Chapitre 2 : Fonctions polynômes du second degré

I Différentes formes d'une expression du second degré

1) Forme développée

Définition : On appelle fonction polynôme du second degré ou encore trinôme du second degré toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression du type

(1) : $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, c sont 3 réels tels que $a \neq 0$

L'expression (1) est la forme développée de $f(x)$

Exemples :

- $f(x) = -x^2 + 3x - 2$ est une expression du second degré du type $ax^2 + bx + c$ avec $a = -1$; $b = 3$; $c = -2$
- $f(x) = -2x + 7x^2 + 4$ est une expression du second degré du type $ax^2 + bx + c$ avec $a = 7$; $b = -2$; $c = 4$ En effet $f(x) = 7x^2 - 2x + 4$ en respectant l'ordre décroissant des puissances de x
- $f(x) = x^2$ est une expression du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $a = 1$; $b = 0$; $c = 0$

2) représentation graphique

Définition : Soit f la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq$

La courbe représentative de f dans un repère du plan est une parabole $\mathcal{P}$ dont le sommet S a pour abscisse $x_S = -\dfrac{b}{2a}$

On note souvent $x_S = \alpha$, $\boxed{\alpha = -\dfrac{b}{2a}}$

Propriété. Dans un repère orthogonal, la parabole $\mathcal{P}$ admet pour axe de symétrie la droite passant par le sommet S et parallèle à l'axe des ordonnées.

- si $a < 0$: $\mathcal{P}$ est tournée vers le bas
- si $a > 0$: $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut.

Si $a > 0$

$\mathscr{P}$ est « orientée vers le haut »

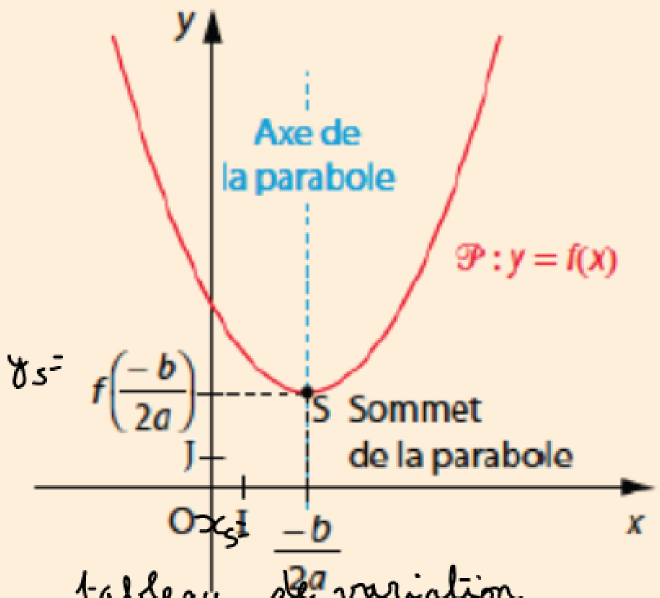


tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad -\dfrac{b}{2a}$ $\qquad +\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\searrow$ $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ $\nearrow$

Si $a < 0$

$\mathscr{P}$ est « orientée vers le bas »

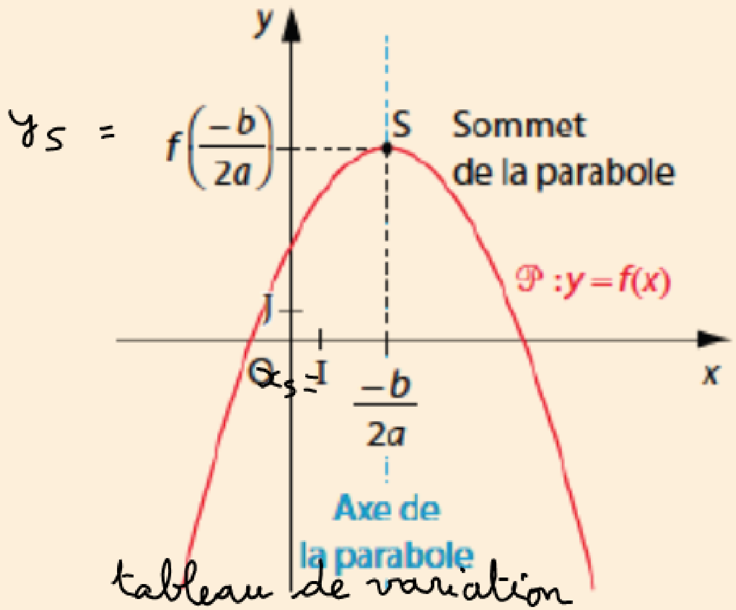


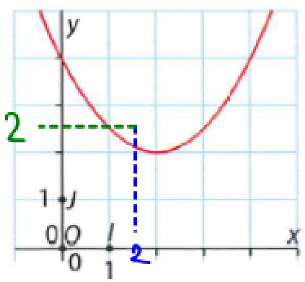
tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad -\dfrac{b}{2a}$ $\qquad +\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\nearrow$ $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ $\searrow$

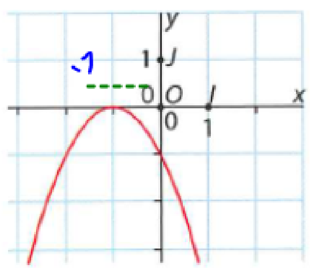
Application : page 126

5 Chacun des tracés suivants est celui de la parabole représentative d'une fonction polynôme f de degré 2, définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.
Pour chacun des cas, préciser le signe de a et dresser le tableau de variation de f.

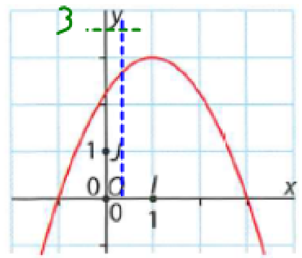
a)



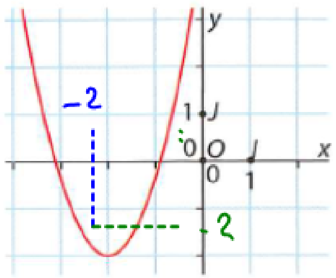
b)



c)



d)



a) $a > 0$ car $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↘	2	↗	

b) $a < 0$ car la parabole est tournée vers le bas

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

c) $a < 0$ car la parabole est tournée vers le bas

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		↗	3	↘	

d) $a > 0$ car $\mathcal{P}$ - tournée vers le haut

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		↘	-2	↗	

8 Chacun des tableaux de variation suivants est celui d'une fonction polynôme f de degré 2, définie pour tout réel x par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où $a \neq 0$.
Pour chacun des cas, préciser le signe de a et tracer à main levée une parabole possible qui pourrait être représentative de f.

a)

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		↗	0	↘	

b)

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		↘	-1	↗	

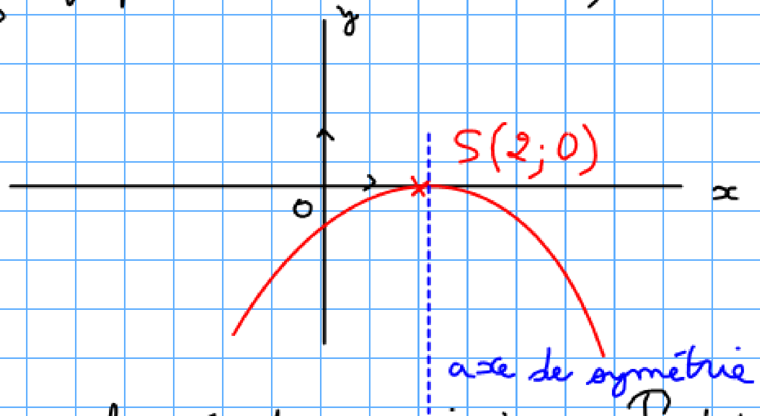
c)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		↘	1	↗	

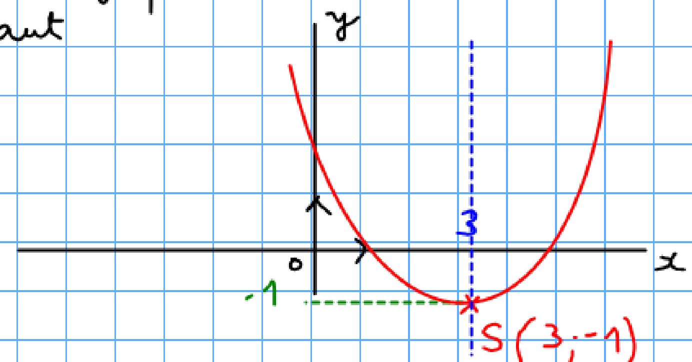
d)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$		↗	-3	↘	

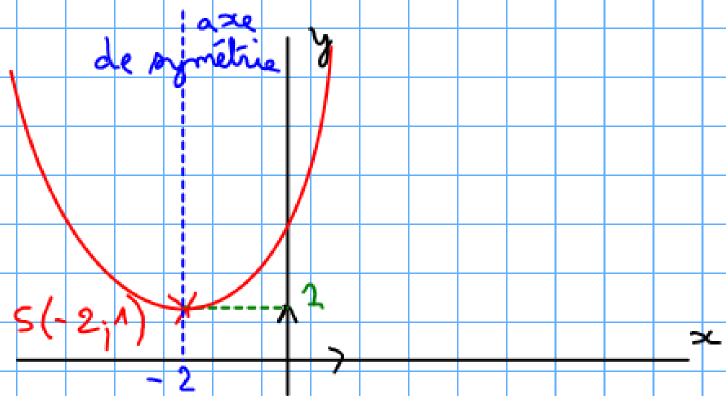
a) $a < 0$ car f présente un maximum ; $\mathcal{P}$ est tournée vers le bas



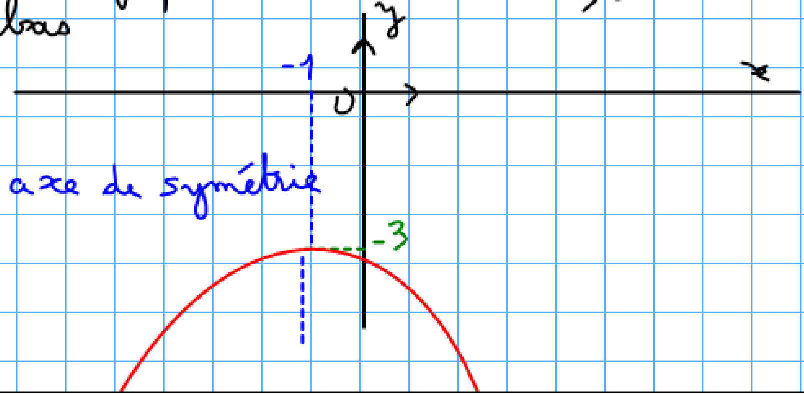
b) $a > 0$ car f présente un minimum ; $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut



c) $a > 0$ car f présente un minimum ; $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut

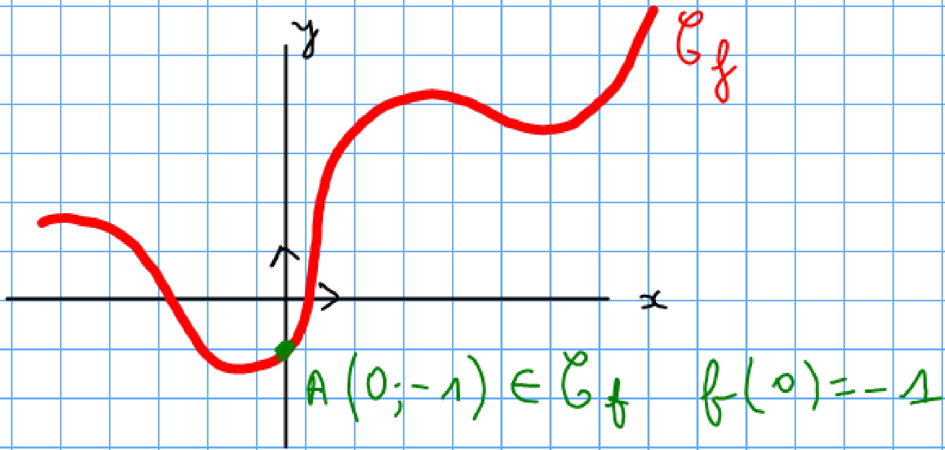


d) $a < 0$ car f présente un maximum ; $\mathcal{P}$ est tournée vers le bas



Remarque : Ordonnée à l'origine

On appelle ordonnée à l'origine, l'ordonnée du point d'intersection d'une courbe avec l'axe des ordonnées.



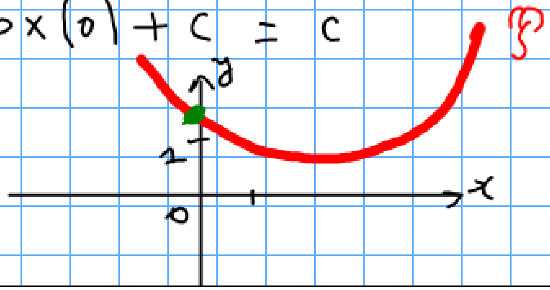
graphiquement, l'ordonnée à l'origine est égale à -1 et correspond à $f(0)$.

ordonnée à l'origine d'une fonction du second degré :

Soit f une fonction du second degré définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2+bx+c$

on a alors $f(0) = a\times(0)^2 + b\times(0) + c = c$

$f(0) = c$



$a>0$ car $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut

$c = 1,5$

3) Forme canonique

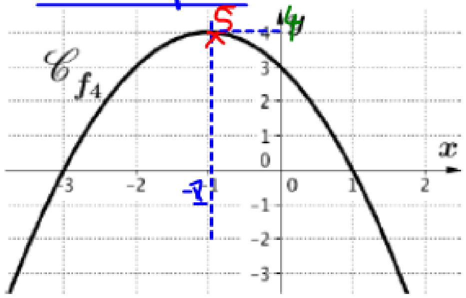
Propriété et définition : Pour toute fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, on peut trouver deux nombres réels α et β tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$

Cette expression est appelée forme canonique de f et on a :

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \qquad \beta = f(\alpha) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

Le sommet de la parabole a pour coordonnées $S(\alpha;\beta)$

Exemple :



Les coordonnées du sommet sont $S(-1;4)$ donc $\alpha = -1$

$\beta = 4$

$$f(x) = a\left(x-(-1)\right)^2 + 4$$
$$= a(x+1)^2 + 4$$

Déterminons la valeur de a

Par lecture graphique, on sait que $f(1) = 0$ or $f(1) = a \times (1+1)^2 + 4$

$= a \times 2^2 + 4$

$= 4a + 4$

donc $4a + 4 = 0 \iff 4a = -4 \iff \frac{4a}{4} = \frac{-4}{4}$

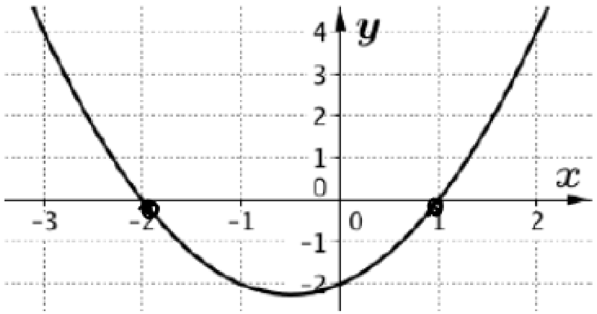
$\iff a = -1$

Mohammed 5

Exercice 2.4 **Who's who ?**

a) Laquelle des trois fonctions suivantes est représentée ci-dessous ? Pourquoi ?

$f(x) = -x^2 + x - 2$ $\qquad g(x) = x^2 + x + 1$ $\qquad h(x) = x^2 + x - 2$



$a = 1 \quad b = 1 \quad c = -2$

b) Dresser le tableau de variation

c) Dresser le tableau de signe

d) En déduire les solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$

a) graphiquement l'ordonnée à l'origine est -2, on en déduit que $c = -2$

$g(x)$ ne convient donc pas.

ensuite, on observe que $\mathcal{P}$ est tournée vers le haut donc on doit avoir $a > 0$

$f(x)$ ne convient pas.

Donc l'expression algébrique correspondant à cette parabole est $h(x) = x^2 + x - 2$

<u>Remarque</u> : graphiquement les antécédents de 0 sont -2 et 1. En cas de doute sur l'expression algébrique, on aurait pu vérifier qu'on avait bien $h(-2) = 0$ et $h(1) = 0$

b)

x	$-\infty$		$\alpha = -0{,}5$		$+\infty$
$h(x)$		$\searrow$	$\beta = -2{,}25$	$\nearrow$	

$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2\times 1} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

$\beta = h(\alpha) = h(-0{,}5)$
$= (-0{,}5)^2 + (-0{,}5) - 2$
$= -2{,}25$

c)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Adel 5

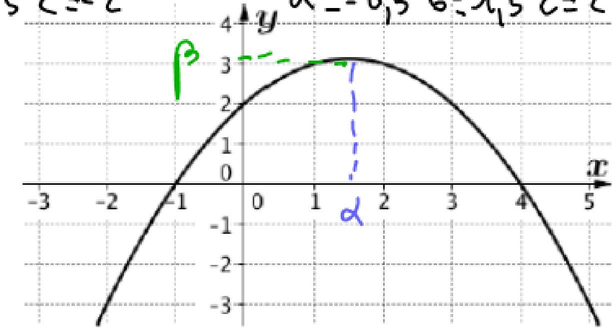
d) $h(x) \geq 0 \iff x \in \left]-\infty ; -2\right] \cup \left[1 ; +\infty\right[$

Exercice 2.5 **Who's who ?**

Laquelle des trois fonctions suivantes est représentée ci-dessous ? Pourquoi ?

$f(x) = -3x^2 + 5x - 2$ $\quad g(x) = -0.5x^2 + 1.5x + 2$ $\quad h(x) = 5x^2 + 2x + 2$

$a = -3$ $b = 5$ $c = -2$ $\quad a = -0{,}5$ $b = 1{,}5$ $c = 2$ $\quad a = 5$ $b = 2$ $c = 2$



graphiquement l'ordonnée à l'origine étant égale à 2 on doit avoir $c = 2$ donc $f(x)$ ne convient pas.

On observe que $\mathcal{C}_f$ est tournée vers le bas donc on doit avoir $a < 0$. Par conséquent $h(x)$ ne convient pas.

L'expression algébrique qui convient est donc $g(x) = -0{,}5x^2 + 1{,}5x + 2$

x	$-\infty$		$\alpha = 1{,}5$		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	$\beta = 3{,}125$	$\searrow$	

$\alpha = \dfrac{-b}{2a} = -\dfrac{1{,}5}{2 \times (-0{,}5)} = \dfrac{-1{,}5}{-1}$

$= 1{,}5$

$\beta = g(\alpha) = g(1{,}5)$

$= -0{,}5 \times (1{,}5)^2 + 1{,}5 \times 1{,}5 + 2$

$= 3{,}125$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$g(x) \geq 0 \iff x \in [-1;4]$

Jade 5

II Équations du 2e degré

1 Vocabulaire

Définitions

On appelle `équation du 2e degré` d'inconnue x toute équation pouvant se mettre sous la forme :

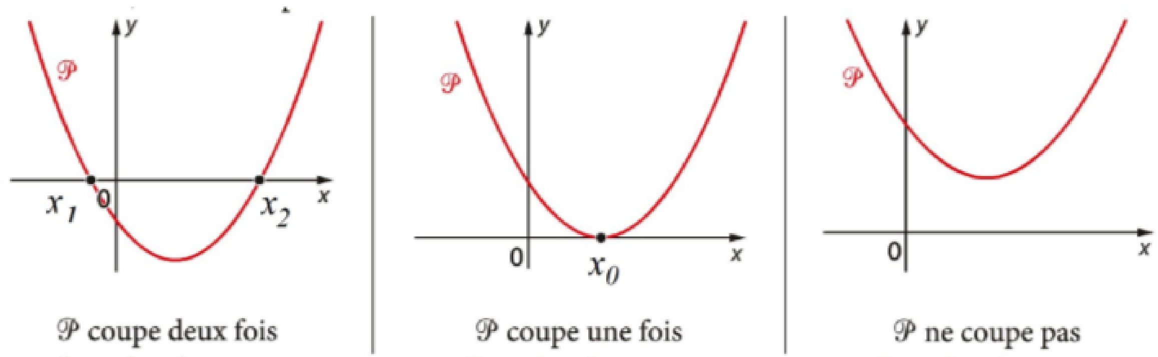
$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a \neq 0.$$

On appelle `racine` d'une fonction f toute solution de l'équation $f(x) = 0$. (Autrement dit tout antécédent de 0 par f.)
On appelle `discriminant` du trinôme $ax^2 + bx + c$ le nombre réel noté Δ et défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

2 Aspect graphique

Graphiquement, on constate que 3 cas de figure peuvent se présenter :
l'équation $f(x) = 0$ peut avoir deux, une ou aucune solution :



$\mathscr{P}$ coupe deux fois l'axe des abscisses.	$\mathscr{P}$ coupe une fois l'axe des abscisses.	$\mathscr{P}$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$

Résolution graphique d'une équation de degré 2

3 Résolution algébrique

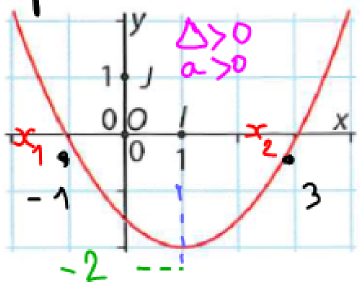
Propriétés

Soit $ax^2+bx+c=0$ avec $a \neq 0$ une équation de degré 2 et Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.
Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de cette équation.
Si $\Delta > 0$, alors $\mathscr{S} = \{x_1\ ;\ x_2\}$ avec $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
Si $\Delta = 0$, alors $\mathscr{S} = \{x_0\}$ avec $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$

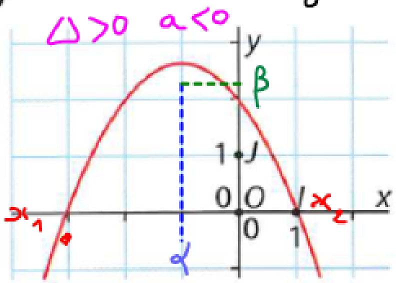
Application : Exercice n°45 p 128

Dans chaque cas, faire une analyse sur le discriminant et extraire tous les renseignements possibles

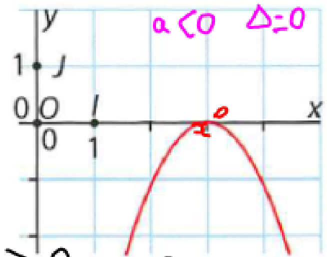
a)



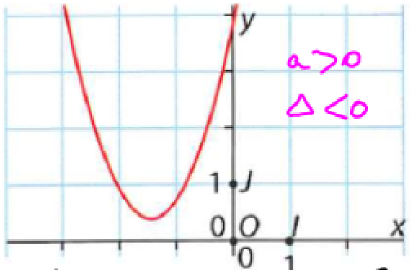
b)



c)



d)



a) • Γ coupe 2 fois l'axe des abscisses donc $\Delta > 0$
• l'équation $f(x) = 0$ possède 2 solutions (0 possède 2 antécédents par f)
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = 3$
• Γ est tournée vers le haut donc $a > 0$
• $c < 0$ car l'ordonnée à l'origine est négative.
• $\alpha = 1$ $\beta = -2$
• la forme canonique de $f(x)$ est
$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$
$= a(x-1)^2 - 2$
• la forme factorisée de $f(x)$ est $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
$f(x) = a(x+1)(x-3)$

b) • $\Delta > 0$ • $x_1 = -3$ $x_2 = 1$
• $a < 0$ • $c = 2$
• $\alpha = -1$
• $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
$= a(x+3)(x-1)$
Calculons a à l'aide de $f(0) = c = 2$
$f(0) = a(0+3)(0-1) = a \times 3 \times (-1) = -3$
donc $-3a = 2 \Leftrightarrow a = -2/3$

c) • $\Delta = 0$ car Γ coupe 1 seule fois l'axe des abscisses
• $a < 0$ • $c < 0$ • $x_0 = \alpha = 3$. $\beta = 0$
• $f(x) = a(x-\alpha)^2$
$= a(x-3)^2$
• Déterminons a à l'aide de $f(2) = -1$. $f(2) = a(2-3)^2 = a$
donc $a = -1$

d) • $\Delta < 0$ car Γ ne coupe pas l'axe des abscisses : 0 n'a pas d'antécédent par f
• Γ est tournée vers le haut donc $a > 0$ • $c > 0$ • $\alpha < 0$ • $\beta < 0$

Exemples d'équations du second degré

Exemple 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $9x^2 - 6x + 1 = 0$

on a une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 9$; $b = -6$; $c = 1$

on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ $\quad \Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 36 - 36 = 0$

$\Delta = 0$ donc l'équation admet une unique solution $x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{+6}{2 \times 9} = \dfrac{6}{18} = \dfrac{1}{3}$

$= \alpha$

$$\boxed{f(x) = 0 \iff x = \frac{1}{3}}$$

Remarque :
- lorsque $\Delta = 0$ cela signifie que $f(x)$ est une identité remarquable
- la forme factorisée de $f(x)$ et la forme canonique sont identiques $\quad f(x) = a(x - x_0)^2 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2$

Exemple 2 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $0,5x^2 + 2x = 2,5$

on se ramène à une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$.

Pour cela, on transpose le second membre dans le premier membre

$0,5x^2 + 2x = 2,5 \iff 0,5x^2 + 2x - 2,5 = 0$ on a une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$

avec $a = 0,5$; $b = 2$; $c = -2,5$

on calcule le discriminant : $\Delta = b^2 - 4ac$