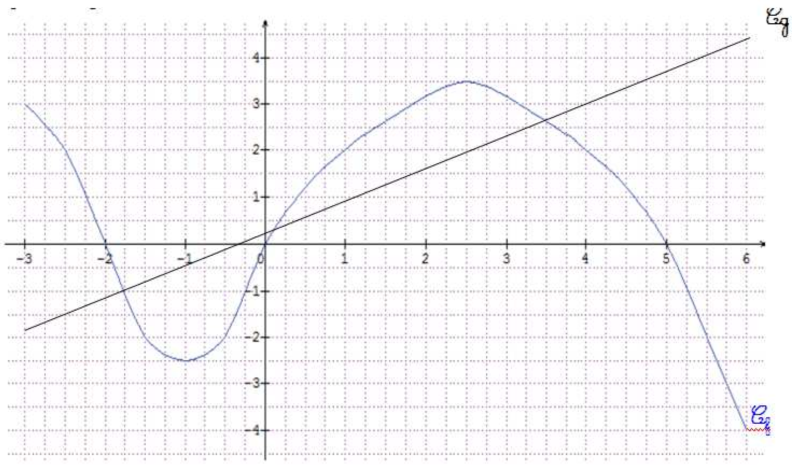
Mathématiques - Devoir surveillé n° 2 (composition trimestrielle)
Correction détaillée

EXERCICE 1 (11,5 *points*)

On considère ci-dessous les représentations graphiques d'une fonction *f* et d'une fonction *g* dans un repère orthogonal.
À partir du graphique, répondre aux questions suivantes :



1. Quelle est la nature de la fonction *g ?sa représentation est une droite non verticale, c'est donc une fonction affine.*
2. Déterminer le domaine de définition de la fonction *f* . D_f *= [-3 ; 6]*
3. Déterminer l'image de 2,5 par la fonction *f* . *f (2,5) =3,5*
4. Déterminer *f* (–2). *f* (–2) = *0.*
5. Déterminer les antécédents éventuels de – 2 par la fonction *f* .
$$f(x) = -2 \Leftrightarrow x \in \{-1,5;-0,5;5,5\}$$
6. Dresser le tableau de variation de la fonction *f* .

x	– 3		– 1		2,5		6
$f(x)$	3	↘	1 −2,5	↗	3,5	↘	−4

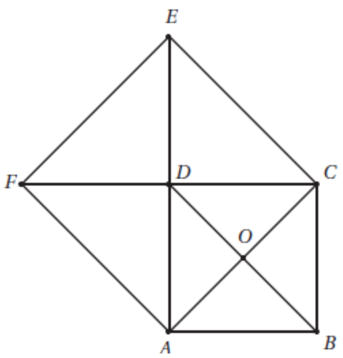
7. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes : a) $f(x) > 3 \Leftrightarrow x \in]1,875;3,125[$
b) $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow x \in [-2,5;1] \cup [4;6]$.
8. A quel intervalle appartient *f* (*x*) lorsque 1 < *x* < 5 ? $0 < f(x) \leq 3,5$ *donc* $f(x) \in]0;3,5]$
9. Quels sont les nombres qui ont un seul antécédent par *f* ?
Pour tout $k \in [-4;-2,5[$ *ou pour k = 3,5 l' équation f(x) = k admet une unique solution.*
10. Dresser le tableau de signe de la fonction *f* selon les valeurs de *x*.

x	– 3		– 2		0		5		6
$f(x)$		+	0	–	0	+	0	–	

11. Résoudre l'inéquation *f* (*x*) > *g*(*x*) : $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x \in [-3;-1,75[\cup]0,125;3,5[$

EXERCICE 2 (4 *points*)

On considère la figure ci-dessous :



1. Donner les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère (A ;B ;D)

$A(0;0)$ $B(1;0)$ $0(0,5;0,5)$ $C(1;1)$ $D(0;1)$ $E(0;2)$ $F(-1;1)$

2. Donner les coordonnées de tous les points de la figure dans le repère (O ;C ;D) .

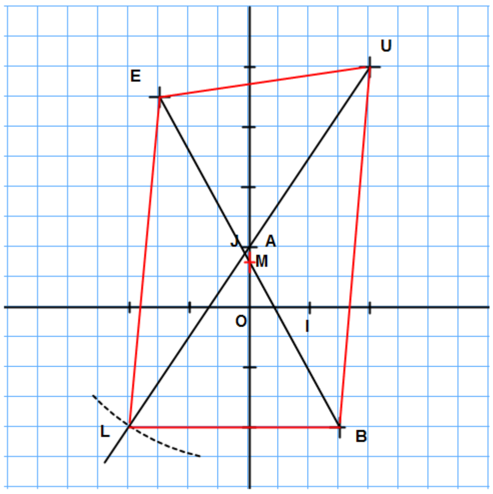
$A(-1;0)$ $B(0;-1)$ $0(0;0)$ $C(1;0)$ $D(0;1)$ $E(1;2)$ $F(-1;2)$

EXERCICE 3 (4 *points*)

Dans un repère orthonormé (0 ;I ;J), on donne les points :

$A(0\ ;1)$ $B(1{,}5\ ;-2)$ $E(-1{,}5\ ;3{,}5)$ $U(2\ ;4)$

1. Placer les points dans un repère que l'on complètera tout au long de l'exercice.



2. Le point A est-il le milieu du segment [BE] ? Justifier votre conjecture par un calcul.

On conjecture d'après le graphique, que A n'est pas le milieu de [BE].
Soit M le milieu de [BE], calculons les coordonnées de M.

$$x_M = \frac{x_B + x_E}{2} = 0 = x_A \ ; \qquad y_M = \frac{y_B + y_E}{2} = 0{,}5 \neq y_A$$

$M \neq A$ donc la conjecture est vérifiée.

3. Soit L le symétrique du point U par rapport au point A.

a) Construire le point L à la règle et au compas en laissant apparents les traits de construction.
b) Déterminer par le calcul les coordonnées du point L.

L est le symétrique de U par rapport à A donc A est le milieu de [LU]. On a donc

$$x_A = \frac{x_L + x_U}{2} \Leftrightarrow 2x_A = x_L + x_U \quad \Leftrightarrow x_L = 2x_A - x_U = -2$$ *; de la même façon on a :*

$$y_L = 2y_A - y_U = -2 \qquad L(-2\ ;\ -2)$$

4. Le quadrilatère BLEU est-il un parallélogramme ? Justifier en précisant la propriété utilisée.

On sait que l*es diagonales de BLEU sont [BE] et [LU]. A est le mileu de [LU] mais n'est pas le milieu de [BE]. Or dans un parallélogramme, les diagonales se coupent en leur milieu. Donc BLEU n'est pas un parallélogramme.*

EXERCICE 4 (6,5 *points*)

1. **Question de cours**

a) Citer les 3 identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

b) Expliquer ce qu'est une équation produit, puis en donner un exemple.

Une équation produit est une équation dans lequel le premier membre est un produit de facteurs et le second membre est égal à zéro. Pour la résoudre, on applique la règle du produit nul : un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul.

Exemple : A x B = 0 ⇔ A = 0 ou B = 0.

c) Expliquer de qu'est une équation du premier degré, puis en donner un exemple.

Une équation du premier degré est une équation dans laquelle l'inconnue souvent notée x intervient avec un exposant égal à 1.

Exemple : 2x + 3 = 5.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $2x + 7 = 6x - 8$

b) $(7x+2)(13-x) = 0$

C'est une équation du premier degré d'inconnue x.

$$2x+7=6x-8 \iff 2x-6x=-8-7$$
$$\iff -4x=-15$$
$$\iff \frac{-4x}{-4}=\frac{-15}{-4}$$
$$\iff x=\frac{15}{4}$$

C'est une équation produit.

$$(7x+2)(13-x)=0 \iff 7x-2=0 \text{ ou } 13-x=0$$
$$\iff 7x=2 \text{ ou } 13=x$$
$$\iff 7x=2 \text{ ou } x=13$$
$$\iff x=\frac{2}{7} \text{ ou } x=13$$

EXERCICE 5 (4 *points*)

On considère l'algorithme suivant :

VARIABLES :		x et y sont des nombres réels
INITIALISATION :	1	Lire x
	2	Lire y
TRAITEMENT :	3	Affecter à x la valeur $x + 2y$
	4	Affecter à y la valeur $2x - 13$
	5	Affecter à x la valeur $3x - y$
SORTIE :	6	Afficher y
	7	Afficher x

On rappelle que l'instruction « Lire x » signifie que l'ordinateur va lire la valeur saisie au clavier par l'utilisateur et la stocker dans la variable x.

1. A l'étape 1, l'utilisateur saisit –12 pour x et à l'étape 2, il saisit 8 pour y .
   Compléter le tableau suivant en indiquant le contenu des variables à chaque étape.

	x	y
Etape 1	*– 12*	---
Etape 2	*– 12*	*8*
Etape 3	*4*	*8*
Etape 4	*4*	*– 5*
Etape 5	*17*	*– 5*
Etape 6	Affichage : *– 5*	
Etape 7	Affichage : *17*	

2. De façon générale :

a) Quelle est l'expression de la variable x en fonction de y , retournée par cet algorithme ? On pourra vérifier cette expression à l'aide du résultat obtenu en question 1.

Pour répondre à cette question, on complète le tableau étape après étape, de façon théorique, c'est-à-dire sans faire référence à une valeur numérique fixée.

	x	y
Etape 1	x	---
Etape 2	x	y
Etape 3	$x + 2y$	y
Etape 4	$x + 2y$	$2(x + 2y) - 13$ $= 2x+4y - 13$
Etape 5	$3(x + 2y) - (2x+4y - 13)$	$2x+4y - 13$
Etape 6	Affichage : $x + 2y + 13$	
Etape 7	Affichage : $2x +4y - 13$	

A la fin de l'algorithme $x \leftarrow 2x + 4y - 13$

Vérifions avec l'exemple : $2\times(-12) + 4\times8 - 13 = -24 + 32 - 13 = -5$

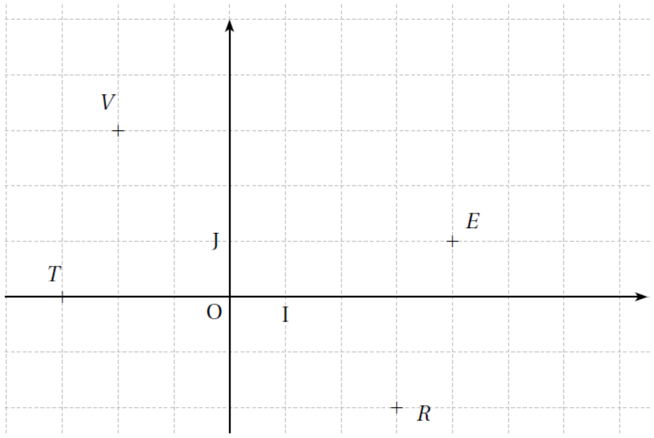
b) Quelle est l'expression de la variable y en fonction de x, retournée par cet algorithme ?
   On pourra vérifier cette expression à l'aide du résultat obtenu en question 1.

A la fin de l'algorithme $x \leftarrow x + 2y + 13$

Vérifions avec l'exemple : $-12 + 2\times8 + 13 = -12 + 16 + 13 = 17$

EXERCICE 6 (6 *points*)

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.



1. Lire les coordonnées des points V, E, R et T dans le repère (0 ;I ;J).

V(–2 ; 3) ; E(4 ; 1) ; R(3 ; –2) ; T(–3 ; 0)

2. Donner la nature précise du quadrilatère VERT.

Démontrons que VERT est un rectangle en démontrant que c'est un parallélogramme dont les diagonales sont de mêmes longueurs.

Soit M le milieu de[VR] et M' le milieu de [TE] on a :

$x_M = \dfrac{x_V + x_R}{2} = 0{,}5$; $y_M = \dfrac{y_V + y_R}{2} = 0{,}5$ $\quad$ $x_{M'} = \dfrac{x_E + x_T}{2} = 0{,}5$; $y_M = \dfrac{y_E + y_T}{2} = 0{,}5$

On a donc M(0,5 ; 0,5)= M'(0,5 ; 0,5) donc les points sont confondus.
Dans le quadrilatère VERT, les diagonales se coupent en leur milieu donc VERT est un parallélogramme.

Démontrons que VR = TE

$VR^2 = (x_R - x_V)^2 + (y_R - y_V)^2$ = *(3 – (–2))²+(–2 –3)²=(5)²+(–5)²=25+25=50*
$TE^2 = (x_E - x_T)^2 + (y_E - y_T)^2$ = *(4 – (–3))²+(1 –0)²=(7)²+(1)²=49+1=50*

VR²=TE² donc VR=TE.

Dans le parallélogramme VERT, les diagonales sont de même longueur donc VERT est un rectangle.

EXERCICE 7 (4 *points*)

On considère une fonction *f* dont le tableau de variations est le suivant :

x	-6		-2		0		4
$f(x)$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	-2	$\nearrow$	1

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction *f* ? $D_f = [-6 ; 4]$

2. Comparer $f\left(-\dfrac{4}{3}\right)$ et $f\left(-\dfrac{11}{8}\right)$. $-\dfrac{4}{3} \approx -1{,}33$ $\quad -\dfrac{11}{8} \approx -1{,}375$

$-\dfrac{4}{3}$ *et* $-\dfrac{11}{8}$ *sont deux réels de I = [– 2 ; 0]. Or f est décroissante sur I, donc elle change l'ordre sur I.*

Donc $-\dfrac{4}{3} > -\dfrac{11}{8} \Rightarrow f\left(-\dfrac{4}{3}\right) < f\left(-\dfrac{11}{8}\right)$

3. Peut-on comparer les images de – 1 et de 1 ? (justifier) : *f n'est pas monotone que [– 1 ; 1] . De plus, les renseignements apportés par le tableau de variation sont insuffisants pour comparer f(– 1) et f (1). Il n'est donc pas possible de comparer ces deux images.*

4. Combien l'équation $f(x) = 0$ admet – elle de solutions ? Préciser.

D'après le tableau de variation, f s'annule en deux valeurs x_1 et x_2 telles que $-2 < x_1 < 0$ et $0 < x_2 < 4$