Correction du contrôle n°2

Exercice 1 :

1)

a- f ‘ s’annule lorsque sa courbe représentative coupe l’axe des abscisses. Par lecture graphique on obtient : $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$

b- f ‘’ s’annule lorsque la courbe représentative de f ‘ présente une tangente horizontale. Par lecture graphique on obtient : $f''(x)=0 \Leftrightarrow x=-1$

c- f ‘’ (0) correspond au coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f ‘ au point d’abscisse 0. Cette tangente est la droite représentée sur le graphique. Par lecture graphique on obtient : $f''(0)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{1}{2}$

2)

a. On s’intéresse aux propriétés suivantes

P$_1$: *f* présente un extremum si et seulement si *f’* s’annule en changeant de signe

Or *f* ‘ s’annule en changeant de signe pour x = -2 donc *f* présente un extremum en x = -2

Les courbes 3 et 4 ne correspondent pas, l’extremum étant en x = 0.

P$_2$: *f* est croissante sur *I* si et seulement si *f* ‘ est positive sur *I*

Or *f* est positive sur [-2 ;+∞ [donc *f* est croissante sur [-2 ;+∞ [

La courbe 2 présente une fonction décroissante sur [-2 ;+∞ [

Par déduction ***f* est représentée par la courbe n°1**

P$_3$: *f* ‘ est croissante sur *I*, si et seulement *f* ’’ est positive sur *I*

Or *f* ‘ est croissante sur I=]- ∞ ;-1] et décroissante sur J=[-1 ;+∞[

donc *f* ‘’ s’annule en changeant de signe pour x = -1 en étant positive I et négative sur J.

La courbe 1 présente une fonction négative sur]-2,25 ;-1[donc elle ne convient pas (on le savait déjà car on l’a identifiée comme étant la courbe représentative de *f*). De même, la courbe n°2 présente une fonction négative sur]- ∞ ;-2,25[donc elle ne convient pas. De la même façon, la courbe n°4 présente une fonction négative sur I donc elle ne convient pas.

On observe qu’en revanche la courbe n°3 présente bien une fonction positive sur I=]- ∞ ;-1] et négative sur J=[-1 ;+∞[

b- $\boxed{\text{Propriété 4 : } f \text{ est convexe sur I si et seulement si } f\text{ ‘ est croissante sur I.}}$
Or d’après la courbe représentative de *f* ‘ on constate que *f* ‘ est croissante sur I=]- ∞ ;-1] et décroissante sur J=[-1 ;+∞[donc *f* est convexe sur I et concave sur I.

c- $\boxed{\text{Propriété 5 : } f \text{ présente un point d'inflexion en } x_0 \text{ si et seulement si } f\text{ ‘ présente un extremum en } x_0.}$
Or *f* ‘ présente un extremum en x_0 = - 1 donc C*f* présente un point d’inflexion en x_0 = -1.

Exercice 2 :

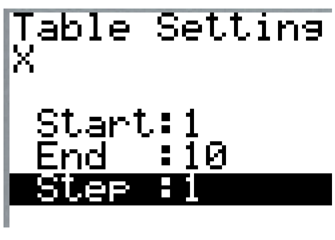
1)

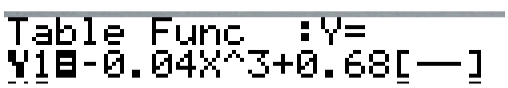
a- Calcul du taux d’endettement des ménages en 2009.

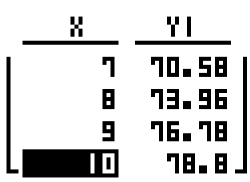
Sachant que x représente le nombre d’années depuis 2000, alors en 2009 on a x = 9.

Pour x = 9 on a : $f(9)=-0,04(9)^3+0,68(9)^2-0,06(9)+51,4=$ 76,78

On peut aussi utiliser la calculatrice en mode TABL pour vérifier son résultat.





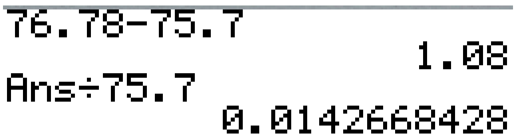


b- Calcul du pourcentage d’e[...] réel en 2009

Méthode : par rapport au taux réel signifie que le taux réel est la référence y_1 dans le cadre d'une évolution de y_1 vers y_2. On a alors un taux d'évolution t = $\frac{y_2 - y_1}{y_1}$

Ici on a y_1 = 75,7 et y_2

Le pourcentage d'erreur est donc $\frac{76,78 - 75,7}{75,7}$ = 0,014 soit 1,4 %



2)

a- f est définie, continue et deux fois dérivable sur I=[0 ;11] car c'est une fonction polynôme.

Pour tout $x \in I$ on a : $f'(x) = -0,12x^2 + 1,36x - 0,06$

$f''(x) = -0,24x + 1,36$

b- f est convexe sur I si et seulement si f '' est positive sur I.

f est concave sur I si et seulement si f '' est négative sur I.

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -0,24x + 1,36 = 0$$
$$\Leftrightarrow -0,24x = -1,36$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{-1,36}{-0,24} = \frac{17}{3} \approx 5,67$$

f est convexe sur [0 ;17/3] et concave sur [17/3 ;11]

x	0		17/3		11
$f''(x)$		+	0	-	

c- Cf présente un point d'inflexion en x_0 si et seulement si f '' s'annule en changeant de signe en x_0. D'après le tableau de signe précédent, il en résulte que Cf présente un point d'inflexion en x_0 =17/3

3) L'énoncé dit que le rythme de croissance est assimilé à f '. Or f ' est décroissante si et seulement si f '' est négative. D'après le tableau de signe précédent f '' devient négative dès que $x \geq \frac{17}{3}$ donc le rythme de croissance du taux d'endettement a commencé à diminué au bout de 5,67 année soit au cours de l'année 2006.

Exercice 3 :

Attention, x est exprimé en milliers d'unités et $C_T(x)$ en milliers d'euros. Une précision à 3 chiffres après la virgule au moins est donc indispensable.

Partie A

1) La fonction C_T est définie, continue et deux fois dérivable sur I = [0 ;12] car c'est une fonction polynôme.

Les variations de C_T dépendent du signe de sa dérivée, et pour tout $x \in I$ on a :

$C'_T(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$ nul pour x = 0 et strictement positif pour x > 10 par produit de 2 termes strictement positifs.

Il en résulte que C_T est strictement croissante sur I.

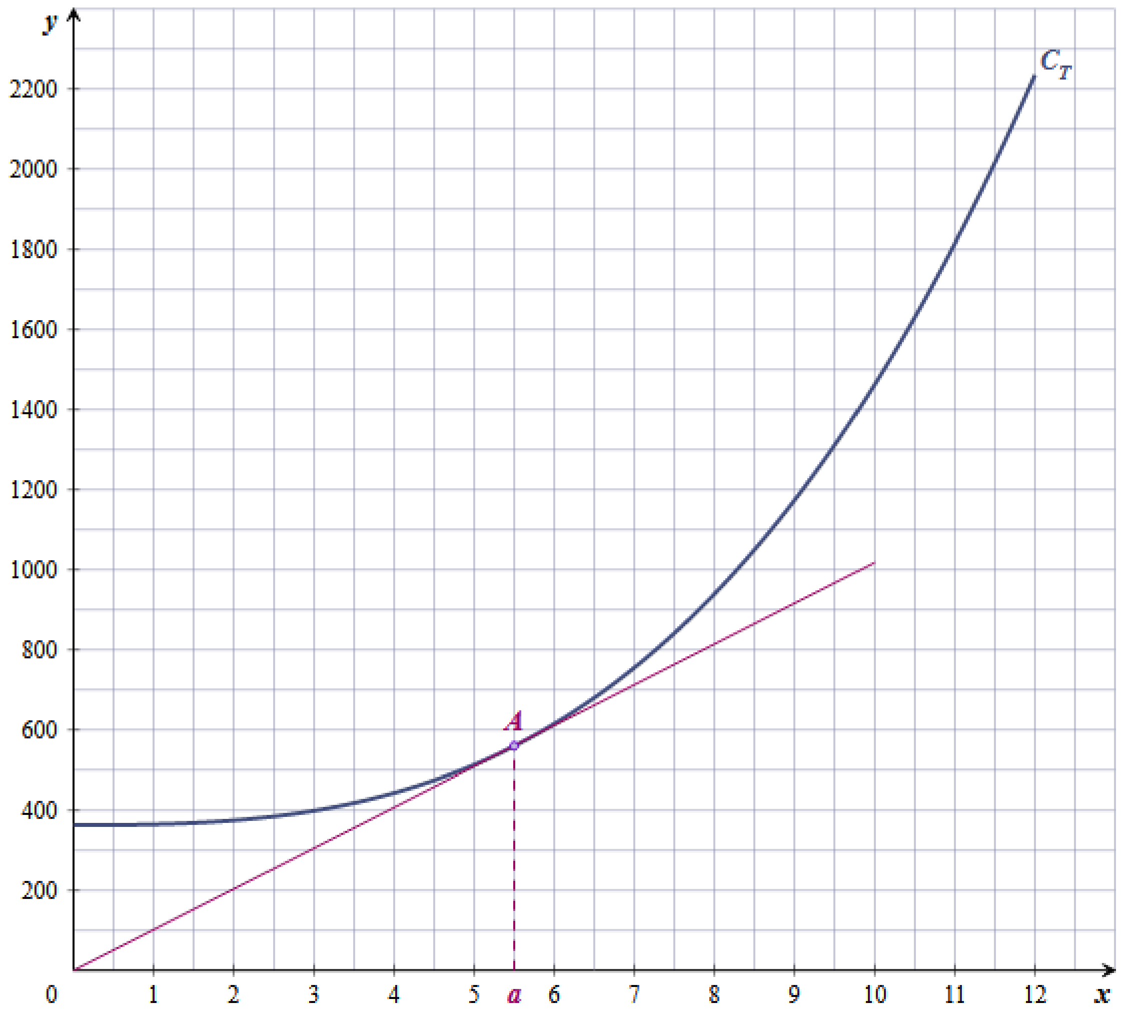
2) C_T est continue et strictement croissante sur $I = [0\,;12]$.
Or $C_T(0)=363$ et $C_T(12)=2235$ ainsi $C_T(0)<2000< C_T(12)$
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $C_T(x)=2000$ admet une unique solution α dans $I = [0\,;12]$.

3) L'entreprise souhaite limité son coût de production mensuel à 2000 milliers d'euros, cela revient à $C_T(x) \leq 2000$.
La calculatrice graphique en mode G-SOLV nous donne $\alpha \approx 11,461$ soir 11400 à une centaine d'articles près. (en effet si on arrondit à 11500, on dépasse les 2000 milliers….).

L'entreprise doit donc produire moins de 11400 articles.

Partie B

1) *On cherche une tangente passant par l'origine du repère. C'est une situation qui a été étudiée deux fois en exercices. Il est donc important de travailler à la maison sur les ressources proposées sur le blog du professeur.*
a)



b) *On a vu en exercice que le coût moyen est minimal lorsque la tangente à la courbe passe par l'origine du repère et que dans ce cas, le coût marginal est égal au coût moyen. Le tracé effectué à la question a) permet de conjecturer que le coût moyen est minimal pour $x = 5{,}5$. Il en résulte donc que C_M est décroissante sur $]0\,;5{,}5]$ et croissante sur $[5{,}5;12]$.*

Dans l'esprit de l'exercice (voir questions suivantes), on n'a pas à utiliser ce résultat qui doit à présent être connu. En revanche il faut donner du sens au quotient :

Voici ce qu'il fallait répondre :

Pour tout point M(x ;$C_T(x)$) de la courbe $\mathcal{C}_T$ avec $x\neq 0$, le coefficient directeur de la droite (OM) est : $m = \dfrac{C_T(x)}{x} = C_M(x)$

<u>Graphiquement</u>, le coût moyen de production (coefficient directeur) est minimal pour l'abscisse a du point A de la courbe $\mathcal{C}_T$ tel que la droite (OA) soit tangente à la courbe $\mathcal{C}_T$.

Avec la précision permise par le graphique, le coût moyen est minimal pour x = 5,5. Il en résulte donc que C_M est décroissante sur]0 ;5,5] et croissante sur [5,5;12].

2) pour $x\neq 0$ $C_M(x) = x^2 + x + \dfrac{363}{x}$

Pour tout $x\neq 0$ $C_M'(x) = 2x + 1 - \dfrac{363}{x^2}$

Réduisons au même dénominateur : $C_M'(x) = \dfrac{2x \times x^2 + 1 \times x^2 - 363}{x^2} = \dfrac{2x^3 + x^2 - 363}{x^2}$

OR $\dfrac{(2x-11)(x^2+6x+33)}{x^2} = \dfrac{2x^3 + 12x^2 + 66x - 11x^2 - 66x - 363}{x^2}$

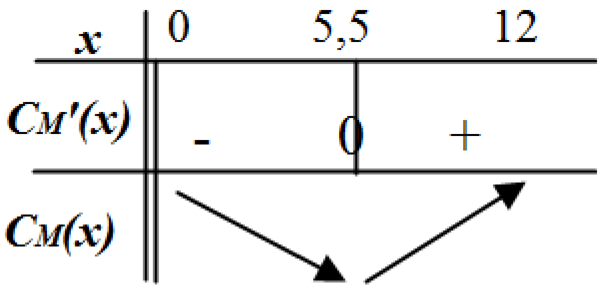
$= \dfrac{2x^3 + x^2 - 363}{x^2} = C_M'(x)$

On en déduit que la forme factorisée (très utile pour l'étude de signe..) de $C_M'(x)$ est $C_M'(x) = \dfrac{(2x-11)(x^2+6x+33)}{x^2} = \dfrac{2x^3 + 12x^2 + 66x - 11x^2 - 66x - 363}{x^2}$

4) Les variations de C_M dépendent du signe de sa dérivée. Or sur]0 ;12] C_M' est du signe de $(x^2+6x+33)(2x-11)$

- Le signe du premier facteur s'étudie à l'aide du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ avec a = 1 b = 6 c = 33 ; par calcul mental on a $\Delta < 0$ donc le trinôme est de signe constant, toujours du signe de a donc positif ici car a >0.

  Le produit est donc du signe du second facteur.
- Le second facteur est une expression du premier degré qui s'annule pour x =5,5



5) Le coût moyen est minimum pour x = 5,5.
Déterminons le coût marginal pour tout $x \in$]0 ;12]

On a $C_m(x) = C'_T(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$

Pour x = 5,5 on a : $C_m(5,5) = 5,5(3 \times 5,5 + 2)$ = 101,75

$C_M(5,5) = 5,5^2 + 5,5 + \dfrac{363}{5,5}$ = 101,75

On retrouve bien le fait que lorsque le coût moyen est minimum, le coût marginal est égal au coût moyen.