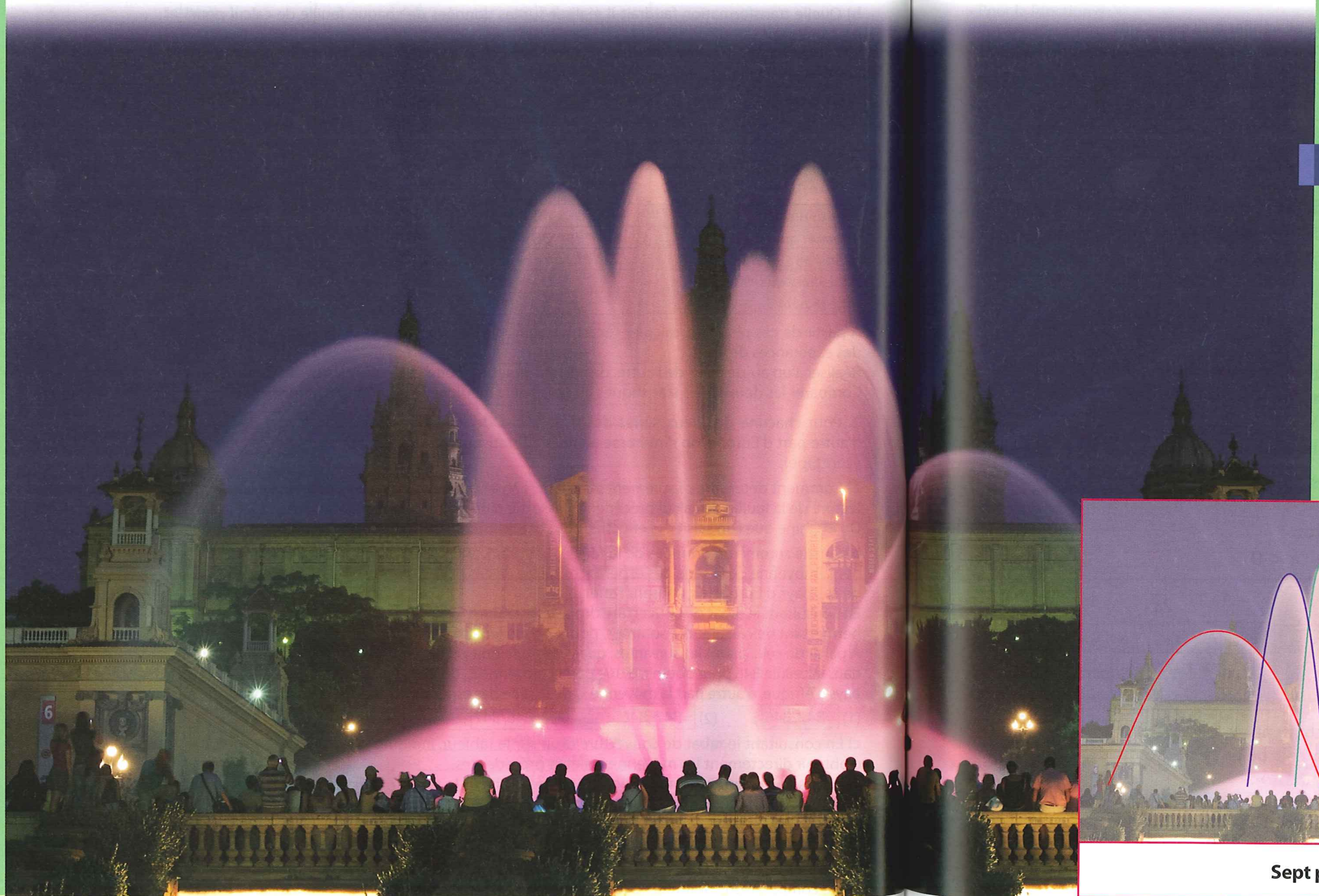
6 Second degré



1 Fonctions polynômes de degré 2 118

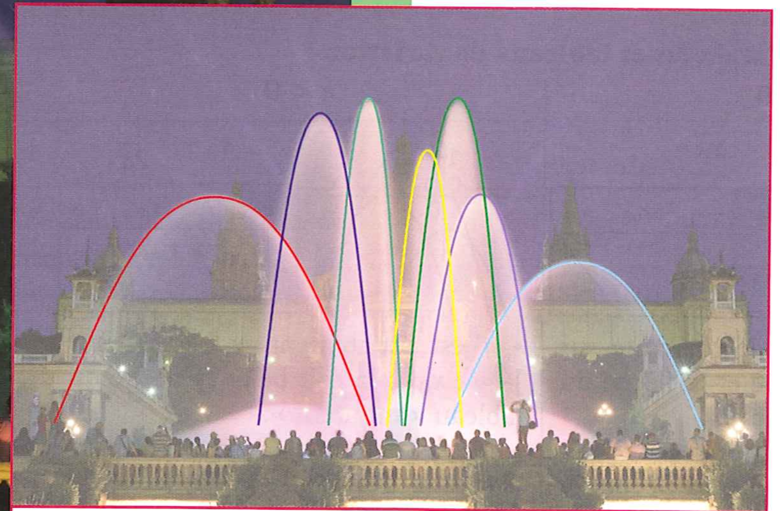
Comment étudier une fonction polynôme de degré 2 et tracer sur papier sa parabole représentative ?

2 Équations du second degré 120

Comment résoudre dans ℝ une équation du second degré et, lorsqu'il y a une ou deux solutions, factoriser le trinôme correspondant ?

3 Signe d'un trinôme 122

Comment étudier le signe d'un trinôme ?



Sept paraboles

1 Fonctions polynômes de degré 2

Activité — À tout polynôme de degré 2, sa parabole

1. a) Tracer, sur l'écran d'une calculatrice, les paraboles P_1, P_2, P_3 et P_4 représentatives des fonctions polynômes de degré 2 définies par :

$f_1(x) = x^2 + 2x - 1$; $f_2(x) = 0{,}5x^2 - x + 4{,}5$;
$f_3(x) = -x^2 - 2x - 4$; $f_4(x) = -0{,}5x^2 + x + 2{,}5$.

b) Ces paraboles sont représentatives de fonctions f définies pour tout réel x par une expression de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.
Les branches de la parabole représentative d'une fonction f_i sont-elles orientées vers le haut ou vers le bas lorsque $a > 0$? lorsque $a < 0$?

2. a) À l'aide des paraboles P_1, P_2, P_3 et P_4, établir le tableau de variation de chacune des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4.

b) Préciser la valeur de l'extremum de chacune de ces fonctions et vérifier qu'il est atteint pour $x = -\dfrac{b}{2a}$. (Utiliser le zoom s'il y a lieu.)

Cours

1 Définition

Une fonction **polynôme f de degré 2** (ou **du second degré**) est une fonction qui s'exprime, pour tout nombre réel x, sous la forme $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$, où a, b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.

BON À SAVOIR
« de degré 2 » parce que l'exposant le plus grand de x est 2.

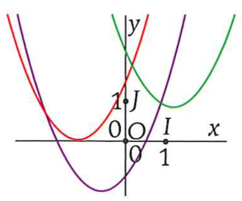
2 Courbe représentative et sens de variation

On considère une fonction polynôme f de degré 2.

La courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal est une **parabole**, dont les branches sont orientées « vers le haut » lorsque $a > 0$, « vers le bas » lorsque $a < 0$.
La parabole présente une symétrie par rapport à la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$, droite passant par son sommet et parallèle à l'axe des ordonnées.

Paraboles et tableaux de variation :

$a > 0$

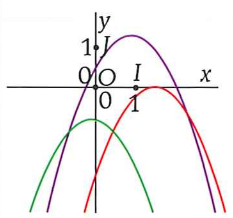


$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		↘	$f(x_0)$	↗	

• f est strictement décroissante sur $]-\infty\ ;\ x_0[$: la courbe et la flèche du tableau « descendent ».
• f est strictement croissante sur $]x_0\ ;\ +\infty[$: la courbe et la flèche du tableau « montent ».
• f présente un minimum au point d'abscisse x_0.

$a < 0$



$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		↗	$f(x_0)$	↘	

• f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;\ x_0[$: la courbe et la flèche du tableau « montent ».
• f est strictement décroissante sur $]x_0\ ;\ +\infty[$: la courbe et la flèche du tableau « descendent ».
• f présente un maximum au point d'abscisse x_0.

Exercice résolu 1 — Comment étudier une fonction polynôme de degré 2 et tracer sur papier sa parabole représentative ?

Soit f et g les fonctions définies sur $[-2\ ;\ 1{,}5]$ par :
$f(x) = x^2 + x - 2$ et $g(x) = -2x^2 + x + 1$.
Étudier les fonctions f et g, puis tracer leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

SOLUTION

• Pour la fonction f :
$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5$ et $y_0 = f(-0{,}5) = (-0{,}5)^2 - 0{,}5 - 2 = -2{,}25$.

• Pour la fonction g :
$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{2 \times (-2)} = 0{,}25$ et $y_0 = g(0{,}25) = -2 \times 0{,}25^2 + 0{,}25 + 1 = 1{,}125$.

• On dresse les tableaux de variation de f et de g :

Pour f : $a = 1$, donc $a > 0$.

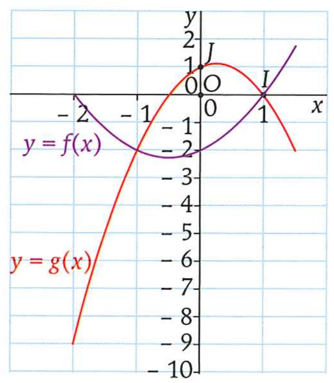
x	-2		$-0{,}5$		$1{,}5$
$f(x)$	0	↘	$-2{,}25$	↗	$1{,}75$

Pour g : $a = -2$, donc $a < 0$.

x	-2		$0{,}25$		$1{,}5$
$g(x)$	-9	↗	$1{,}125$	↘	-2

• On dresse un tableau de valeurs de f et de g à l'aide de la calculatrice, puis on trace leurs paraboles représentatives.

x	$f(x)$	$g(x)$
-2	0	-9
$-1{,}5$	$-1{,}25$	-5
-1	-2	-2
$-0{,}5$	$-2{,}25$	0
0	-2	1
$0{,}5$	$-1{,}25$	1
1	0	0
$1{,}5$	$1{,}75$	-2



MÉTHODE 1

Pour étudier une fonction polynôme f de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des réels, $a \neq 0$ et tracer sur papier sa parabole représentative :

1. On calcule $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ et $y_0 = f(x_0)$.
2. On détermine le signe de a, puis on dresse le tableau de variation de f :

• Lorsque $a > 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		↘	y_0	↗	

• Lorsque $a < 0$

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		↗	y_0	↘	

3. On dresse un tableau de valeurs de la fonction et on trace sur papier la parabole représentative de f, en choisissant un repère approprié.

Conseil : *il est très utile d'effectuer un contrôle visuel des résultats avec un tracé adapté de la parabole représentative sur écran de calculatrice.*

Application

Application (VOIR EXERCICE RÉSOLU 1)

Soit f et g les fonctions définies sur $[0\ ;\ 5]$ par $f(x) = x^2 - 7x + 1$ et $g(x) = -x^2 + 5x - 6$.
Étudier les fonctions f et g, puis tracer leurs courbes représentatives dans le plan rapporté à un repère.

→ VOIR EXERCICES 1 À 4, 9 À 12, P. 126

2 Équations du second degré

Activité Une écriture utile

1. Soit f la fonction polynôme définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 2x^2 + 4x - 70$.
Constater que $f(x) = 2[(x+1)^2 - 36]$, en développant $2[(x+1)^2 - 36]$.

2. Plus généralement : a, b et c étant des nombres réels tels que $a \neq 0$, soit f la fonction polynôme de degré 2 définie pour tout nombre réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

a) Constater, en développant, que $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$.

b) Vérifier que pour les coefficients $a = 2$, $b = 4$ et $c = -70$ de la question **1.**, $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 36$.

> **BON À SAVOIR**
> L'écriture $f(x)$ du **a)** permet d'obtenir les résultats du paragraphe 2 qui suit.
> → Voir Activité guidée 1 page 130.

Cours

Soit f une fonction polynôme de degré 2. $f(x)$ s'écrit sous forme développée $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels (fixés) tels que $a \neq 0$.

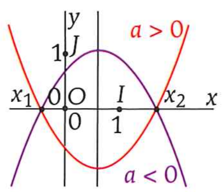
1 Trinôme et discriminant

L'expression $ax^2 + bx + c$ s'appelle **trinôme**.
On appelle **discriminant** de $ax^2 + bx + c$ (ou de f) le nombre $b^2 - 4ac$.
(On le note usuellement Δ, qui se lit delta.)

2 Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

Résoudre cette équation consiste à rechercher et à calculer, si elles existent, les valeurs du réel x telles que $ax^2 + bx + c = 0$, appelées solutions de l'équation.

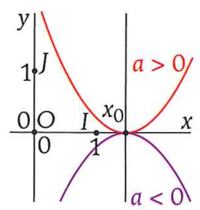
- Lorsque $b^2 - 4ac > 0$, l'équation a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.
Le trinôme $ax^2 + bx + c$ s'écrit, sous forme factorisée, $a(x - x_1)(x - x_2)$.



$\dfrac{x_1 + x_2}{2} = -\dfrac{b}{2a}$

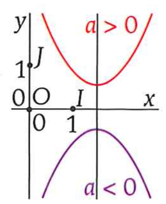
Exemple :
L'équation $2x^2 + 4x - 70 = 0$ a deux solutions,
car $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times (-70) = 576 > 0$:
$x_1 = \dfrac{-4 - \sqrt{576}}{2 \times 2} = -7$; $x_2 = \dfrac{-4 + \sqrt{576}}{2 \times 2} = 5$ et $2x^2 + 4x - 70 = 2(x+7)(x-5)$.

- Lorsque $b^2 - 4ac = 0$, l'équation a une seule solution : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.
Le trinôme $ax^2 + bx + c$ s'écrit, sous forme factorisée, $a(x - x_0)^2$.



Exemple :
L'équation $2x^2 - 12x + 18 = 0$ a une seule solution,
car $b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 0$:
$x_0 = -\dfrac{-12}{2 \times 2} = \dfrac{12}{2 \times 2} = 3$ et $2x^2 - 12x + 18 = 2(x-3)^2$.

- Lorsque $b^2 - 4ac < 0$, l'équation n'a aucune solution.
Le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'a pas de forme factorisée.



Exemple :
L'équation $2x^2 + 4x + 3 = 0$ n'a aucune solution,
car $b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times 3 = -8 < 0$.

Exercice résolu 2 Comment résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du second degré et, lorsqu'il y a une ou deux solutions, factoriser le trinôme correspondant ?

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes.
a) $0{,}5x^2 + 2x - 2{,}5 = 0$; **b)** $-2x^2 + 4x - 2 = 0$; **c)** $x^2 - 5x + 7 = 0$.

SOLUTION

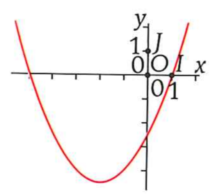
a) L'équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a = 0{,}5$, $b = 2$ et $c = -2{,}5$.
Le discriminant de $0{,}5x^2 + 2x - 2{,}5$ est : $\Delta = 2^2 - 4 \times 0{,}5 \times (-2{,}5) = 4 + 5 = 9$.
Puisque $\Delta > 0$, l'équation $0{,}5x^2 + 2x - 2{,}5 = 0$ a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 - \sqrt{9}}{2 \times 0{,}5} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + \sqrt{9}}{2 \times 0{,}5} = 1$.
Factorisation du trinôme : $0{,}5x^2 + 2x - 2{,}5 = a(x - x_1)(x - x_2) = 0{,}5(x+5)(x-1)$.

b) L'équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a = -2$, $b = 4$ et $c = -2$.
Le discriminant de $-2x^2 + 4x - 2$ est : $\Delta = 4^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 0$.
Puisque $\Delta = 0$, l'équation $-2x^2 + 4x - 2 = 0$ a une seule solution :
$x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{4}{2 \times (-2)} = 1$.
Factorisation du trinôme : $-2x^2 + 4x - 2 = a(x - x_0)^2 = -2(x-1)^2$.

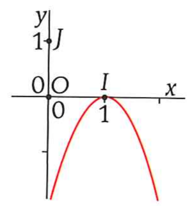
c) L'équation est de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, avec $a = 1$, $b = -5$ et $c = 7$.
Le discriminant de $x^2 - 5x + 7$ est : $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 7 = -3$.
Puisque $\Delta < 0$, l'équation $x^2 - 5x + 7 = 0$ n'a aucune solution.

Contrôles visuels :

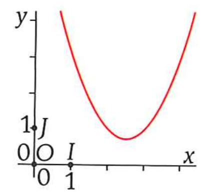
a)



b)



c)



> **MÉTHODE 2**
> **Pour résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ et, lorsqu'il y a une ou deux solutions, factoriser le trinôme correspondant :**
> **1.** On identifie les valeurs des coefficients a, b et c.
> **2.** On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et on conclut.
> • Lorsque $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$; on écrit alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
> • Lorsque $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$; on écrit alors $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
> • Lorsque $\Delta < 0$, l'équation n'a aucune solution.
>
> ***Conseil :*** *il est très utile d'effectuer un contrôle visuel des résultats avec un tracé adapté de la parabole représentative sur écran de calculatrice.*

Application

Application (VOIR EXERCICE RÉSOLU 2)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, puis contrôler visuellement chaque résultat en traçant la parabole représentative sur l'écran d'une calculatrice.
a) $x^2 - 6x + 8 = 0$;
b) $2x^2 - 2x + 0{,}5 = 0$;
c) $3x^2 - x + 2 = 0$.

→ VOIR EXERCICES 21 À 40, P. 127

3 Signe d'un trinôme

Activité Recherches graphiques

1. Soit f_1 la fonction polynôme de degré 2 définie pour tout nombre réel x par $f_1(x)=x^2+6x+8$.

a) Tracer sur l'écran d'une calculatrice ou d'un ordinateur la parabole représentative de f_1.

b) Résoudre l'équation $f_1(x)=0$.

c) À l'aide du graphique, déterminer la position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses.

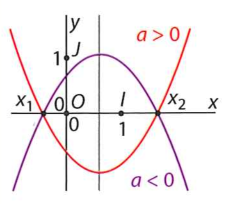
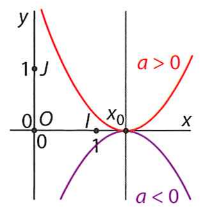
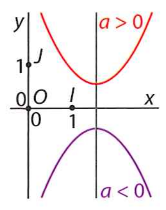
d) En déduire le signe de $f_1(x)$, selon les valeurs de x. (Présenter les résultats sur ce signe dans un tableau, en précisant la valeur du discriminant Δ et le signe du coefficient a de x^2.)

2. Reprendre la question **1.** pour les fonctions f_2, f_3, f_4, f_5 et f_6 définies pour tout nombre réel x par :
$f_2(x)=-x^2+2x-1$, $f_3(x)=x^2-6x+10$, $f_4(x)=-x^2+2x+3$, $f_5(x)=2x^2+8x+8$ et $f_6(x)=-2x^2+x-1$.

Cours

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie, pour tout nombre réel x, par $f(x)=ax^2+bx+c$, où $a\neq 0$. La parabole $\mathscr{P}$, courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère, a pour équation $y=ax^2+bx+c$.

Tableau récapitulatif sur le signe d'un trinôme

	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
L'équation $ax^2+bx+c=0$:	a deux solutions, x_1 et x_2	a une seule solution, x_0	n'a aucune solution
Tracé de la parabole $\mathscr{P}$:			
La parabole $\mathscr{P}$ coupe l'axe des abscisses :	en deux points, d'abscisses x_1 et x_2	en un seul point, d'abscisse x_0	en aucun point
Le signe du trinôme ax^2+bx+c est :	celui de a à l'extérieur des racines x_1 et x_2, celui de $-a$ entre les racines (nullité en x_1 et x_2)	celui de a (nullité en x_0)	celui de a

BON À SAVOIR
Les éventuelles solutions de l'équation $ax^2+bx+c=0$ sont aussi appelées **racines du trinôme** ax^2+bx+c, ou encore **racines de la fonction polynôme f** définie par $f(x)=ax^2+bx+c$.

BON À SAVOIR
Résoudre une inéquation du second degré revient à étudier le signe du trinôme correspondant.
→ *Voir exercices 60 à 84 page 129.*

Exercice résolu 3 Comment étudier le signe d'un trinôme ?

Étudier le signe de chacun des trinômes suivants.
a) $-4x^2+2x-0{,}25$;
b) $-x^2-x+2$;
c) x^2-3x+3.

MÉTHODE 3
Pour étudier le signe d'un trinôme du second degré ax^2+bx+c, $a\neq 0$ et x réel :
1. On calcule le discriminant $\Delta=b^2-4ac$.
2. On examine le signe de Δ et on conclut,
• lorsque $\Delta<0$, pour tout nombre réel x, ax^2+bx+c a le signe de a ;
• lorsque $\Delta=0$, ax^2+bx+c est nul pour $x=x_0$ et a le signe de a pour tout $x\neq x_0$;
• lorsque $\Delta>0$, ax^2+bx+c est nul pour $x=x_1$ et pour $x=x_2$, a le signe de a pour tout x situé à l'extérieur de ces racines et le signe de $-a$ pour tout x situé entre ces racines (on présente alors les résultats dans un tableau).

Conseil : *il est très utile d'effectuer un contrôle visuel des résultats avec un tracé adapté de la parabole représentative sur écran de calculatrice.*

SOLUTION

a) On calcule le discriminant de $-4x^2+2x-0{,}25$, avec $a=-4$, $b=2$ et $c=-0{,}25$:
$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times(-4)\times(-0{,}25)=0$.

Puisque $\Delta=0$, $-4x^2+2x-0{,}25$ a une racine : $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{2\times(-4)}=0{,}25$.

Comme $a=-4$ et $-4<0$, $-4x^2+2x-0{,}25=0$ pour $x=0{,}25$ (racine du trinôme) et $-4x^2+2x-0{,}25<0$ pour $x\neq 0{,}25$.

b) On calcule le discriminant de $-x^2-x+2$, avec $a=-1$, $b=-1$ et $c=2$:
$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4\times(-1)\times 2=1+8=9$.

Puisque $\Delta>0$, $-x^2-x+2$ a deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1-\sqrt{9}}{2\times(-1)}=\frac{1-3}{-2}=1 \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{1+\sqrt{9}}{2\times(-1)}=\frac{1+3}{-2}=-2.$$

Comme $a=-1$ et $-1<0$:
$-x^2-x+2=0$ pour $x=-2$ et pour $x=1$ (racines du trinôme) ;
$-x^2-x+2<0$ pour x extérieur à ces racines, c'est-à-dire $x\in\,]-\infty\,;-2[\,\cup\,]1\,;+\infty[$;
$-x^2-x+2>0$ pour x entre ces racines, c'est-à-dire $x\in\,]-2\,;1[$.

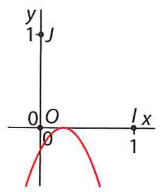
Tableau de signe :

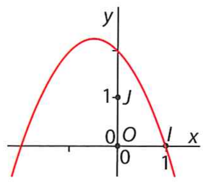
x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-x^2-x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

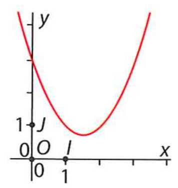
c) On calcule le discriminant de x^2-3x+3, avec $a=1$, $b=-3$ et $c=3$:
$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 1\times 3=9-12=-3$.

Puisque $\Delta<0$, pour tout nombre réel x, x^2-3x+3 a le signe de $a=1$, donc $x^2-3x+3>0$.

Contrôles visuels :

a)


b)


c)


Application

Application (VOIR EXERCICE RÉSOLU 3)

Étudier le signe de chacun des trinômes suivants.
a) $3x^2+2x+1$;
b) $-x^2-5x+6$.

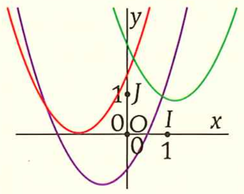
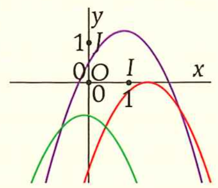
→ VOIR EXERCICES 46 À 53, P. 128

L'essentiel

Ce que je dois savoir

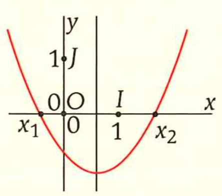
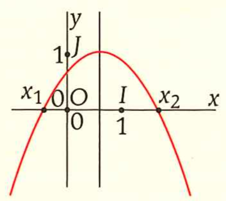
1 Fonction polynôme de degré 2 ; parabole représentative

- Une fonction **polynôme f de degré 2** (ou **du second degré**) est définie, pour tout nombre réel x, par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont des nombres réels, avec $a \neq 0$.
- La courbe représentative $\mathcal{P}$ de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal est une parabole.

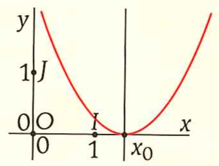
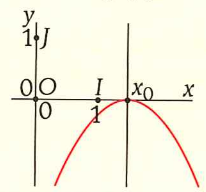
$a > 0$	$a < 0$
• $\mathcal{P}$ a les branches orientées vers le haut. • Le minimum de f est atteint en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.  • f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;x_0[$ et strictement croissante sur $]x_0\,;+\infty[$.	• $\mathcal{P}$ a les branches orientées vers le bas. • Le maximum de f est atteint en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.  • f est strictement croissante sur $]-\infty\,;x_0[$ et strictement décroissante sur sur $]x_0\,;+\infty[$.

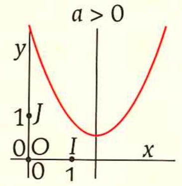
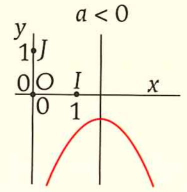
2 Résolution dans $\mathbb{R}$ d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$; signe d'un trinôme $ax^2 + bx + c$

Le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$ s'appelle **discriminant de $ax^2 + bx + c$**.

	$\Delta > 0$	
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ (ou racines de $ax^2 + bx + c$)	$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	
Factorisation de $ax^2 + bx + c$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.	
Tracé de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$	$a > 0$ 	$a < 0$ 
Signe de $ax^2 + bx + c$	Nullité pour $x = x_1$ et pour $x = x_2$ (racines) ; signe de a pour x à l'extérieur des racines et signe de $-a$ pour x entre les racines.	

L'essentiel

	$\Delta = 0$	
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ (ou racines de $ax^2 + bx + c$)	$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$	
Factorisation de $ax^2 + bx + c$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.	
Tracé de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$	$a > 0$ 	$a < 0$ 
Signe de $ax^2 + bx + c$	Nullité pour $x = x_0$ (racine) ; signe de a pour $x \neq x_0$.	

	$\Delta < 0$	
Solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ (ou racines de $ax^2 + bx + c$)	Aucune.	
Tracé de la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$	$a > 0$ 	$a < 0$ 
Signe de $ax^2 + bx + c$	Signe de a.	

Ce que je dois savoir faire

SAVOIR-FAIRE	MÉTHODE	EXERCICES
• Étudier une fonction polynôme de degré 2 et tracer sa parabole représentative	**1** page 119	1 à 4 et 9 à 12
• Résoudre une équation du second degré et, lorsqu'il y a une ou deux solutions, factoriser le trinôme correspondant.	**2** page 121	21 à 44
• Étudier le signe d'un trinôme	**3** page 123	46 à 58
• Résoudre une inéquation du second degré.		60 à 84

Exercices

EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Fonctions polynômes de degré 2

Pour les exercices 1 à 4, étudier la fonction f définie sur I et dresser son tableau de variation, en contrôlant les résultats avec un tracé de la courbe représentative de f sur l'écran d'une calculatrice.

1 C $f(x) = x^2 - 2x - 8$; $I = [-3 ; 5]$.

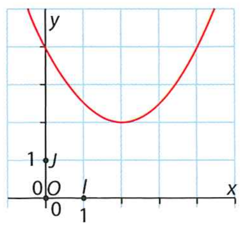
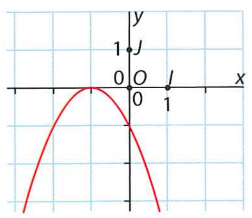
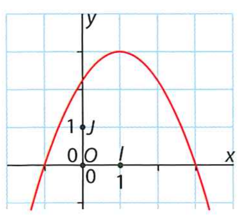
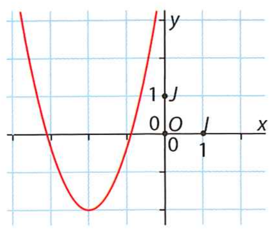
CONSEIL
Voir exercice résolu 1 page 119.

2 $f(x) = -2x^2 + 4x - 5$; $I = [-3 ; 3]$.

3 $f(x) = -x^2 + 4x - 4$; $I = [-1 ; 3]$.

4 $f(x) = -x^2 - 2x + 1$; $I = [-5 ; 3]$.

5 Chacun des tracés suivants est celui de la parabole représentative d'une fonction polynôme f de degré 2, définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.
Pour chacun des cas, préciser le signe de a et dresser le tableau de variation de f.

a)

b)

c)

d)


Pour les exercices 6 à 12, le plan est rapporté à un repère orthogonal.

6 Soit f la fonction définie sur $[-3 ; 1]$ par $f(x) = 2x^2 + 8x - 1$.

1. L'arc $\mathcal{P}$ de parabole représentatif de f est-il orienté vers le haut ou vers le bas ?

2. Calculer l'abscisse du sommet de $\mathcal{P}$.

3. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant.

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$					

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Tracer $\mathcal{P}$ sur papier.

7 Soit f la fonction définie sur $[0 ; 3]$ par $f(x) = -5x^2 + 15x + 1{,}55$.

1. L'arc $\mathcal{P}$ de parabole représentatif de f est-il orienté vers le haut ou vers le bas ?

2. Calculer l'abscisse du sommet de $\mathcal{P}$.

3. Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant.

x	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
$f(x)$							

4. Dresser le tableau de variation de f.

5. Tracer $\mathcal{P}$ sur papier.

8 Chacun des tableaux de variation suivants est celui d'une fonction polynôme f de degré 2, définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.
Pour chacun des cas, préciser le signe de a et tracer à main levée une parabole possible qui pourrait être représentative de f.

a)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

b)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	

c)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		↘	1	↗	

d)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↗	-3	↘	

Pour les exercices 9 à 12, étudier la fonction f, puis tracer sa courbe représentative sur papier.

9 C $f(x) = -x^2 + x + 6$; $I = [-2{,}5 ; 3{,}5]$.

CONSEIL
Voir exercice résolu 1 page 119.

10 $f(x) = -2x^2 - x + 1$; $I = [-2 ; 2]$.

11 $f(x) = x^2 - x + 4$; $I = [-1 ; 3]$.

12 $f(x) = -x^2 - 1{,}5x - 8$; $I = [-3 ; 1]$.

Équations $ax^2 + bx + c = 0$

13 Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 - x - 2$.

1. Calculer $P(-2)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$.

2. En déduire les solutions de l'équation $x^2 - x - 2 = 0$.

LE SAVIEZ-VOUS ?
Une solution de l'équation $f(x) = 0$, où f est une fonction polynôme de degré 2, est aussi appelée « racine » de la fonction polynôme f.

14 C Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 1$.

1. Calculer $P(-2)$, $P(-1)$, $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$.

2. En déduire les racines de P.

15 Pour chacun des cas suivants, déterminer parmi les nombres -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2, les éventuelles racines de la fonction polynôme P de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$.

1. $P(x) = x^2 + 2x - 4$.

2. $P(x) = x^2 - x - 6$.

LE SAVIEZ-VOUS ?
$(ax + b)(cx + d) = 0$ est équivalent à
$(ax + b) = 0$ ou $(cx + d) = 0$.
(*Voir Lexique page 203.*)

16 C Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1 - 2x)(x + 1) = 0$, sans utiliser le discriminant.

17 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, sans utiliser le discriminant.

1. $(x + 3)(5x - 3) = 0$.

2. $3x(x - 2) = 0$.

3. $(4x + 1)^2 = 0$.

18 C Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 - 4 = 0$, sans utiliser le discriminant.

CONSEIL
Utiliser l'égalité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

19 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, sans utiliser le discriminant.

1. $9x^2 - 100 = 0$.

2. $x^2 - 3 = 0$.

3. $x^2 = 2$.

20 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations suivantes, sans utiliser le discriminant.

1. $2x^2 + 6 = 0$.

2. $-x^2 - 7 = 0$.

Pour les exercices 21 à 40, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation en utilisant le discriminant (donner les valeurs exactes des éventuelles solutions) et, lorsqu'il y a une ou deux solutions, factoriser le trinôme correspondant.
Pour tous ces exercices, il est très utile d'effectuer un contrôle visuel des résultats avec un tracé adapté de la parabole représentative de la fonction correspondante sur écran de calculatrice.

21 C $-2x^2 + x - 3 = 0$.

CONSEIL
Voir exercice résolu 2 page 121.

22 $-3x^2 - 2x - 1 = 0$.

23 $x^2 + x - 30 = 0$.

24 $x^2 + x + 5 = 0$.

25 $4x^2 + 7x - 2 = 0$.

26 $6x^2 - 5x + 1 = 0$.

27 $-2x^2 + 15x - 7 = 0$.

28 $x^2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$.

29 $x^2 + 3x - 10 = 0$.

30 $-x^2 + 3x - 4 = 0$.

31 $-3x^2 + x - 2 = 0$.

32 $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 = 0$.

33 $2x^2 + 6x = -4$.

CONSEIL
Écrire l'équation sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

34 $-3x^2 - 5x = -2$.

35 $-2x^2 + 23x = 30$.

36 $20x - 9x^2 = 4$.

37 $-x - 5 = x^2$.

38 $x^2 + 9x + 25 = -x$.

39 $x^2 + 6x + 5 = 0$.

40 $5x^2 + x + 1 = 0$.

Exercices

Pour les exercices 41 à 44, après avoir factorisé le trinôme avec les valeurs exactes des deux solutions, donner les valeurs décimales arrondies au dixième près de ces solutions.

41 $0{,}5x^2 + 2x + 1 = 0$.

42 $0{,}5x^2 - 3x + 3 = 0$.

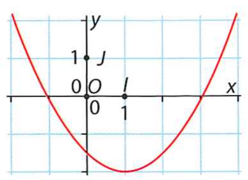
43 $-5x^2 + 5x - 1 = 0$.

44 $\frac{1}{4}x^2 - 2x - 3 = 0$.

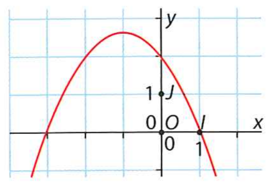
Signe de $ax^2 + bx + c$

45 Chacun des tracés suivants est celui de la parabole représentative d'une fonction polynôme f de degré 2, définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$. Pour chacun des cas, étudier graphiquement le signe de $ax^2 + bx + c$ selon les valeurs de x (porter éventuellement les résultats dans un tableau de signe).

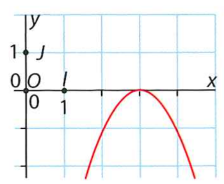
a)



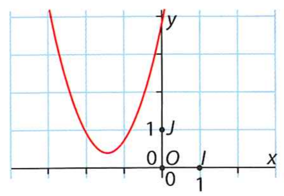
b)



c)



d)



Pour les exercices 46 à 58, étudier le signe du trinôme donné selon les valeurs du nombre réel x.
Pour tous ces exercices, il est très utile d'effectuer un contrôle visuel des résultats avec un tracé adapté de la parabole représentative de la fonction correspondante sur écran de calculatrice.

46 C $x^2 + 2x - 8$.

CONSEIL
Voir exercice résolu 3 page 123.

47 $-2x^2 + 9x - 4$.

48 $-x^2 - 2x - 3$.

49 $6x^2 + 5x + 6$.

50 $x^2 - 2x - 3$.

51 $4x^2 + 3x + 1$.

52 $x^2 - x - 6$.

53 $-2x^2 + 6x - \frac{5}{2}$.

54 $(x + 2)(3x - 1)$.

CONSEIL
Sans développer $(x + 2)(3x - 1)$, passer directement à un tableau de signe. (*Voir Lexique page 204.*)

55 $x(8 - x)$.

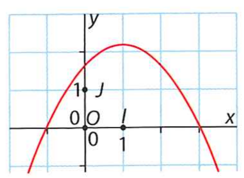
56 $-x(x + 3)$.

57 $(4 - 2x)(x + 6)$.

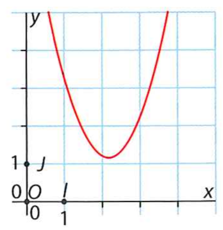
58 $(3 - x)(1 - 3x)$.

59 Chacun des tracés suivants est celui de la parabole représentative d'une fonction polynôme f de degré 2, définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$. Pour chacun des cas, étudier graphiquement le signe de $ax^2 + bx + c$ selon les valeurs de x, puis en déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $ax^2 + bx + c \geqslant 0$.

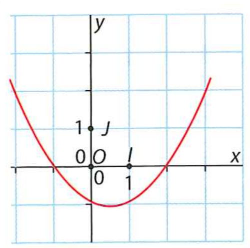
a)



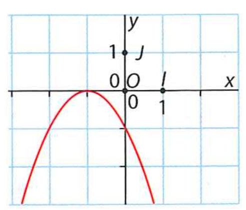
b)



c)



d)



Résolution d'inéquations du second degré

Pour les exercices 60 à 73, résoudre dans ℝ l'inéquation donnée.
Pour tous ces exercices, il est très utile d'effectuer un contrôle visuel des résultats avec un tracé adapté de la parabole représentative de la fonction correspondante sur écran de calculatrice.

60 C $8x^2 + x + 3 < 0$.

CONSEIL
Étudier le signe du trinôme $8x^2 + x + 3$.

61 $5x^2 - 30x - 35 < 0$.

62 C $-x^2 + 3x + 6 < x - 2$

CONSEIL
Se ramener à une inéquation du type $ax^2 + bx + c < 0$.

63 $2x^2 - 7x - 2 < x^2 - 2x - 4$.

64 C $2x^2 - x - 1 > 0$.

65 $x^2 + x + 1 > 0$.

66 $-4x^2 + x - 7 > x^2 - x - 4$.

67 $-x^2 - x + 24 > 22$.

68 C $x^2 - 5x - 6 \geqslant 0$.

69 $-x^2 - 5 \geqslant -x + 3$.

70 $3x^2 + 2x + 30 \geqslant 23$.

71 $-x^2 + 5x - 6 \leqslant 0$.

72 $-x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \leqslant -2x^2$.

73 $-8x^2 + 6x - 1 \leqslant 4x - 2$.

74 C **1.** Donner l'ensemble des solutions, dans ℝ, de l'inéquation $x^2 \geqslant 0$.
2. En déduire l'ensemble des solutions, dans ℝ, de l'inéquation $x^2 + 1 > 0$.

75 Déterminer l'ensemble des solutions, dans ℝ, de l'inéquation $3x^2 + 5 \leqslant 0$.

76 **1.** Donner l'ensemble des solutions, dans ℝ, de l'inéquation $(2x - 3)^2 \geqslant 0$.
2. En déduire l'ensemble des solutions, dans ℝ, de l'inéquation $(2x - 3)^2 > 0$.

CONSEIL
Ne pas développer $(2x - 3)^2$.

Pour les exercices 77 à 79, résoudre dans ℝ l'inéquation donnée.

77 $-(7 - x)^2 > 0$.

78 $(-x - 1)^2 < 0$.

79 $-(x + 2)^2 \leqslant 0$.

80 **Vrai ou faux**
Parmi les réponses suivantes, une seule est vraie. Indiquer laquelle.
L'ensemble des solutions, dans ℝ, de l'inéquation $-3(x + 1)^2 \geqslant 0$ est :
a) ℝ ;
b) $]-\infty\,; -1]$;
c) $]-\infty\,; -1[\cup]-1\,; +\infty[$;
d) $[-1\,; +\infty[$;
e) $\varnothing$;
f) $\{-1\}$.

Pour les exercices 81 à 83, à l'aide d'un tableau, étudier le signe de l'expression du premier membre sans la développer (voir Lexique page 204), puis en déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation indiquée.

81 $-(x - 1)(x + 3) < 0$.

82 $(4 - 2x)(x + 6) \leqslant 0$.

83 $(3 - x)(1 - 3x) \geqslant 0$.

84 **Vrai ou faux**
Parmi les réponses suivantes, une seule est vraie. Indiquer laquelle.
L'ensemble des solutions, dans ℝ, de l'inéquation $-2(x - 3)(x + 2) < 0$ est :
a) $[-2\,; 3]$;
b) $]-\infty\,; -2] \cup [3\,; +\infty[$;
c) $]-2\,; 3[$;
d) $]-\infty\,; -2[\cup]3\,; +\infty[$.

Exercices

Je fais le point

SAVEZ-VOUS étudier une fonction polynôme de degré 2 et tracer sur papier sa parabole représentative ?

ÉNONCÉ 1

Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 4x + 6$, puis tracer sa parabole représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

➜ *voir solution page 192*

ÉNONCÉ 2

Étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$, puis tracer sa parabole représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal.

➜ *voir exercice résolu 1 page 119*

SAVEZ-VOUS résoudre une équation du second degré et, lorsqu'il y a une ou deux solutions, factoriser le trinôme correspondant ?

ÉNONCÉ 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2 + x + 2 = 0$ et, s'il y a une ou deux solutions, factoriser le trinôme $-x^2 + x + 2$.

➜ *voir solution page 193*

ÉNONCÉ 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-x^2 - 4x - 7 = 0$ et, s'il y a une ou deux solutions, factoriser le trinôme $-x^2 - 4x - 7$.

➜ *voir exercice résolu 2 page 121*

SAVEZ-VOUS étudier le signe d'un trinôme ?

ÉNONCÉ 1

Étudier le signe de $-4x^2 - 4x - 1$.

➜ *voir solution page 193*

ÉNONCÉ 2

Étudier le signe de $3x^2 + 2x + 1$.

➜ *voir exercice résolu 3 page 123*

SAVEZ-VOUS résoudre une inéquation du second degré ?

ÉNONCÉ 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation
$-2x^2 + 6x - 1 \geqslant x^2 - 4x + 2$.

➜ *voir solution page 193*

ÉNONCÉ 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $3x^2 + 2x + 1 < x^2 - 3$.

➜ *voir exercices corrigés 60 et 62 page 129*

ACTIVITÉS GUIDÉES

85 AG1 **Obtention des résultats sur la résolution d'une équation du second degré**

Soit P le polynôme défini pour tout nombre réel x par $P(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b, et c sont des nombres réels, $a \neq 0$.

1. On se propose d'écrire $P(x)$ sous « forme canonique ».

a) Vérifier que $P(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$.

b) Développer $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ à l'aide de l'égalité remarquable $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. (*Voir Lexique, page 205.*)

c) En déduire successivement que

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$, puis que

$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$, où $\Delta = b^2 - 4ac$.

Cette écriture de $P(x)$ est appelée « forme canonique ».

2. On suppose $\Delta > 0$.

a) Justifier que $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right]$.

b) À l'aide d'une égalité remarquable, vérifier que

$P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$, c'est-à-dire

$P(x) = a\left[x - \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]\left[x - \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right]$.

c) En déduire les deux solutions, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $P(x) = 0$.

3. On suppose $\Delta = 0$.

Vérifier que $P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et en déduire la solution, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $P(x) = 0$.

4. On suppose $\Delta < 0$.

a) À partir de l'égalité $P(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$, expliquer pourquoi, pour tout nombre réel x :
$P(x) > 0$ lorsque $a > 0$; $P(x) < 0$ lorsque $a < 0$.

b) En déduire que l'équation $P(x) = 0$ n'a aucune solution.

LE SAVIEZ-VOUS ?

Il y a ici une **disjonction de cas** (trois cas pour la valeur de Δ, qui recouvrent toutes les possibilités : $\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$). (*Voir Lexique p. 209.*)

86 AG2 **Choix et utilisation de l'expression d'une fonction polynôme de degré 2, la plus adaptée pour traiter une question**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^2 + 10x + 2{,}2$: expression (1) de $f(x)$.

A. *Autres expressions de* $f(x)$

1. a) Déterminer les solutions x_1 et x_2, dans $\mathbb{R}$, de l'équation $f(x) = 0$.

b) En déduire que $f(x) = -5(x - 2{,}2)(x + 0{,}2)$: expression (2) de $f(x)$.

2. Développer $-5[(x - 1)^2 - 1{,}44]$ et en déduire que $f(x) = -5[(x - 1)^2 - 1{,}44]$: expression (3) de $f(x)$.

B. *Applications*

1. Pour répondre aux questions suivantes, choisir pour chacune, parmi les trois expressions précédentes de $f(x)$, celle qui paraît la mieux adaptée.

a) Calculer $f(0)$.

b) Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$, $f(-2)$ et $f(0{,}8)$.

c) Calculer $f(2{,}2)$ et $f(-0{,}2)$.

d) Étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x et présenter les résultats dans un tableau.

e) Dresser le tableau de variation de f.

2. On lance verticalement une balle. La hauteur, en mètres, atteinte par la balle est donnée en fonction du temps $x \geqslant 0$, en secondes, par $f(x) = -5x^2 + 10x + 2{,}2$.
Utiliser les résultats obtenus aux questions **B 1.** pour répondre aux questions suivantes.

a) Déterminer la hauteur de la balle, au lancer.

b) Déterminer la hauteur atteinte par la balle au bout de 0,8 seconde.

c) Déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle et le temps mis pour atteindre cette hauteur maximale.

d) Déterminer au bout de combien de temps la balle retombera au sol.

87 AG3 **Tracé sur tableur de la parabole représentative d'une fonction polynôme de degré 2**

Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[-3{,}5 ; 2{,}5]$ par $f(x) = 4x^2 + 4x - 15$ et $g(x) = -x^2 - 2x + 3$.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives dans le plan rapporté à un repère.

A. *Procédure*

1. Ouvrir une feuille de calcul du tableur.

2. Obtenir un tableau de valeurs de $f(x)$ et de $g(x)$ avec le pas 0,5. Pour cela :
– Entrer les titres x dans la cellule A1, $f(x)$ dans la cellule B1 et $g(x)$ dans la cellule C1.
– Entrer la valeur $-3{,}5$ dans la cellule A2, la valeur -3 dans la cellule A3, puis utiliser la poignée de remplissage jusqu'à la cellule A14.
– Entrer la formule `=4*A2^3+4*A2–15` dans la cellule B2 et utiliser la poignée de remplissage jusqu'à la cellule B14.
– Entrer la formule `=–A2^2–2*A2+3` dans la cellule C2 et utiliser la poignée de remplissage jusqu'à la cellule C14.

3. À l'aide de l'assistant graphique, tracer les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans l'intervalle $[-3{,}5 ; 2{,}5]$. Pour cela :
– Sélectionner les cellules A1 à C14.
– Cliquer sur l'assistant graphique, puis choisir « Nuages de points avec courbes lissées » comme type de graphique.
– Mettre en forme le résultat avec les options du graphique.

B. *Application*

1. Résoudre graphiquement dans $[-3{,}5 ; 2{,}5]$:

a) chacune des équations $f(x) = 0$; $g(x) = 0$;

b) chacune des inéquations $f(x) < 0$; $g(x) \leqslant 0$.

2. Contrôler par le calcul le résultat obtenu à la question **1. a)**.

88 ALGO AG4 **Algorithme pour résoudre une équation du second degré et mise en œuvre sur tableur**

L'algorithme suivant, incomplet, décrit le processus de résolution d'une équation $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des réels, $a \neq 0$.

Début de l'algorithme
  Entrée
  Saisir les valeurs des coefficients a, b et c.
  Calculer le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.
  Traitement
  Si $\Delta < 0$, afficher « l'équation a 0 solution ».
  Si $\Delta = 0$, ...
  Si $\Delta > 0$, calculer
  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ et
  afficher « l'équation a 2 solutions : x_1 et x_2 ».
  Sortie
Fin de l'algorithme

1. Recopier et compléter le **Traitement** de l'algorithme précédent pour décrire le cas où $\Delta = 0$.

2. a) Ouvrir une feuille de calcul de tableur et reproduire le tableau suivant.

	A	B	C
1	Coefficients	a =	
2		b =	
3		c =	
4			
5	Discriminant		
6			
7	Nombre de solutions		

b) Entrer des valeurs pour les coefficients a, b et c dans les cellules C1, C2 et C3, par exemple 1, 2 et 3.
Entrer dans la cellule B5 la formule `=C2^2–4*C1*C3` pour calculer le discriminant.
Entrer dans la cellule B7 la formule
`=SI(B5=0;"1solution";SI(B5<0;"0solution";"2solutions"))`
pour déterminer le nombre de solutions de l'équation.

Entrer dans les cellules C7 et C8 les formules
=SI(B5=0;–C2/(2*C1);SI(B5>0;(–C2–RACINE(B5))/(2*C1);""))
et =SI(B5>0;(–C2+RACINE(B5))/(2*C1);"") pour déterminer les valeurs des éventuelles solutions.

c) Quelle équation vient-elle d'être résolue, à partir des entrées de la question **2. b)** ?

d) Résoudre avec le tableur chacune des équations suivantes :
$-2x^2+7x-3=0$;
$9x^2-6x+1=0$;
$5x^2-2x+1=0$;
$3x^2-5x+2=0$.

89 ALGO AG5 **Algorithme sur Algobox pour résoudre une équation du second degré**

L'algorithme suivant, écrit avec le logiciel AlgoBox, traduit une démarche pour résoudre une équation $ax^2+bx+c=0$, où a, b et c sont des réels, $a \neq 0$.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  delta EST_DU_TYPE NOMBRE
  x0 EST_DU_TYPE NOMBRE
  x1 EST_DU_TYPE NOMBRE
  x2 EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER " Quelle est la valeur du coefficient a ? "
  LIRE a
  AFFICHER a
  AFFICHER " Quelle est la valeur du coefficient b ? "
  LIRE b
  AFFICHER b
  AFFICHER " Quelles est la valeur du coefficient c ? "
  LIRE c
  AFFICHER c
  SI (a!=0) ALORS
    DEBUT_SI
    delta PREND_LA_VALEUR b*b-4*a*c
    SI (delta<0) ALORS
      DEBUT_SI
      AFFICHER "L'équation n'a aucune solution"
      FIN_SI
      SINON
        DEBUT_SINON
        SI (delta==0) ALORS
          DEBUT_SI
          x0 PREND_LA_VALEUR -b/(2*a)
          AFFICHER "La solution de l'équation est : "
          AFFICHER x0
          FIN_SI
          SINON
            DEBUT_SINON
            x1 PREND_LA_VALEUR (-b-sqrt(delta))/(2*a)
            x2 PREND_LA_VALEUR (-b+sqrt(delta))/(2*a)
            AFFICHER "Les solutions de l'équation sont : "
            AFFICHER x1
            AFFICHER " et "
            AFFICHER x2
            FIN_SINON
        FIN_SINON
    FIN_SI
    SINON
      DEBUT_SINON
      AFFICHER "Il ne s'agit pas d'un trinôme du second degré"
      FIN_SINON
FIN_ALGORITHME
```

1. Recopier l'algorithme précédent dans AlgoBox (utiliser « Opérations standards »), puis le mettre en œuvre pour obtenir le résultat de la question **2. c)** de l'**AG4** précédente (utiliser « Tester Algorithme », puis « Lancer Algorithme »).

2. Résoudre avec cet algorithme chacune des équations de la question **2. d)** de l'**AG4**.

PROBLÈMES

90 * Un artisan fabrique des petits meubles. Le coût de production, en euros, de x meubles fabriqués est donné par $C(x)=x^2+50x+900$, pour $0 \leqslant x \leqslant 60$.

1. a) Calculer $C(0)$. En déduire les frais fixes de l'artisan.

b) Quel est le coût de production de 30 meubles ?

2. Déterminer le nombre de meubles fabriqués pour un coût de production de 2 300 euros.

91 * **1. a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2-20x-125=0$.

b) Déterminer le signe de $x^2-20x-125$ selon les valeurs de x.

2. Un artisan fabrique entre 10 et 40 bijoux fantaisie par jour. Le coût journalier de fabrication (exprimé en euros) de x bijoux est égal à $C(x)$, où C est la fonction définie sur $[10 ; 40]$ par $C(x)=x^2-20x+225$.

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $C(x) > 350$.

b) En déduire le nombre de bijoux fabriqués à partir duquel le coût de fabrication est supérieur à 350 euros.

92 * **Vrai ou faux**

Répondre par vrai ou par faux à chacune des propositions suivantes.

Une fonction polynôme du second degré, définie sur $\mathbb{R}$, peut avoir :

a) une seule racine ;

b) deux racines ;

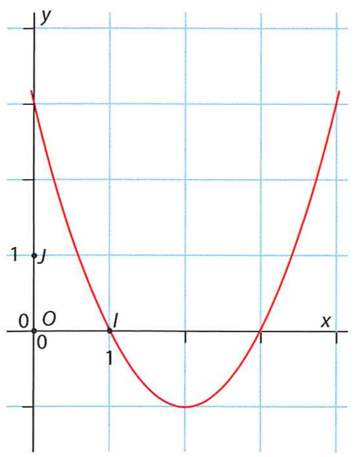
c) plus de deux racines ;

d) aucune racine.

93 ** **Vrai ou faux**

Ci-dessous figure un tracé de la parabole $\mathscr{P}$, représentative d'une fonction polynôme f de degré 2, définie sur $\mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations, déterminer si elle est vraie ou si elle est fausse ; la corriger si elle est fausse.



1. L'équation $f(x)=0$ a deux solutions, -1 et 3.

2. La fonction polynôme f a deux racines de même signe.

3. 1 est une racine de f.

4. Le coefficient de x^2 est strictement positif.

5. Le discriminant de f est nul.

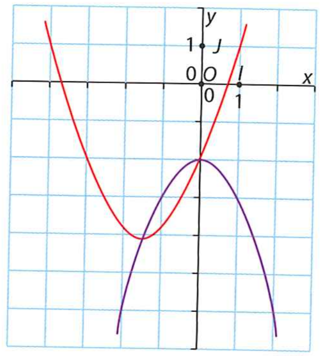
6. La droite d'équation $x=-2$ est l'axe de symétrie de $\mathscr{P}$.

7. Les coordonnées du sommet de $\mathscr{P}$ sont $(-1 ; 2)$.

94 * **QCM**

Les paraboles $\mathscr{P}_f$ (en rouge) et $\mathscr{P}_g$ (en violet) sont les courbes représentatives de fonctions polynômes du second degré f et g définies sur $\mathbb{R}$.

Pour chaque question, une seule des réponses proposées est exacte. Indiquer laquelle.



1. Le discriminant de f est :

a) strictement positif ;

b) nul ;

c) strictement négatif.

2. Le discriminant de g est :

a) strictement positif ; **b)** nul ; **c)** strictement négatif.

3. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x)=0$:

a) a deux solutions ;

b) a une seule solution ;

c) n'a aucune solution.

4. Dans $\mathbb{R}$, l'équation $g(x)=0$:

a) a deux solutions ;

b) a une seule solution ;

c) n'a aucune solution.

5. Dans $\mathbb{R}$, l'inéquation $g(x) \geqslant 0$:

a) a $\mathbb{R}$ pour ensemble de solutions ;

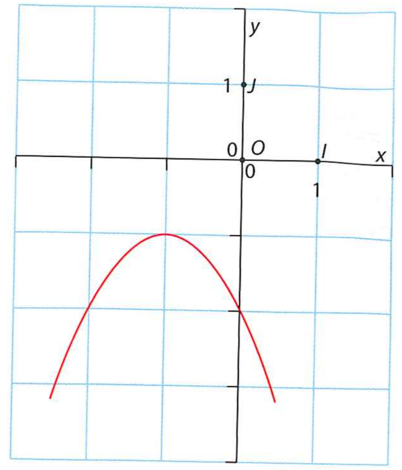
b) n'a aucune solution ;

c) a $[-1 ; 1]$ pour ensemble de solutions.

95 ** **Vrai ou faux**

Ci-après figure un tracé de la parabole $\mathscr{P}$, représentative d'une fonction polynôme f de degré 2, définie sur $\mathbb{R}$.

Pour chacune des propositions, déterminer si elle est vraie ou si elle est fausse ; la corriger si elle est fausse.



1. L'équation $f(x)=0$ n'a aucune solution.

2. Le coefficient de x^2 est strictement positif.

3. Le discriminant de $f(x)$ est strictement positif.

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.

5. f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

6. La droite d'équation $x=-1$ est l'axe de symétrie de $\mathscr{P}$.

7. Les coordonnées du sommet de $\mathscr{P}$ sont $(0 ; -1)$.

96 ** Une entreprise produit et vend des montres. On note x le nombre journalier de montres produites ($2 \leqslant x \leqslant 24$).

On désigne par $C(x)$ le coût journalier de fabrication de x montres et par $R(x)$ la recette correspondante, en euros.

On donne $C(x)=x^2-4x+80$ et $R(x)=20x$.

1. On note $B(x)$ le bénéfice journalier, où $2 \leqslant x \leqslant 24$: $B(x)=R(x)-C(x)$. Déterminer $B(x)$.

2. a) Résoudre l'équation $B(x)=0$.

b) Déterminer le signe de $B(x)$ selon les valeurs de x ; présenter les résultats dans un tableau.

c) En déduire les valeurs de x pour lesquelles le bénéfice journalier est positif.

3. a) Dresser le tableau de variation de B.

b) Pour quelle valeur de x le bénéfice $B(x)$ est-il maximal ? Quel est le montant de ce bénéfice maximal ?

97 ** On considère la fonction f définie sur $[1 ; 6]$ par $f(x)=x^2-7x+10$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

1. a) Calculer $f(3)$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)=0$, puis factoriser $x^2-7x+10$.

d) À partir de la factorisation précédente, étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x. (Porter les résultats dans un tableau.)

2. a) Tracer sur tableur la courbe $\mathscr{C}$. Pour cela :
– Ouvrir une feuille de calcul.

Exercices

– Écrire x dans la cellule A1 et $f(x)$ dans la cellule B1.
– Entrer 1 dans la cellule A2 et 1,5 dans la cellule A3. Sélectionner les cellules A2 et A3, puis tirer la poignée de remplissage vers le bas jusqu'à la valeur 6.
– Entrer dans la cellule B2 la formule `=A2^2–7*A2+10`, puis tirer la poignée de remplissage vers le bas jusqu'à la cellule B12.
– Sélectionner les cellules A1 à B12. Ouvrir l'assistant graphique et choisir « Nuage de points avec courbes lissées » comme type de graphique.
– Mettre en forme le résultat avec les options du graphique.

b) Retrouver graphiquement les résultats obtenus à la question **1.**.

98 ** On considère la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par $f(x) = -x^2 + 5x - 4$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

1. a) Calculer $f(2)$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$, puis factoriser $-x^2 + 5x - 4$.

d) À partir de la factorisation précédente, étudier le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x. (Porter les résultats dans un tableau.)

2. a) Tracer sur tableur la courbe $\mathscr{C}$. Pour cela :
– Ouvrir une feuille de calcul.
– Écrire x dans la cellule A1 et $f(x)$ dans la cellule B1.
– Entrer 0 dans la cellule A2 et 0,5 dans la cellule A3. Sélectionner les cellules A2 et A3, puis tirer la poignée de remplissage vers le bas jusqu'à la valeur 5.
– Entrer dans la cellule B2 la formule `=–(A2^2)+5*A2–4`, puis tirer la poignée de remplissage vers le bas jusqu'à la cellule B12.
– Sélectionner les cellules A1 à B12. Ouvrir l'assistant graphique et choisir « Nuage de points avec courbes lissées » comme type de graphique.
– Mettre en forme résultat avec les options du graphique.

b) Retrouver graphiquement les résultats obtenus à la question **1.**.

99 *** BAC Un voyagiste veut faire une promotion sur le vol Paris-Londres. Le nombre de places disponibles est au maximum de 10 200.
Le nombre $p(x)$ de passagers intéressés est fonction du prix x du billet, avec $p(x) = 10\,200 - 120x$.

Partie A. Étude du nombre de passagers

1. Calculer le nombre de passagers lorsque le prix du billet est fixé à 65 €.

2. Calculer le prix du billet en supposant que 7 200 passagers sont intéressés.

3. Que se passe-t-il lorsque le billet est gratuit ? lorsque le prix du billet est 85 € ?

4. Montrer que la fonction définie sur $[0\,;\,85]$ par $x \mapsto p(x)$ est strictement décroissante sur cet intervalle.

Partie B. Étude de la recette

1. a) Montrer que la recette $R(x)$ lorsque le billet vaut x euros est donnée par $R(x) = -120x^2 + 10\,200x$.

b) Calculer la recette potentielle lorsque le prix du billet est 10 €, 42,50 €, 50 € et 60 €.

2. a) Dresser le tableau de variation de la fonction R sur $[0\,;85]$.

b) Déterminer le prix du billet permettant d'avoir une recette potentielle maximale, puis le montant de cette recette.

c) Calculer alors le nombre de passagers.

100 *** **Partie A**

On considère la fonction f définie sur $[0\,;400]$ par $f(x) = -0{,}000\,625x^2 + 0{,}5x + 69$.

1. Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;400]$.

2. Montrer que l'équation $f(x) = 153$ est équivalente à $-0{,}000\,625x^2 + 0{,}5x - 84 = 0$.
Résoudre cette équation dans $[0\,;400]$.

3. Déterminer les solutions de l'inéquation $f(x) > 100$ appartenant à $[0\,;400]$ (arrondir les racines du trinôme à l'unité).

4. Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant (arrondir les valeurs de $f(x)$ à l'entier le plus proche).

x	0	20	50	80	100	150	200	300	400
$f(x)$									

Partie B.
Lors d'une expérience on a mesuré la fréquence cardiaque, en nombre de battements par minute, d'un coureur de 400 mètres.
Cette fréquence cardiaque est modélisée par $f(x) = -0{,}000\,625x^2 + 0{,}5x + 69$, où x représente la distance parcourue (en mètres) depuis le départ $(0 \leqslant x \leqslant 400)$.
Utiliser la **partie A** pour répondre aux questions suivantes.

1. Quelle est la fréquence cardiaque du sportif au départ de la course ?

2. Quelle est la fréquence cardiaque de ce sportif à la mi-course ?

3. Au bout de quelle distance parcourue la fréquence cardiaque du sportif est-elle égale à 153 battements par minute ?

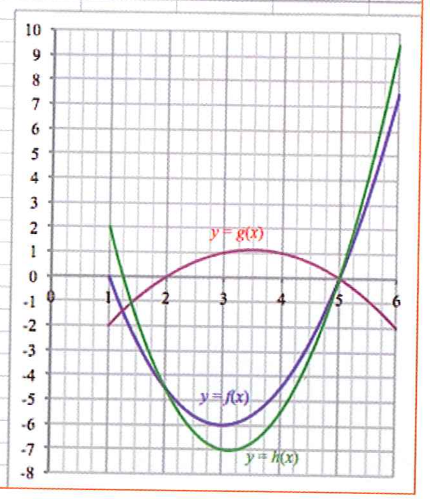
4. Quelle est la distance parcourue à partir de laquelle la fréquence cardiaque du sportif est supérieure à 100 battements par minute ?

Tableur sur papier

Énoncé

Soit f, g et h les fonctions définies sur $[1\,;6]$ par $f(x) = 1{,}5x^2 - 9x + 7{,}5$, $g(x) = -0{,}5x^2 + 3{,}5x - 5$ et $h(x) = f(x) - g(x)$.
On a obtenu la feuille de calcul et les paraboles suivantes avec un tableur.

	A	B	C	D
1	x	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$
2	1	0	-2	2
3	1,25	-1,4063	-1,4063	0
4	1,5	-2,625	-0,875	-1,75
5	1,75	-3,6563	-0,4063	-3,25
6	2	-4,5	0	-4,5
7	2,25	-5,1563	0,34375	-5,5
8	2,5	-5,625	0,625	-6,25
9	2,75	-5,9063	0,84375	-6,75
10	3	-6	1	-7
11	3,25	-5,9063	1,09375	-7
12	3,5	-5,625	1,125	-6,75
13	3,75	-5,1563	1,09375	-6,25
14	4	-4,5	1	-5,5
15	4,25	-3,6563	0,84375	-4,5
16	4,5	-2,625	0,625	-3,25
17	4,75	-1,4063	0,34375	-1,75
18	5	0	0	0
19	5,25	1,59375	-0,4063	2
20	5,5	3,375	-0,875	4,25
21	5,75	5,34375	-1,4063	6,75
22	6	7,5	-2	9,5



1. a) Indiquer une procédure permettant d'éviter, lors de la création de la feuille de calcul, de saisir une à une toutes les valeurs de x dans la colonne A.

b) Quelle formule a-t-on entrée dans la cellule B2 (respectivement C2) puis recopiée vers le bas, de B2 à B22 (respectivement de C2 à C22), pour obtenir les valeurs de $f(x)$ (respectivement de $g(x)$) ?
Quelle formule obtient-on en cliquant dans la cellule B15 (respectivement C15) ?

c) Quelle formule a-t-on entrée dans la cellule D2 puis recopiée vers le bas, de D2 à D22, pour obtenir les valeurs de $h(x)$? Quelle formule obtient-on en cliquant dans la cellule D15 ?

2. Par lecture graphique, déterminer successivement les racines :
a) de la fonction f ;
b) de la fonction g ;
c) de la fonction h.

3. Certaines lignes de la feuille de calcul permettent de confirmer les lectures graphiques de la question **2.**.
Indiquer les numéros de ces lignes :
a) pour la fonction f ;
b) pour la fonction g ;
c) pour la fonction h.

4. a) À l'aide du graphique ou de la feuille de calcul, ainsi que des résultats obtenus aux questions précédentes, étudier le signe de $f(x)$, puis celui de $g(x)$, pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;6]$.
(Présenter les résultats dans un tableau.)

b) En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$, puis celui de l'inéquation $g(x) < 0$.