Chapitre 4 : Probabilités

I Quelques rappels

1. Vocabulaire des événements

Définitions :

- L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers.
  Il sera généralement noté Ω et les différentes issues (ou éventualités) seront notées $e_1, e_2, \dots, e_n$.
  On a donc $\Omega = \{e_1 ; e_2 ; \dots ; e_n\}$.
- Un événement est une partie de l'univers Ω.
- Un événement élémentaire est un événement qui ne contient qu'une seule des issues. (est réalisé par une seule issue
- L'événement impossible ne contient aucune éventualité. C'est l'ensemble vide $\emptyset$.
- L'événement certain contient toutes les éventualités. Il est égal à l'univers Ω.

Exemple :

Un sac de sucettes contient deux sucettes à la fraises, une sucette à la menthe et deux sucettes au caramel.
Yohann tire successivement deux sucettes dans le sac.

- L'univers Ω est représenté par l'arbre de la figure 1.

1ère épreuve 2ème épreuve Expérience à 2 épreuves

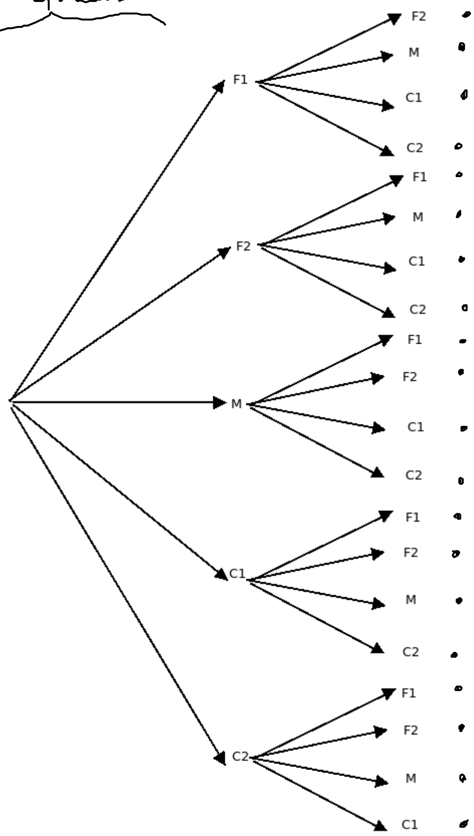


FIGURE 1 – Un exemple d'arbre à partir d'un tirage successif

Il contient 20 issues (ou éventualités) différentes. qui constituent chacune un événement élémentaire

- L'événement $\{F1 - M\}$ est élémentaire.
- L'événement « Obtenir deux sucettes à la menthe » est impossible.
- Des exemples d'événement :

A : « La première sucette est à la menthe » 4 issues réalisent A

B : « La deuxième sucette est au caramel » 8 issues réalisent B

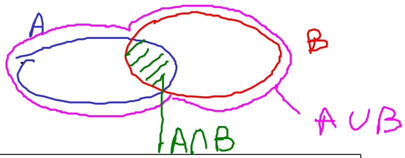
C : « La deuxième sucette est à la menthe. » 4 issues réalisent C

On a :

– A = $\{M-F1\,;\, M-F2\,;\, M-C1\,;\, M-C2\}$
– B = $\{F1-C1\,;\, F2-C1\,;\, M-C1\,;C2-C1\,;\, F1-C2\,;\, F2-C2\,;\, M-C2\,;C1-C2\}$
– C = $\{F1-M\,;\, F2-M\,;C1-M\,;\, C2-M\}$

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω.
- L'événement A∩B est l'événement « A et B ».
- L'événement A∪B est l'événement « A ou B ».
- L'événement $\overline{\text{A}}$ est l'événement « contraire de A » ou « non A ». $\overline{A}$ se lit "A barre"
- Deux événements A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps, c'est-à-dire si A ∩ B = ∅.

Exemple : On reprend les notations de l'exemple précédent.
- A∩B est l'événement « Obtenir une première sucette à la menthe et une deuxième sucette au caramel ».
  A ∩ B = $\{M-C1\,;\, M-C2\}$
  Les événements A et B ne sont pas incompatibles.
- A ∩ C = ∅ A∩C : "on tire 2 sucettes à la menthe" A∩C est un événement impossible
  Les événements A et C sont incompatibles.
- A∪B est l'événement « Obtenir une première sucette à la menthe et une deuxième sucette au caramel ».
  A∪B = $\{M-F1\,;\, M-F2\,;\, M-C1\,;\, M-C2\,;\, F1-C1\,;\, F2-C1\,;C2-C1\,;\, F1-C2\,;\, F2-C2\,;\, C1-C2\}$
- $\overline{\text{A}}$ est l'événement « La première sucette n'est pas à la menthe. »



2 Loi de probabilité

Définitions :
- Chaque événement élémentaire $\{e_i\}$ est affecté d'une probabilité, c'est-à-dire d'un nombre noté $p\,(e_i)$ tel que :

$$0 \leq p\,(e_i) \leq 1 \qquad \text{et} \qquad p\,(e_1) + p\,(e_2) + \cdots + p\,(e_n) = 1$$

$\sum_{i=1}^{n} p(e_i) = 1$

- On appelle loi de probabilité la donnée des $p\,(e_i)$ vérifiant ces conditions.
- Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dits qu'ils sont équiprobables, ou que la loi de probabilité p est équiprobable (ou équirépartie).

Exemples :

1. On lance un dé à 6 faces non pipé. On obtient la loi de probabilité suivante :

e_i	1	2	3	4	5	6
$p\,(e_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

   Il s'agit d'une loi équiprobable (ou équirépartie).
2. L'expérience aléatoire de l'exemple du 1.1 est équiprobable et chacun des événements élémentaires à une probabilité de $\frac{1}{20}$.

Remarque : Dans le cas de l'équiprobabilité, si l'univers Ω comporte n issues, on a :

$$p\,(e_i) = \frac{1}{n}$$

3 Probabilité d'un événement

Propriété :
La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent. On la note $p\,(A)$.
On a donc $0 \leq p\,(A) \leq 1$.

Remarques :

1. $p\,(\Omega) = 1$. L'ensemble Ω est un événement certain.
2. $p\,(\varnothing) = 0$. L'ensemble vide est un événement impossible.

3. Dans le cas de l'équiprobabilité, si l'univers Ω comporte n issues, on a :

$$p(e_i) = \frac{1}{n} \qquad \text{et} \qquad p(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

Propriété :

1. Si A et B sont deux événements :

$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \qquad \text{et} \qquad p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A})$$

2. Si les événements A et B sont incompatibles :

$$p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$$

Exemple : On reprend les notations de l'exemple du 1.1
- $p(\mathrm{A}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ et $p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A}) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$.
- $p(\mathrm{B}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ et $p(\mathrm{C}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$
- $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$ et $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) - p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{10} = \frac{2+4-1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$
- Comme les événements A et C sont incompatibles, $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{C}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{C}) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

Exercices : 1, 2, 3 page 185[1] [TransMath]

II Probabilités conditionnelles

1 Un exemple pour comprendre

Exemple : Pour fabriquer un objet, un artisan achète des pièces auprès de trois fournisseurs $A1$, $A2$ et $A3$.
25 % des pièces proviennent de $A1$, 40 % de $A2$ et le reste de $A3$.
5 % des pièces de $A1$ ont un défaut, 10 % de celles de $A2$ ont un défaut, de me que 0, 1 % de celle de $A3$.
On prend au hasard une de ces pièces.
Calculer la probabilité de l'événement D : « la pièce présente un défaut ».

L'univers Ω est l'ensemble des pièces fabriquées par $A1$, $A2$ et $A3$. On suppose qu'il comporte n éléments.
On note A_i l'événement : « la pièce provient du fournisseur Ai ».
On modélise la situation par un arbre (voir figure 2).

L'événement représenté par le chemin $-A_1 - D$ est l'événement « la pièce provient du fournisseur $A1$ et présente un défaut », c'est-à-dire $A_1 \cap D$.

Propriété : la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités portées par les branches qui conduisent à cette issue.

$$* \quad p(A_1 \cap D) = 0,25 \times 0,05 = p(A_1) \times p_{A_1}(D) = 0,0125$$

probabilité de D sachant A_1 : c'est une probabilité conditionnelle

Par suite, on a :

$$\begin{aligned} p(D) &= p(A_1 \cap D) + p(A_2 \cap D) + p(A_3 \cap D) \\ &= p(A_1) \times p_{A_1}(D) + p(A_2) \times p_{A_2}(D) + p(A_3) \times p_{A_3}(D) \\ &= 0,25 \times 0,05 + 0,4 \times 0,1 + 0,35 \times 0,001 = 0,05285 \end{aligned}$$

* La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des issues qui le réalisent (formule des probabilités totales)

Exercices : 1, 2 page 190 ; 19, 20 page 196 et 22, 23 page 197[2] [TransMath]

1. Rappels sur les probabilités.
2. Construire un arbre pondéré.

3 issues réalisent l'événement D.
$D = \{A_1 \cap D ; A_2 \cap D ; A_3 \cap D\}$
$p(D) = p(A_1 \cap D) + p(A_2 \cap D) + p(A_3 \cap D)$

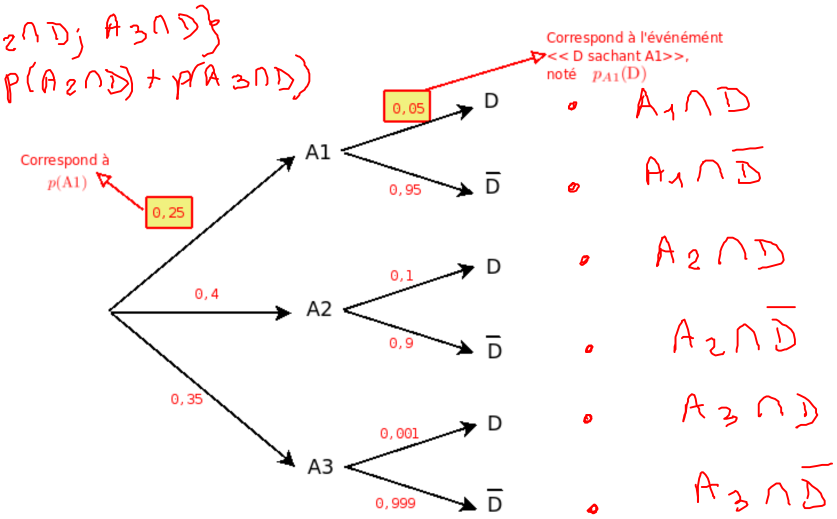


FIGURE 2 – Probabilités conditionnelles : utilisation d'un arbre

2 Définitions – Propriétés

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω, avec $p(A) \neq 0$.
La probabilité que B se réalise sachant que A est réalisé (ou, plus simplement, B sachant A) est le nombre noté $p_A(B)$ défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarques :

1. Dans le cas d'une loi équirépartie, on a :
$$p_A(B) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A \cap B}{\text{nombre d'éléments de } A}$$
2. $p_A(B)$ représente la probabilité de l'événement B dans l'univers A.

Propriété 1 : Soient A et B deux événements, avec $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.
On a :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$$

Remarque : Cette propriété découle directement de la définition. Elle permet de calculer la probabilité d'un événement représenté par une chemin sur un arbre de probabilités (voir figure 2).

Exercices : 24, 27 page 197 [3] – 3, 4 page 191 ; 25, 26 page 197 ; 28, 29, 32, 33 page 198 ; 34, 36 page 199 ; 38, 39, 42 page 200 et 43, 45 page 201 [4] [TransMath]

Propriété 2 : Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements deux-à-deux incompatibles et $B = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.
Alors :

$$p(B) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots + p(A_n)$$

Remarque : Ce n'est qu'une généralisation de la propriété du 1.3 concernant les événements incompatibles.

Définition : Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n événements.
On dit que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω si les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont deux-à-deux incompatibles et si $\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

Conséquence : Formule des probabilités totales
Soit $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une partition de l'univers Ω et B un événement. On a :

$$\begin{array}{rcl} p(B) & = & p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \cdots + p(B \cap A_n) \\ & \text{où} & p(B \cap A_i) = p(A_i) \times p_{A_i}(B) \end{array}$$

3. Utilisation des formules.
4. Exploiter un arbre pondéré.

Remarque : On utilise souvent cette formule à l'aide d'un arbre pondéré, en suivant les règles suivantes :
- la somme des probabilités issues d'un même nœud est égal à 1 ;
- la probabilité d'un événement représenté par un chemin est égal au produit des probabilités des branches qui le composent (c'est la propriété 1) ;
- la probabilité d'un événement est égal à la somme des probabilités de tous les chemins qui y aboutissent (c'est la formule des probabilités totales).

Exercices : 5, 6 page 192 ; 47, 49, 51 page 202 et 53, 55, 56 page 203 [5] – 50 page 202 [6] – 57page 204 et 59, 60 page 205 [7] – 79 page 213 [8] – 80 page 213 [9] [TransMath]

Module : Exercice 11 page 194 [10] [TransMath]

Exercices : 63 page 206 ; 66 page 207 et 68, 69, 70 page 208 [11] – 65 page 207 [12] [TransMath]

Références

[TransMath] TransMATH Term ES Spécifique / L Spécialité, édition 2012 (Nathan)

4, 5, 6

5. Utiliser les probabilités totales.
6. Algorithmique.
7. Utilisation d'un tableau.
8. QCM.
9. Type BAC.
10. Utiliser les formules pour obtenir des probabilités conditionnelles.
11. Inversion d'un arbre pondéré.
12. Algorithmique.