

1) nombre de garçons qui ont réussi

$$82\% \text{ de } 500 = \frac{82}{100} \times 500 = 410.$$

nombre de filles qui ont réussi :

$$80\% \text{ de } 500 = \frac{80}{100} \times 500 = 400$$

2) Université sud.

nombre de garçons qui ont réussi :

$$56\% \text{ de } 800 = \frac{56}{100} \times 800 = 448$$

nombre de filles qui ont réussi :

$$52\% \text{ de } 200 = \frac{52}{100} \times 200 = 104$$

3) nombre de garçons au total : $500 + 800 = 1300$

nombre de filles au total : $500 + 200 = 700$

a) Soit E la population des garçons $n_E = 1300$

A la sous-population des garçons qui ont réussi $n_A = 448 + 410 = 858$

La proportion de A dans E est $p = \frac{n_A}{n_E} = \frac{858}{1300} = 0{,}66 = 66\%$

b) F : population des filles $n_F = 700$.

B : sous-population des filles qui ont réussi

$n_B = 400 + 104 = 504$

La proportion de B dans F est :

$$p = \frac{n_B}{n_F} = \frac{504}{700} = 0{,}72 = 72\%$$

c) Le dictateur s'est trompé. En effet 72% des candidats féminins ont réussi contre 66% pour les candidats masculins

34 AG6 **Proportions, tableaux croisés d'effectifs, arbres de répartition**

Une auto-école fait une étude sur la population, notée E, de ses 100 derniers clients qui ont réussi le permis de conduire automobile.

On note A (resp. $\overline{A}$) la sous-population des clients qui ont suivi (resp. n'ont pas suivi), la conduite accompagnée.

On note B (resp. $\overline{B}$) la sous-population des clients qui ont réussi (resp. n'ont pas réussi), le permis du premier coup.

Les résultats sont consignés dans le tableau suivant (appelé *tableau croisé d'effectifs*).

	A	$\overline{A}$	Total
B	16	48	64
$\overline{B}$	4	32	36
Total	20	80	100

1. a) Combien de clients ont suivi la conduite accompagnée ?

b) Combien de clients ont réussi le permis du premier coup ?

c) Combien de clients ont suivi la conduite accompagnée et réussi le permis du premier coup ?

2. a) Calculer la proportion de la sous-population $A \cap B$ (clients ayant suivi la conduite accompagnée et réussi le permis du premier coup) dans la population A.

b) Calculer la proportion de la sous-population A dans la population E.

c) Calculer la proportion de la sous-population $A \cap B$ dans la population E. Retrouver ce résultat en utilisant les résultats des questions **2. a)** et **2. b)** et l'égalité avec deux inclusions successives.

1 a) $n_A = 20$ b) $n_B = 64$ c) $n_{A \cap B} = 16$

proportion de $A \cap B$ dans A :

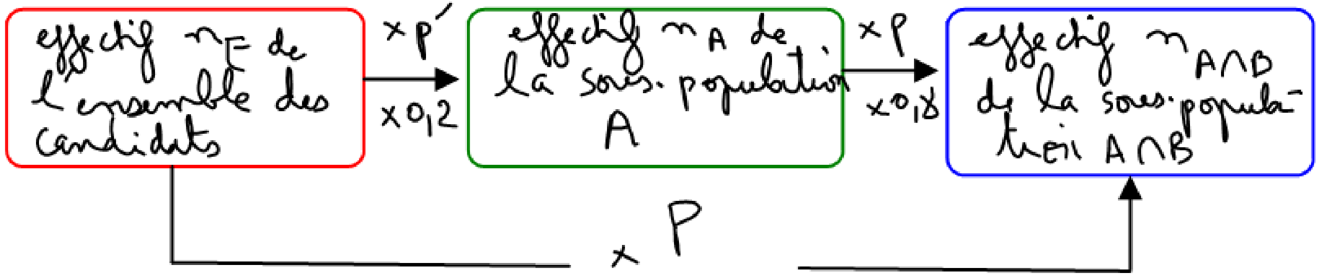
2 a) $p = \dfrac{n_{A \cap B}}{n_A} = \dfrac{16}{20} = 0{,}8 = 80\%$

attention, ici la population de référence est A donc on divise par n_A.

b) proportion de A dans E est $p' = \dfrac{n_A}{n_E} = \dfrac{20}{100} = 0{,}2 = 20\%$

c) proportion de $A \cap B$ dans E :

$P = \dfrac{n_{A \cap B}}{n_E} = \dfrac{16}{100} = 16\%$



$P = p' \times p = 0{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}16 = 16\%$

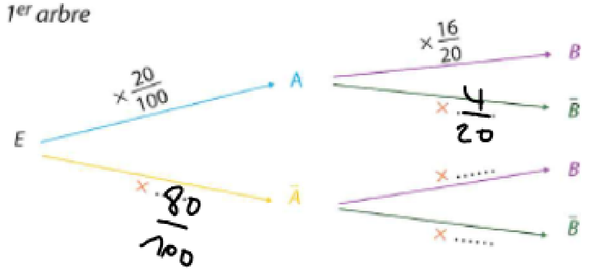
3. a) Calculer la proportion de la sous-population $A \cap B$ dans la population B.

b) Calculer la proportion de la sous-population B dans la population E.

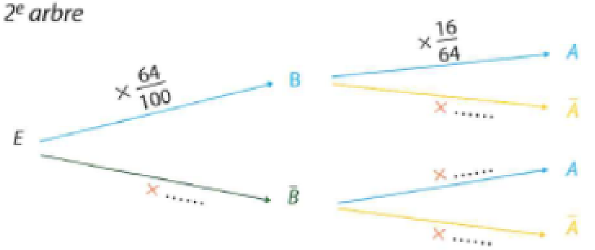
c) Retrouver la proportion de la sous-population $A \cap B$ dans la population E en utilisant les résultats des questions **3. a)** et **3. b)** et l'égalité sur les proportions avec deux inclusions successives.

4. Reproduire et compléter les arbres de répartition (dits *pondérés* par les proportions) suivants.

1er arbre



2e arbre



3 a) proportion de $A \cap B$ dans B

$$p = \frac{n_{A\cap B}}{n_B} = \frac{16}{64} = 0,25 = \frac{25}{100} = 25\%$$

b) proportion de B dans E

$$p' = \frac{n_B}{n_E} = \frac{64}{100} = 64\%$$

c) proportion de $A \cap B$ dans E :

$$P = \frac{n_{A\cap B}}{n_E} = \frac{16}{100}$$

Le schéma de proportions échelonnées nous donne

$$P = p' \times p = 0,64 \times 0,25 = 0,16 = 16\%$$

effectif n_E de l'ensemble des candidats $\xrightarrow[\times 0,64]{\times p'}$ effectif n_B de la sous-population B $\xrightarrow[\times 0,25]{\times p}$ effectif $n_{A\cap B}$ de la sous-population $A \cap B$

effectif n_E de l'ensemble des candidats $\xrightarrow{\times P}$ effectif $n_{A\cap B}$ de la sous-population $A \cap B$