Correction du DS n°1

Exercice 1 : (3 points)

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x)=x^2-1 & \text{si } x\in\ ]-\infty;2] \\ f(x)=x+p & \text{si } x\in\ ]2;+\infty[\end{cases}$$

a) La fonction f est-elle continue sur $]-\infty;2]$? $]2;+\infty[$? Justifier.

f est continue sur chaque partie de son ensemble de définition car c'est une fonction polynôme second degré et une fonction affine ensuite.

b) Comment choisir p pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$? Justifier avec rigueur.

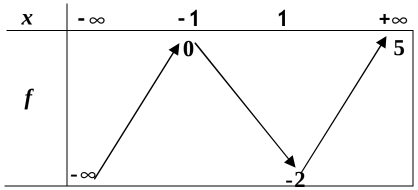
Il s'agit d'étudier la continuité en $x = 2$

D'une part $f(2)=2^2 - 1 = 3$ D'autre part on a pour $x=2$ $2+p$

f est continue en 2 si et seulement si $2+p=3$, si et seulement si $p=1$

Exercice 2 : (2 points)

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction f.



Donner dans chaque cas le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

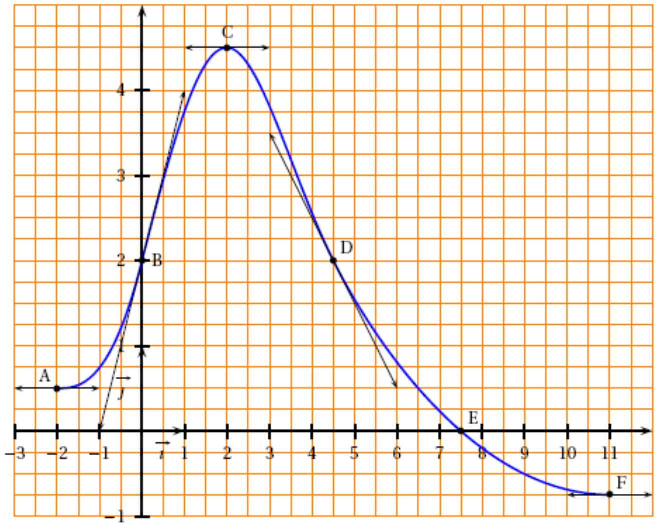
a) $f(x)=7$: Aucune solution

b) $f(x)=-5$: 1 solution dans $]-\infty;-1[$

c) $f(x)=-\frac{1}{2}$: 1 solution dans $]-\infty;-1[$; 1 solution dans $]-1;1[$; 1 solution dans $]1;+\infty[$

Exercice 3 : (5 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur [-2 ; 11] et on donne sa courbe représentative C_f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



On sait que la courbe C_f passe par les points A(-2 ; 0,5) B(0 ; 2) C(2 ; 4,5) D(4,5 ; 2) E (7,5 ; 0) et F(11, -0,75) donc : $f(0)=2$; $f(2)=4,5$; $f(4,5)=2$; $f(7,5)=0$; $f(11)=\_0,75$; $f(-2)=0,5$;

1) Donner $f(0)$; $f'(0)$; $f(-2)$ et $f'(-2)$.

$f(0)=2$ (point B)

et $f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la droite passant par B et le point de coordonnées (-1 ; 0). Par lecture graphique on a $f'(0) = 2$ (attention aux unités !)

$f(-2)=4,5$ (point A) et $f'(-2) = 0$ car la tangente en A est horizontale

2) Résoudre $f(x)\le 0$, $f(x)\ge 2$ et $f'(x)\ge 0$.

✓ La courbe représentative de f est située sous l'axe des abscisses sur [7,5 ; 11]

$f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in[7,5;11]$

✓ On trace la droite horizontale d'équation $y=2$: c'est la droite (BD). La courbe est située au dessus de la droite si et seulement si $x_B \le x \le x_D$

$f(x)\ge 2 \Leftrightarrow x\in[0;4,5]$

✓ $f'(x)\ge 0$ sur tout intervalle sur lequel f est croissante donc $f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\in[-2;2]$

3) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point D

L'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a a pour équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

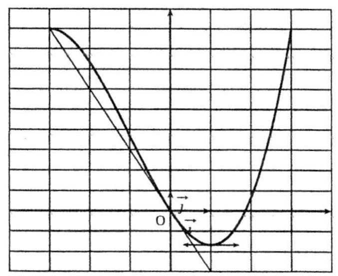
Ici on a $a = 4,5$

$$f'(4,5)=\frac{-6carreaux}{+3carreaux}=\frac{-6/4}{+3/2}=-\frac{6}{4}x\frac{2}{3}=-1$$

La droite a donc pour équation $y=-1(x-4,5)+2$ soit $y=-x+6,5$

Exercice 4 : (5 points)

La courbe (C), donnée ci-contre, est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur [-3 ; 3] dans un repère orthogonal. La courbe (C) vérifie les quatre conditions suivantes :



- Elle passe par l'origine du repère et le point A(-3 ; 9) ;

Ceci permet de savoir que $f(0)=0$ et $f(-3)=9$

- Elle admet au point B d'abscisse 1 une tangente horizontale et elle admet la droite (AO) pour tangente en O

Ceci permet de savoir que $f'(1)=0$ et que $f'(0)=\frac{y_A-y_O}{x_A-x_O}$ =-3

1) Quel est le coefficient directeur de la droite (AO) ?

L'analyse de l'énoncé a permis de répondre à cette question : la droite (AO) a pour coefficient directeur $m=-3$

2) L'un des trois schémas numérotés 1, 2 et 3 donnés ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée f' de la fonction f. Indiquer le numéro de ce schéma **en précisant** les raisons de votre choix.

Les variations de f dépendent du signe de sa dérivée, on doit donc chercher une fonction f' qui s'annule en x = -3 et en x = 1, qui est négative sur]-3 ; 1[(intervalle sur lequel f est décroissante) ; et positive sur]1 ; 3] (intervalle sur lequel f est croissante)

Schéma 1 : la fonction proposée ne s'annule pas en x = -3 et en x = 1

Schéma 2 : la fonction proposée ne s'annule pas en x = -3

Schéma 3 : les conditions sont respectées.

3) On suppose que f est définie sur [-3 ; 3] par $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$.

On désigne par f' sa dérivée.

Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f sur [-3 ; 3].

f est continue et dérivable sur son ensemble de définition car c'est une fonction polynôme
Pour tout $x\in[-3;3]$ $f'(x)=x^2+2x-3$ Les racines de cette expression sont évidentes :
En effet, en testant pour $x=1$ on constate que $f'(1)=0$ On connaît une propriété sur le produit des racines d'une expression du second degré : $x_1x_2=\frac{c}{a}$ il en résulte que -3 est racine de $f'(x)$
Le tableau de signes de $f'(x)$ s'obtient immédiatement par résultat de cours.

Les variations de f dépendant du signe de sa dérivée il en résulte le tableau suivant :

x	-3		1		3
$f'(x)$	0	−	0	+	
f	9	↘	-5/3	↗	9

$$f(1)=\frac{1}{3}(1)^3+(1)^2-3=\frac{1}{3}+1-3=\frac{1}{3}+\frac{3}{3}-\frac{9}{3}=-\frac{5}{3}$$

4) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ a une unique solution α dans l'intervalle [1 ; 2] et déterminer l'arrondi à une décimale de α.
On a $f(1)=-5/3$ $f(2)=2/3$
f est continue et strictement croissante sur [1 ; 2]
$f(1)<0<f(2)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ possède une unique solution α dans l'intervalle [1 ; 2]

A l'aide de la calculatrice graphique, on obtient $\alpha\approx1{,}9$ à 10^{-1} près.

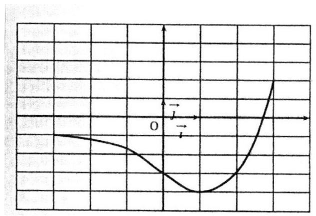


Schéma 1

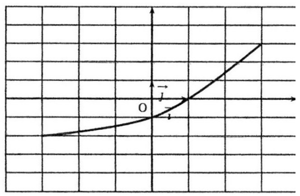


Schéma 2

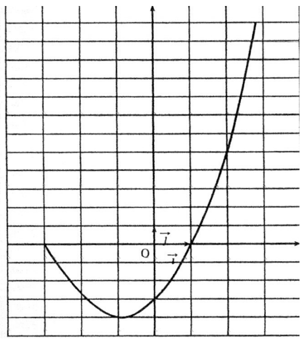


Schéma 3

Exercice 5 : (5 points) **Rentabilité d'une activité**

Le bénéfice d'une entreprise en milliers d'euros, en fonction de la quantité x d'objets vendus, en milliers d'unités, est modélisé par : $B(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{11}{2}x^2+6x-20$ pour $x\in[0;10]$.

1. Conjecture

Représenter la fonction B à l'écran d'une calculatrice et conjecturer pour quelles ventes d'objets l'activité de l'entreprise est rentable.
Solution : L'activité est rentable dès que la fonction B est positive soit pour x compris entre 1,5483 et 8,88298 soit une quantité d'articles comprise entre 1549 et 8882 pièces.

2. Démonstration

a. Dresser le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle [0 ; 10] *(NB : ici on vous demande en fait d'étudier les variations de la fonction, et de synthétiser les résultats de votre étude dans un tableau de variation)*
B est continue et dérivable sur son ensemble de définition car c'est une fonction polynôme
Pour tout $x\in[0;10]$ $B'(x)=-2x^2+11x+6$ Les racines de cette expression sont évidentes :
En effet, en testant pour $x=6$ on constate que $f'(6)=0$ On connaît une propriété sur le produit des racines d'une expression du second degré : $x_1x_2=\frac{c}{a}$ il en résulte que -0,5 est racine de $B'(x)$
Le tableau de signes de $B'(x)$ s'obtient immédiatement par résultat de cours.

Les variations de B dépendant du signe de sa dérivée il en résulte le tableau suivant :

x	0		6		10
$B'(x)$		+	0	−	
B	-20	↗	70	↘	-76,66

b. Justifier que l'équation $B(x)=0$ admet deux solutions x_1 et x_2 dans [0 ; 10].

B est continue et strictement croissante sur [0 ; 6] or $B(0)<0<B(6)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $B(x)=0$ possède une unique solution x_1 dans l'intervalle [0 ; 6].

De même, B est continue et strictement croissante sur [0 ; 6] or $B(10)<0<B(6)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $B(x)=0$ possède une unique solution x_2 dans l'intervalle [6 ; 10].

c. Déterminer une valeur approchée x_1 et x_2 à 10^{-3} près.

A l'aide de la calculatrice graphique, on obtient $x_1\approx1{,}548$ à 10^{-3} près.
$x_2\approx8{,}883$ à 10^{-3} près.

d. En déduire, à l'unité près, la quantité minimale et la quantité maximale que l'entreprise doit vendre pour que son activité soit rentable. Il faut produire entre 1549 et 8882 objets

e. Déterminer la quantité d'objets à vendre pour que le bénéfice soit maximal. Quel est alors ce bénéfice ? Le bénéfice est maximal pour 6 milliers d'objets à vendre et vaut 70 000 €