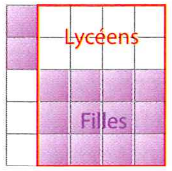
Partir d'un bon pied

Voir corrigés en fin de manuel

A Vrai ou faux ? – Pourcentage de pourcentage

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier par un calcul.

Au cours d'une soirée organisée par Émilie, 80 % des invités sont des lycéens dont 60 % sont des filles. Parmi les invités qui ne sont pas lycéens, 40 % sont des filles.



1 **a.** La part des filles invitées à la soirée est 50 %.
b. 48 % des invités sont des lycéennes.
c. 6 % des invités sont des filles non lycéennes.

2 **a.** 30 % des lycéens sont des garçons.
b. 10 % des invités sont des garçons et ne sont pas lycéens.
c. 44 % des invités sont des garçons.

B QCM – Parmi… Sachant que…

Une grande surface vend des jeux vidéo qui sont fabriqués par deux entreprises différentes, E1 et E2. Certains jeux sont défectueux. La répartition par entreprise est donnée, en pourcentage, dans le tableau ci-contre. On choisit un jeu au hasard parmi les jeux vendus par cette grande surface.

	E1	E2	Total
Défectueux	7	1,5	8,5
Non défectueux	63	28,5	91,5
Total	70	30	100

Indiquer toutes les bonnes réponses.

a. Sachant que le jeu choisi est fabriqué par l'entreprise E1, la probabilité qu'il soit défectueux est 0,07.
b. Parmi les jeux vendus par la grande surface, 10 % sont défectueux et fabriqués par l'entreprise E1.
c. La part des jeux défectueux parmi les jeux fabriqués par l'entreprise E2 est de 5 %.
d. Sachant que le jeu est défectueux, la probabilité qu'il soit fabriqué par l'entreprise E1 est $\frac{14}{17}$.

C Variable aléatoire

On lance deux fois de suite un dé tétraédrique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Si le nombre 4 apparaît, le joueur gagne 1 €.
Si le nombre 1 apparaît (comme ci-contre), le joueur perd 1 €.
Dans les autres cas, il ne perd ni ne gagne rien.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1 Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire X ?
2 Calculer $P(X=0)$ et $P(X \leqslant 1)$.
3 Calculer l'espérance de gain du joueur. Le jeu est-il équitable ?

D Vrai ou faux ? – Arbre pondéré

Voir AP 47 page 192

Dans une classe de 35 élèves de Terminale, 18 élèves ont choisi la conduite accompagnée.
On choisit successivement et avec remise les fiches de 4 élèves sur lesquelles ils ont écrit leur choix d'apprentissage de la conduite. On note A l'événement « l'élève a choisi la conduite accompagnée ».
Indiquer les bonnes réponses et corriger les réponses fausses.

a. Il s'agit de la répétition de 4 épreuves de Bernoulli, notée A, identiques et indépendantes.
b. L'arbre pondéré contient 2 niveaux.
c. L'arbre pondéré contient 16 branches.
d. Le nombre de chemins permettant d'obtenir deux fois exactement l'événement A est $\binom{2}{4}$.

CHAPITRE 6 Probabilités

D'hier à aujourd'hui

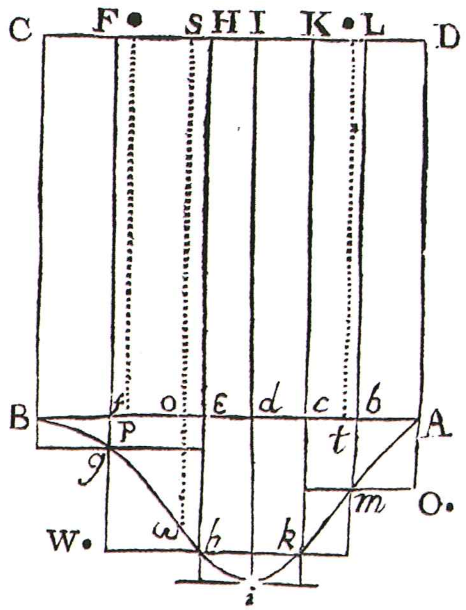
Les probabilités de cause

Thomas Bayes est né en Angleterre en 1702. Son éducation est très marquée par les relations entre la science et la théologie. Il fut membre de la Royal Society, institution destinée à la promotion des sciences. Il ne publia de son vivant aucun traité de mathématiques et son nom serait tombé dans l'oubli si un de ses amis n'avait fouillé ses archives et n'avait publié en 1763 son ouvrage sous le titre *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chance*.

À l'époque où est publié cet essai, la théorie des probabilité repose sur l'approche fréquentiste développée par Bernoulli et Moivre. Dans son essai, Bayes ne s'intéresse qu'à une seule épreuve quel que soit le moment où on la réalise. Il définit en sept points tout le vocabulaire des événements (incompatibles, contraires, indépendants), ainsi que la probabilité d'un événement, puis énonce en sept propositions toute la théorie des probabilités de cause. Il écrit, pour la troisième propriété :

> *« La probabilité pour que deux événements subsequents se produisent tous les deux à l'avenir est en rapport composé de la probabilité du premier et de la probabilité du second en supposant que le premier se produise. »*

Contrairement à Bernoulli, Thomas Bayes n'a pas illustré sa théorie à l'aide de tirages de boules dans une urne mais à l'aide d'un billard carré, illustrant ainsi une approche géométrique des probabilités de cause. Mais ses travaux n'ont connu aucune diffusion, en raison des difficultés de calcul des intégrales mises en jeu dans la solution.



Le billard de Bayes.
Une boule est lancée de *W*. On trace la droite *os* passant par son point d'arrêt *s*. Cette droite détermine deux rectangles *osCB* et *osDA*.
On lance une autre boule de *O*. Si la boule s'arrête dans le rectangle *osCB*, il y a succès, sinon échec.

Thomas Bayes (1702-1761)

Aujourd'hui, la théorie de Bayes est un épisode essentiel de l'histoire des probabilités. Elle est à l'origine de la notion de probabilité de causes qui prend tout son sens dans les prises de décision : la démarche du policier, du médecin, etc. qui posent leur diagnostic à partir de symptômes. Elle est particulièrement utilisée pour les tests médicaux. Ceux-ci ne sont pas sûrs à 100 %. Il est, en effet, possible d'avoir un « faux positif » ou un « faux négatif ». Le théorème de Bayes permet d'établir la probabilité d'un résultat erroné.

La persévérance, c'est ce qui rend l'impossible possible, le possible probable et le probable réalisé.

Robert Half

Découvrir

Activité 1 Lire et utiliser un tableau à double entrée

Une enquête étudie les achats de sapins de Noël de 600 000 ménages : 21,6 % des ménages achètent un sapin de Noël.
Parmi eux, 3,5 % achètent un sapin artificiel.
La répartition des tailles des sapins achetés par les ménages est donnée, en pourcentage, dans le tableau ci-contre.

%	Inférieur ou égal à 1 m	Supérieur à 1 m	Part dans le total
Sapin naturel	19	81	96,5
Sapin artificiel	32	68	3,5

1 Interpréter les deux nombres du tableau écrits en rouge.

2 Construire le tableau des effectifs des ménages correspondant au tableau ci-dessus. *Arrondir les résultats à l'unité près.*

3 Calculer la part des ménages achetant un sapin mesurant plus d'un mètre.

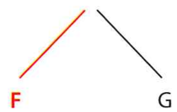
4 Calculer la part des ménages achetant un sapin naturel parmi les ménages achetant un sapin d'un mètre au plus.

5 La part des ménages achetant un sapin naturel parmi ceux achetant un sapin d'au plus un mètre est-elle égale à la part des ménages achetant un sapin naturel ?

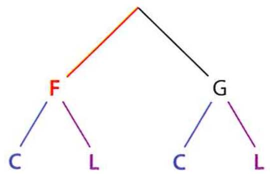
Activité 2 Construire un arbre pondéré à partir d'un tableau

Dans une classe de 35 élèves de Terminale ES, une enquête porte sur les études post-Bac souhaitées par les élèves.

%	BTS – IUT	Université – CPGE	Part dans le total
Filles	45	55	57
Garçons	73	27	43



Arbre 1



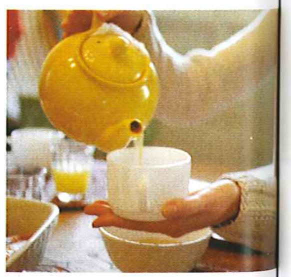
Arbre 2

1 **a.** Quelle est la part des filles dans la classe de Terminale ES ?
b. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre (**Arbre 1**) en plaçant les parts sur les branches.

2 **a.** Quelle est la part, parmi les filles, des élèves ayant choisi des études courtes ?
b. Placer ce résultat sur la branche qui convient de l'**Arbre 2**, puis compléter l'**Arbre 2**.

3 Quelle est la part, parmi les élèves de cette Terminale ES, des garçons qui ont choisi des études courtes ? Comment lit-on ce résultat sur l'**Arbre 2** ?

Activité 3 Construire un arbre pondéré à partir d'un énoncé



Au petit-déjeuner, Adeline boit indifféremment un thé noir, un thé vert ou un verre de lait, mais elle évite au maximum de boire trop de caféine dans la journée.
Si elle a bu un thé noir, la probabilité qu'elle boive un café après le déjeuner est 0,05 .
Si elle a bu un thé vert, la probabilité qu'elle boive un café après le déjeuner est 0,10 .
Si elle a bu un verre de lait, la probabilité qu'elle boive un café après le déjeuner est 0,5 .
On note les événements suivants :

- C : « Adeline boit un café » ;
- V : « Adeline boit un thé vert » ;
- L : « Adeline boit un verre de lait » ;
- N : « Adeline boit un thé noir ».

On s'intéresse à la probabilité qu'Adeline boive un café.
On veut construire un arbre pondéré représentant la situation décrite dans l'énoncé.

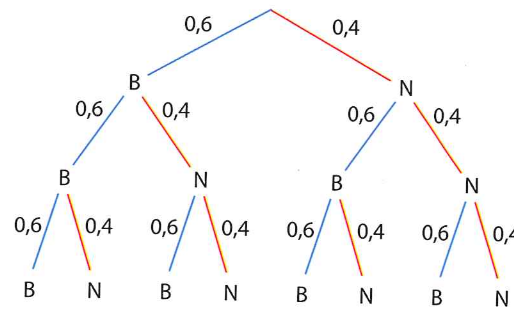
1 **a.** Combien de choix possède Adeline pour son petit-déjeuner ? « Boire un café » fait-il partie de ces choix ?
b. Quel est le nombre de branches de l'arbre au 1er niveau ? Indiquer les probabilités à écrire sur ces branches.
c. Combien de niveaux et combien de branches possède l'arbre pondéré que l'on souhaite construire ?

2 En tenant compte des remarques faites au **1**, construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

3 **a.** Comment peut-on obtenir la probabilité qu'Adeline boive un thé vert et un café ?
b. Comment peut-on obtenir la probabilité qu'Adeline boive un café ?

Découvrir

Activité 4 Répéter des épreuves non indépendantes



1 **a.** Décrire une expérience aléatoire dont l'arbre pondéré est donné ci-contre.
b. Une urne contient 10 boules dont quatre sont noires et les autres blanches.
On tire trois fois de suite une boule de l'urne, on note sa couleur et on la replace dans l'urne.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées. Quelle est la loi suivie par X ?
Cette expérience aléatoire peut-elle être représentée par l'arbre ci-contre ?

2 De la même urne, on tire trois fois de suite une boule, on note sa couleur, mais on ne la remet pas dans l'urne.
a. Construire l'arbre pondéré correspondant à la situation.
b. La variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées suit-elle une loi binomiale ? Justifier.

Activité 5 Reconnaître des événements non indépendants

On étudie la couleur des yeux et des cheveux des enfants d'une famille. On choisit un des enfants au hasard.
On considère les événements suivants :

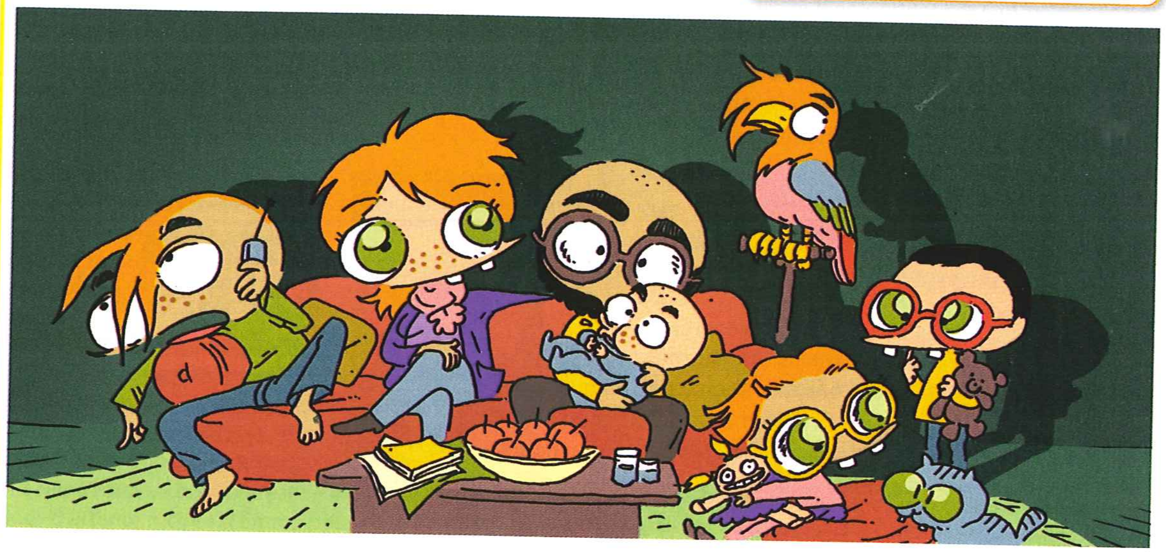
- M : « l'enfant a les yeux marron » ;
- C : « l'enfant a les cheveux châtains » ;
- B : « l'enfant est blond » ;
- YB : « l'enfant a les yeux bleus ».

1 La famille comporte quatre enfants :
l'un d'eux a les cheveux blonds et les yeux marron ;
un autre a les yeux marron mais n'a pas les cheveux blonds ;
les autres n'ont ni les cheveux blonds, ni les yeux marron.
a. Calculer $P(M)$, $P(B)$ et $P(M \cap B)$.
b. Calculer $\dfrac{P(M \cap B)}{P(M)}$. Comparer ce résultat à $P(B)$.

2 Reprendre les questions précédentes avec une famille de quatre enfants dont un est blond avec les yeux marron, un est blond avec les yeux noirs, un autre est châtain avec les yeux marron et le dernier est châtain avec les yeux bleus.

Remarque

- Dans **1**, parmi les issues réalisant M, la part de celles réalisant B n'est pas égale à la part de celles réalisant B dans le total :
les événements ne sont pas indépendants.
- Dans **2**, parmi les issues réalisant M, la part de celles réalisant B est égale à la part de celles réalisant B dans le total :
les événements sont indépendants.



1 Variables aléatoires discrètes

a Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition Définir une **loi de probabilité** P d'une variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur x_i de la variable aléatoire **un nombre positif p_i** tel que la somme des p_i est égale à 1.
Ainsi, $p_i = P(X = x_i)$, avec : $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ et $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$.
Déterminer la **loi de probabilité** de X, c'est donner, sous forme d'un **tableau**, les probabilités p_i des valeurs x_i.
L'**espérance d'une variable aléatoire X** est la moyenne des valeurs x_i, pondérées par leurs probabilités p_i.

Rappel La loi de probabilité est un tableau :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \ldots + p_n \times x_n$.

CAS PARTICULIER

Si toutes les valeurs de la variable aléatoire X ont la même probabilité, alors la loi de X est **équirépartie**.

EXEMPLE

Maxime s'aperçoit que sa poche contient quatre pièces de valeurs différentes : 0,20 €, 0,50 €, 1 € et 2 €. Il prend deux pièces simultanément. Soit X la variable aléatoire égale à la somme obtenue. X prend les valeurs : 0,70 ; 1,2 ; 1,5 ; 2,2 ; 2,5 ; 3. La loi de probabilité de la variable aléatoire X, donnée ci-contre, est équirépartie. L'espérance de la somme obtenue est :

$$E(X) = \frac{0{,}70 + 1{,}2 + 1{,}5 + 2{,}2 + 2{,}5 + 3}{6} = 1{,}85.$$

Maxime peut espérer obtenir en moyenne 1,85 €.

Remarque Si X prend n valeurs, les probabilités p_i sont toutes égales à $\frac{1}{n}$.
La loi de probabilité de X est :

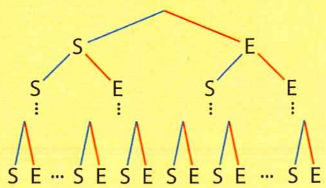
x_i	0,70	1,2	1,5	2,2	2,5	3
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

On dit aussi que X suit la loi **uniforme discrète** sur l'ensemble : $\{0{,}70 ; 1{,}2 ; 1{,}5 ; 2{,}2 ; 2{,}5 ; 3\}$.

b Loi binomiale

Définition Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues, appelées **succès** et **échec**.
On note p la probabilité de succès et $1 - p$ est la probabilité d'échec.
Lors de la répétition de **n épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes**, on définit la variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus à la fin des n épreuves.
La loi de probabilité de X est nommée **loi binomiale** de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n ; p)$, où p est la **probabilité de succès** de l'épreuve de Bernoulli.
La probabilité d'obtenir k succès est :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$



Rappel Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins contenant k succès sur l'arbre pondéré à n niveaux.
La liste (S, S, S, …, S, E, E, …, E), contenant k **succès** et $n - k$ **échecs**, a pour probabilité :
$p^k (1 - p)^{n-k}$.
L'espérance de X est $E(X) = np$.
La variance de X est :
$V(X) = np(1 - p)$.

Sur calculatrice
TI™ : `binomFdp(8, 0.1, 2)`
Casio : `Bpd(8, 0.1, 2)`
Voir pages 346 et 347

EXEMPLE

Le taux de réussite au concours d'admission pour une école post-Bac est de 10 %. On rencontre au hasard 8 candidats et on les interroge sur leur succès éventuel. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats admis parmi les 8 candidats interrogés. La probabilité d'obtenir 2 candidats admis est :

$$P(X = 2) = \binom{8}{2} 0{,}1^2 (0{,}9)^{8-2} \approx 0{,}149.$$

Savoir définir et utiliser une variable aléatoire

Exercice corrigé

Énoncé

En 2012, dans une ville du sud de l'Espagne, les taxis appliquent des tarifs différents suivant le type de trajet. Pour un trajet entre le centre-ville et l'aéroport, le chauffeur applique un prix forfaitaire de 27 euros. Pour un trajet à l'intérieur de la ville, le prix moyen est de 7 €. À une station de taxi, un passager sur cinq effectue un trajet entre le centre-ville et l'aéroport.
Un taxi ne sait pas où va son passager *a priori* et il peut charger deux fois la même personne.

Un chauffeur de taxi qui travaille très souvent à cette station charge successivement 4 personnes.

1 Calculer la probabilité que le chauffeur de taxi effectue :
a. exactement deux trajets entre le centre-ville et l'aéroport ;
b. au moins un trajet entre le centre-ville et l'aéroport.

2 Calculer la recette moyenne que le chauffeur peut espérer pour ces quatre trajets.

Points méthode

1 a. On reconnaît une répétition de quatre épreuves identiques et indépendantes à deux issues, donc la variable aléatoire X, égale au nombre de succès, suit une loi binomiale $\mathcal{B}(4 ; p)$. On définit avec soin le succès et sa probabilité p.
b. On veut obtenir 2 succès, par exemple la liste {S ; S ; E ; E}. Le nombre de listes est le nombre de chemins comportant 2 succès sur l'arbre pondéré à 4 niveaux : $\binom{4}{2}$.
2 L'espérance a les mêmes propriétés que la moyenne :
$E(aX + b) = aE(X) + b$.
Voir AP 45 page 192

Solution

1 Chaque trajet est une épreuve de Bernoulli de succès l'événement S : « le chauffeur effectue un trajet entre le centre-ville et l'aéroport », de probabilité $p = 0{,}2$. On observe une répétition de 4 épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de trajets entre le centre-ville et l'aéroport parmi les 4 trajets effectués.
X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4 ; 0{,}2)$.
a. On doit calculer la probabilité d'obtenir deux succès, c'est-à-dire :

$$P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0{,}2^2 \times (1 - 0{,}2)^2 = 0{,}1536.$$

b. L'événement « le chauffeur effectue **au moins un** trajet entre le centre-ville et l'aéroport » est l'événement contraire de l'événement « le chauffeur n'effectue **aucun** trajet entre l'aéroport et le centre-ville », c'est-à-dire :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0{,}8)^4 = 0{,}5904.$$

2 Soit R la variable aléatoire égale à la recette du chauffeur. Alors :

$$R = 27X + 7(4 - X) = 20X + 28.$$

Comme X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(4 ; 0{,}2)$, alors $E(X) = np = 0{,}8$.
Donc : $E(R) = 20 \times E(X) + 28 = 20 \times 0{,}8 + 28 = 44$.
Le chauffeur peut espérer obtenir en moyenne une recette de 44 €.

Exercices d'application

Voir exercices 18 à 20

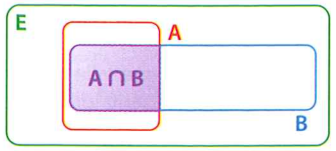
1 La probabilité que le bus, emprunté par Emma chaque matin pour se rendre au lycée, arrive en retard est égale à 0,1. Emma prend le bus 10 jours de suite.
a. Calculer la probabilité que le bus arrive en retard au moins une fois.
b. Calculer le nombre moyen de retards auxquels Emma peut s'attendre lors de nombreux trajets.
c. Le retard moyen d'un bus est de 4 minutes. Calculer le temps d'attente moyen d'Emma pour ces dix jours.

2 Léna reçoit 5 fois plus souvent des mails que des SMS.
Quand elle entend sonner la messagerie de son Smartphone, elle a toujours reçu un message et un seul : soit un SMS, soit un mail.
Elle ne les reçoit pas simultanément.
Léna consulte son Smartphone 6 fois.
a. Calculer la probabilité qu'elle ait reçu plus de 4 fois des SMS.
b. En moyenne, Léna lit les SMS reçus en 10 secondes et les mails en 30 secondes.
Calculer le temps moyen que passe Léna à lire ses messages.

2 Probabilité conditionnelle

a Conditionnement par un événement

Définition On considère une expérience aléatoire et l'ensemble des résultats, l'univers E, muni d'une loi de probabilité P.
A est un événement de E, tel que $P(A) \neq 0$.
Pour tout événement B, la probabilité de B **sachant que A est réalisé** est notée $P_A(B)$.
Elle est définie par le quotient $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.



L'ensemble de référence n'est plus l'univers E, mais devient l'événement **A**. On étudie **B** parmi **A**, c'est-à-dire $A \cap B$ dans **A**.

Note P_A est une probabilité et $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$.

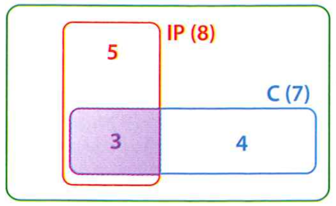
REMARQUE

Dans le cas d'une loi équirépartie :
$$P_A(B) = \frac{\text{nombre d'éléments de A et B}}{\text{nombre d'éléments de A}}.$$

EXEMPLE

Dans une classe de 35 élèves de Terminale ES, 8 élèves souhaitent poursuivre leurs études dans un IEP et 7 élèves en CPGE. 3 élèves postulent pour les deux filières. On note :
- IP l'événement « l'élève choisit un IEP » ;
- C l'événement « l'élève choisit une CPGE ».

On interroge un élève au hasard sur ses vœux post-Bac.



8 élèves choisissent un IEP donc $P(IP) = \dfrac{8}{35}$.

Parmi les 35 élèves de la classe, 3 élèves postulent pour les deux filières :
$$P(IP \cap C) = \frac{3}{35}.$$

La probabilité de C sachant que IP est réalisé est $P_{IP}(C) = \dfrac{\frac{3}{35}}{\frac{8}{35}} = \dfrac{3}{8}$.

Parmi les 8 élèves ayant choisi un IEP, 3 élèves choisissent aussi une CPGE.

b Formule des probabilités composées

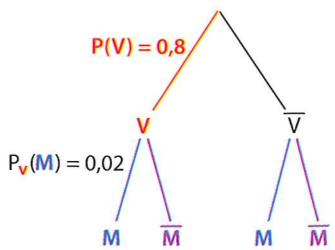
Définition Si l'on connaît la probabilité de l'événement A et la probabilité de l'événement B **sachant que A est réalisé**, la probabilité de **l'événement A et B** est : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Remarque Si l'on connaît la probabilité de l'événement B et de l'événement A **sachant que B est réalisé** :
$P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$.

EXEMPLE

80 % d'une population est vaccinée contre une maladie.
On constate que 2 % des personnes vaccinées sont atteintes par la maladie.
On choisit une personne au hasard.
Soit V l'événement : « la personne est vaccinée »
et M l'événement : « la personne est atteinte de la maladie ».
Ainsi, $P(V) = 0{,}8$.
Parmi les personnes vaccinées, 2 % sont malades,
donc la probabilité de M sachant que V est réalisé est $P_V(M) = 0{,}02$.
La probabilité d'obtenir une personne vaccinée **et** atteinte de la maladie **parmi la population est :** $P(V \cap M) = P(V) \times P_V(M) = 0{,}8 \times 0{,}02 = 0{,}016$.

On peut traduire la situation par un arbre pondéré :



Construire et lire un arbre pondéré

Exercice corrigé

Énoncé

En 2010, une étude sur la consommation des produits issus de l'agriculture biologique montre que 47 % des consommateurs de produits « Bio » les achètent en grandes surfaces (G), 25 % préfèrent les acheter sur les marchés (M) et le reste des consommateurs achètent ces produits surgelés (S).
19,6 % des consommateurs de produits « Bio » achètent des fruits et légumes surgelés.

Parmi les consommateurs achetant les produits « Bio » en grandes surfaces, 30 % achètent des fruits et légumes.
Parmi ceux achetant les produits « Bio » sur les marchés, 73 % achètent d'autres produits que les fruits et légumes.

1 Construire l'arbre pondéré représentant la situation.

2 a. Si le consommateur interrogé consomme des produits « Bio », calculer la probabilité qu'il ait acheté des fruits et légumes « Bio » sur un marché.

b. Sachant que le consommateur interrogé achète les produits « Bio » surgelés, calculer la probabilité qu'il ait acheté des fruits et légumes.

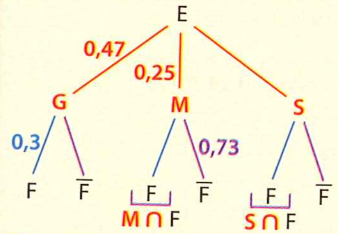
Points méthode

❶ Les événements G, M et S forment une **partition** de E lorsque leur réunion est l'ensemble E et qu'ils sont disjoints deux à deux.
La somme des probabilités des branches d'un même niveau est égale à 1.

❷ Bien repérer dans l'énoncé, à chaque question, **l'ensemble de référence**.
En particulier, les mots indiquant un changement d'ensemble de référence :
sachant que … **parmi** … **si** …
Si l'ensemble de référence est l'ensemble E, la probabilité de l'intersection $M \cap F$ est le produit des pondérations des branches « partant de E passant par M et rejoignant F ».

Solution

1 **L'ensemble de référence** est l'ensemble E des consommateurs de produits « Bio ». Les événements G, M et S forment une **partition** de E.
Soit F l'évènement « le consommateur achète des fruits et légumes ».
Pour chacun des événements G, M et S, deux issues sont envisagées : F ou $\bar{F}$.
L'arbre est donc formé de six branches.



On place ces événements G, M et S au bout des trois premières branches de l'arbre et leur probabilité sur les branches.
Les phrases soulignées dans l'énoncé indiquent les probabilités conditionnelles à placer sur les branches du deuxième niveau de l'arbre :
$P_G(F) = 0{,}30$ et $P_M(\bar{F}) = 0{,}73$.

2 a. $P_M(F) = 1 - P_M(\bar{F}) = 0{,}27$; donc $P(M \cap F) = 0{,}25 \times 0{,}27 = 0{,}0675$.

b. $P(S \cap F) = P_S(F) \times P(S)$ et d'après l'énoncé, $P(S \cap F) = 0{,}196$.
De plus, $P(S) = 1 - 0{,}47 - 0{,}25 = 0{,}28$; donc $0{,}196 = 0{,}28 \times P_S(F)$.
D'où : $P_S(F) = \dfrac{0{,}196}{0{,}28} = 0{,}70$.
Sachant que le consommateur interrogé achète des produits « Bio » surgelés, la probabilité qu'il ait acheté des fruits et légumes est 0,7.

Exercices d'application

Voir exercices 23 à 28

3 Un joueur de tennis réussit sa première balle de service à 75 % et sa deuxième balle à 90 %.
a. Construire l'arbre pondéré illustrant la situation.
b. Quelle est la probabilité qu'il commette une double faute ?

4 Un tiers des mails reçus par John sont des mails publicitaires.
Parmi les mails publicitaires 10 % intéressent John.
a. Calculer la probabilité que John reçoive un mail publicitaire qui l'intéresse.
b. Parmi tous les mails reçus, 5 % sont des mails non publicitaires qui n'intéressent pas John. John reçoit un mail non publicitaire.
Calculer la probabilité que ce mail l'intéresse.

3 Probabilité d'un événement sur un arbre pondéré

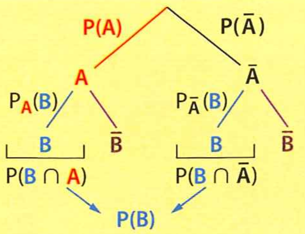
a Partition de l'univers en deux événements

Théorème Si A est un événement de probabilité non nulle et $\bar{A}$ son événement contraire, alors A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers E.
Soit B un événement de E :

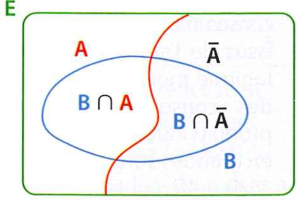
$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$

$\quad = P_A(B) \times P(A) + P_{\bar{A}}(B) \times P(\bar{A})$.

Cette formule n'est pas exigible, mais sa mise en œuvre doit être maîtrisée.



Les événements $B \cap A$ et $B \cap \bar{A}$ sont incompatibles.



EXEMPLE

Au Luxembourg une enquête révèle qu'en 2010, 24 % de la population fume. La fumée dérange 80 % des non-fumeurs et 58 % des fumeurs.
On interroge au hasard un habitant du Luxembourg.
On note : F l'événement « être fumeur » et D « la fumée dérange ».
Les événements F et $\bar{F}$ forment une partition de l'univers des habitants du Luxembourg :

$P(F) = 0{,}24$ donc $P(\bar{F}) = 1 - 0{,}24 = 0{,}76$.

D'après les éléments surlignés en bleu dans l'énoncé :

$P_{\bar{F}}(D) = 0{,}8$ et $P_F(D) = 0{,}58$.

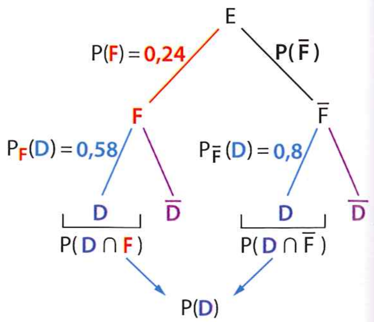
On construit l'arbre pondéré ci-contre.

$P(D \cap F) = P_F(D) \times P(F) = 0{,}58 \times 0{,}24 = 0{,}1392$.

$P(D \cap \bar{F}) = P_{\bar{F}}(D) \times P(\bar{F}) = 0{,}8 \times 0{,}76 = 0{,}608$.

La probabilité que la personne interrogée soit dérangée par la fumée est :

$P(D) = 0{,}1392 + 0{,}608 = 0{,}7472$.

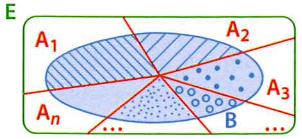


b Partition de l'univers en plusieurs événements

Définition Si les événements $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ forment une partition de l'univers E, alors la probabilité de l'événement B de l'univers E est :

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$

$P(B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) + P_{A_2}(B) \times P(A_2) + \ldots + P_{A_n}(B) \times P(A_n)$

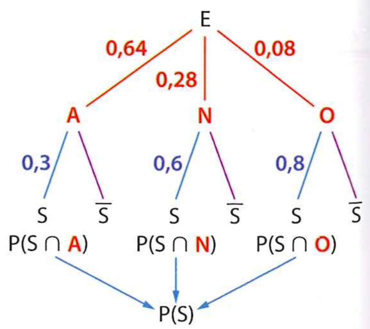


EXEMPLE

Un magasin de sport propose des réductions sur les trois marques de vêtements qu'il distribue.
La marque A représente 64 % des vêtements vendus ; la marque N, 28 % ; la marque O en représente 8 %.
30 % des vêtements de la marque A, 60 % de ceux de la marque N et 80 % de ceux de la marque O sont soldés.
On interroge un client ayant acheté un vêtement de sport.
Puisque A, N et O forment une partition de l'univers des vêtements de sport, la probabilité qu'il ait acheté un vêtement soldé est :

$P(S) = P_A(S) \times P(A) + P_N(S) \times P(N) + P_O(S) \times P(O)$;

$P(S) = 0{,}30 \times 0{,}64 + 0{,}60 \times 0{,}28 + 0{,}80 \times 0{,}08 = 0{,}424$.



Utiliser un arbre pondéré

Exercice corrigé

Énoncé

L'entreprise LAVÔTRE, créée par un grand cuisinier, propose des ateliers culinaires pour adultes et pour enfants de 8 à 12 ans, ayant pour thème la pâtisserie (PT), la cuisine salée (S) ou les apéritifs dînatoires (A).
60 % de ces ateliers sont consacrés à la pâtisserie et 10 % aux apéritifs dînatoires.

On sait que $\frac{1}{6}$ de chacun des ateliers « pâtisserie » et « apéritifs dînatoires », sont réservés aux enfants et $\frac{7}{8}$ des ateliers « cuisine salée » concernent les adultes uniquement.

1 On interroge au hasard un participant à ces ateliers. Calculer la probabilité que ce soit un enfant.

2 On interroge un enfant ayant participé à ces ateliers. Calculer la probabilité qu'il ait suivi un atelier pâtisserie.

Points méthode

❶ On repère les événements formant une partition de l'univers et on souligne dans l'énoncé les phrases qui indiquent un changement d'ensemble de référence.

On construit l'arbre pondéré à l'aide des probabilités fournies par l'énoncé.

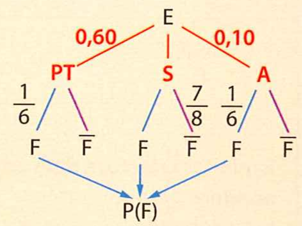
La probabilité de F se calcule en ajoutant les produits des pondérations des branches arrivant à F.

❷ La probabilité conditionnelle demandée n'est pas écrite sur les branches de l'arbre.
Il faut la calculer à l'aide de la définition du cours.

Voir cours page 176

Solution

1 On construit l'arbre pondéré correspondant à l'énoncé.
Soit F l'événement « la personne interrogée est un enfant ».
Les événements PT, S et A forment une partition de l'univers des participants aux ateliers culinaires. On écrit leurs probabilités sur les branches du premier niveau de l'arbre.
On place les probabilités conditionnelles sur les branches du niveau 2. Par produit des pondérations sur les branches arrivant à E :



- $P(F \cap PT) = \frac{1}{6} \times 0{,}6 = 0{,}1$;
- $P(F \cap A) = \frac{1}{6} \times 0{,}1 = \frac{1}{60}$;
- $P(F \cap S) = \left(1 - \frac{7}{8}\right) \times (1 - 0{,}6 - 0{,}1) = 0{,}0375$.

- $P(PT) = 0{,}6$; $P(A) = 0{,}10$;
- $P_{PT}(F) = \frac{1}{6} = P_A(F)$ et $P_S(F) = \frac{7}{8}$.

Les événements PT, S et A formant une partition de E, on en déduit que :

$P(F) = 0{,}1 + 0{,}0375 + \frac{1}{60} = \frac{37}{240}$.

La probabilité que l'on interroge un enfant ayant participé aux ateliers est donc environ 0,154.

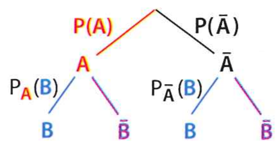
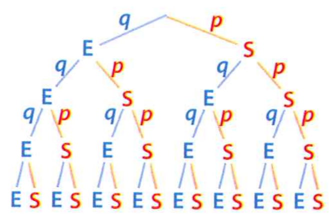
2 L'ensemble de référence est F. On calcule donc $P_F(PT) = \frac{P(F \cap PT)}{P(F)} = \frac{24}{37} \approx 0{,}65$.
Parmi les enfants, environ 65 % ont suivi un atelier pâtisserie.

Exercices d'application

Voir exercices 30 à 34

5 Dans un lycée, 31 % des élèves appartiennent à la section ES, 50 % à la section S et les autres élèves sont en L.
15 % des élèves du lycée sont des filles de L.
Parmi les élèves de ES, 62 % sont des filles.
Parmi les élèves de S, 54 % sont des garçons.
On interroge un élève du lycée.
Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

6 Les élèves d'une école post-Bac effectuent un stage.
45 % des élèves choisissent un stage aux États-Unis, 30 % des élèves restent en Europe, 15 % partent en Asie, les autres stages se déroulent en Amérique latine.
Parmi les élèves partant soit aux États-Unis, soit en Amérique latine, 20 % sont rémunérés.
Parmi les stages proposés en Asie, 30 % sont rémunérés.
75 % des stages effectués en Europe ne sont pas rémunérés.
Quelle est la probabilité pour qu'un élève touchant une rémunération soit parti en Asie ?

Capacités	Mise en œuvre
Définir une variable aléatoire discrète **et établir sa loi de probabilité.**	Une **variable aléatoire X** associe à chaque issue une valeur $x_1, x_2, \dots, x_n$. On détermine la **loi de probabilité de X** en calculant la probabilité de chaque valeur x_i. On présente ces probabilités dans un tableau. La **somme des p_i est égale à 1.** $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline X & x_1 & x_2 & \dots & x_3 & \dots & x_n \\ \hline P(X=x_i) & p_1 & p_2 & \dots & p_3 & \dots & p_n \\ \hline\end{array}$
Calculer l'espérance d'une variable aléatoire et l'interpréter.	L'espérance de la variable X est : $E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \dots + p_n \times x_n$. L'espérance est la **valeur moyenne** des valeurs de la variable aléatoire X, dans le cas **d'un grand nombre de répétitions** de l'expérience aléatoire à laquelle elle est associée. Si $E(X)=0$, le « jeu » est dit **équitable**.
Reconnaître et calculer une probabilité conditionnelle.	Par lecture de l'énoncé, on détermine le nouvel ensemble de référence A de probabilité non nulle. La probabilité que B soit réalisé **sachant que A est réalisé** est $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$.
Construire un arbre pondéré.	Les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers E. Leurs probabilités sont placées sur les deux premières branches. Les probabilités conditionnées par A et par $\bar{A}$ sont placées sur les deuxièmes branches. 
Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités.	En calculant le **produit des probabilités** situées sur une même branche de l'arbre, on obtient, par exemple dans le cas où A et $\bar{A}$ forment **une partition** de l'univers E : $P(A) \times P_A(B) = P(A \cap B)$ ou $P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = P(\bar{A} \cap B)$. En ajoutant toutes les probabilités obtenues « au bout » des branches arrivant à B, on obtient : $P(B) = P(A) \times P_A(B) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$. On obtient de même : $P(\bar{B}) = P(A) \times P_A(\bar{B}) + P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(\bar{B})$. On généralise la méthode lorsque $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de E.
Reconnaître une situation relevant de la loi binomiale **et calculer une probabilité dans le cadre de la loi binomiale.**	On vérifie que l'on a bien une répétition de n épreuves de Bernoulli, c'est-à-dire n épreuves à deux issues seulement, S et E, **identiques et indépendantes**. On énonce clairement l'événement S : « **succès** », de probabilité p. On dresse un arbre.  La probabilité d'obtenir k **succès** est : $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. $\binom{n}{k}$ est le nombre de « chemins » comportant k **succès** sur l'arbre à n niveaux.
Pour la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$, calculer la probabilité d'obtenir « au moins un… ».	L'événement « obtenir **au moins un** succès » est l'**événement contraire** de l'événement « n'obtenir **aucun succès** », donc $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - (1-p)^n$.
Calculer l'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.	Dans le cas d'une loi binomiale, l'**espérance** est le produit du **nombre n d'épreuves** par la **probabilité p de succès** : $E(X) = n \times p$.

QCM

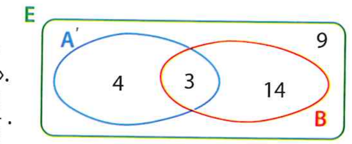
Voir corrigés en fin de manuel

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.

7 X est une variable aléatoire à valeurs dans $\{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$ et a est un nombre positif.
On a : $P(X=4)=0{,}2$; $P(X=6)=P(X=2)=0{,}1$ et $P(X=1)=P(X=3)=P(X=5)=a$. Alors :
a. $3a+0{,}2=1$. **b.** $P(X \geqslant 2)=0{,}8$. **c.** $P(X=4)=2\,P(X=1)$.

8 Un joueur lance un dé équilibré. Si le nombre apparu est un multiple de 3, il gagne 4 €, sinon il perd 2 €.
Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur.
a. Le jeu est équitable. **b.** $E(X)=6$. **c.** L'univers est $\{2\,;4\}$.

9 Parmi 30 élèves de Terminale, 7 pratiquent l'aïkido et 17 le basketball.
Trois élèves pratiquent les deux sports. On rencontre un élève au hasard.
On note A « l'élève pratique l'aïkido » et B « l'élève pratique le basketball ».



a. $P_A(B)=0{,}75$. **b.** $P_B(A)=0{,}5$. **c.** $P_{\bar{A}}(B)=\dfrac{14}{23}$.

10 Si A et B sont deux événements d'un même univers E tels que $P(A \cap B)=0{,}8$ et $P_A(B)=0{,}25$, alors :
a. $P(A)=0{,}2$. **b.** c'est impossible. **c.** $P(B)=0{,}2$.

11 Si A et B sont deux événements de E tels que $P(A \cap B)=0{,}2$; $P_A(B)=0{,}25$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B})=0{,}1$, alors :
a. $P(B)=0{,}22$. **b.** $P_{\bar{A}}(B)=0{,}75$. **c.** $P(A)=0{,}8$.

12 Si A et B sont deux événements de E tels que $P(A)=0{,}4$; $P_A(B)=0{,}1$ et $P_{\bar{A}}(B)=0{,}3$, alors :
a. $P_B(A)=0{,}1$. **b.** $P_{\bar{A}}(\bar{B})=0{,}9$. **c.** $P(B)=0{,}22$.

13 70 % d'une population est vaccinée contre une maladie (V). Parmi les personnes vaccinées, 5 % ont une réaction allergique (A). Parmi les non vaccinés, ils sont 10 %. On interroge une personne au hasard.
a. $P_A(V)=0{,}1$. **b.** $P(A \cap V)=0{,}05$. **c.** $P(A)=0{,}065$.

14 Sur un arbre pondéré représentant la loi binomiale $\mathcal{B}(4\,;0{,}5)$, le nombre de chemins contenant :
a. trois succès est égal au nombre de chemins contenant un succès. **b.** deux succès est égal à $\binom{2}{4}$. **c.** trois succès est égal à 3.

15 X est la variable aléatoire égale au nombre de 4 obtenus lors de cinq lancers d'un dé tétraédrique équilibré.
a. $P(X=2)=0{,}25^2 \times 0{,}75^3$. **b.** $P(X \geqslant 1)=1-0{,}75^5$. **c.** $P(X=4)=0{,}25^4$.

16 Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues lors du tirage successif avec remise de trois boules d'une urne contenant 6 boules rouges et 4 boules vertes.
a. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,;0{,}6)$. **b.** X suit la loi de Bernoulli de probabilité 0,6. **c.** $P(X=3)=\dfrac{5}{14}$.

17 Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;0{,}4)$, n étant un entier naturel non nul.
a. $P(X=0)=0{,}4^n$. **b.** $P(X=1)=n \times 0{,}4$. **c.** $E(X)=0{,}4 \times n$.

→Les exercices portant un numéro jaune sont corrigés à la fin du manuel.

1 Variables aléatoires discrètes

18 Vrai ou faux ?

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier la réponse.

1 Six amies lancent un dé cubique équilibré dont les faces portent des couleurs différentes.
À chaque couleur, on associe le prénom d'une des amies. On a ainsi défini une variable aléatoire sur l'ensemble des faces du dé.

2 On considère le tableau associé à une variable aléatoire X :

x_i	10	12	13	16
$P(X = x_i)$	0,2	0,35	0,25	0,2

a. Ce tableau est la loi de probabilité de X.
b. $E(X) = 25{,}5$.

2 On lance trois fois de suite un dé équilibré.
a. La variable aléatoire X, égale au nombre de six apparus, suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(3\,;\,\frac{1}{6}\right)$.
b. $E(X) = 0{,}5$.

19 Vrai ou faux ?

On tire trois fois de suite une boule d'une urne contenant quatre boules vertes et six boules rouges.
La variable aléatoire X est égale au nombre de boules vertes tirées.

1 On ne remet pas la boule dans l'urne après chaque tirage. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(3\,;0{,}4)$.

2 On remet la boule tirée dans l'urne après chaque tirage.
a. $P(X = 2) = 3 \times 0{,}4^2 \times 0{,}6$.
b. $P(X \geqslant 1) = 1 - 0{,}4^3$.
c. $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = P(X \leqslant 2) - P(X \leqslant 1)$.

3 On remet la boule dans l'urne après chaque tirage et on gagne 10 points si une boule verte apparaît.
Soit Y la variable aléatoire égale au gain du joueur.
Alors $E(Y) = 10$.

Voir AP page 192

20 Jeu de dés

Un joueur mise m euros et lance deux dés tétraédriques. Si la somme des deux dés est égale à 5, le joueur gagne 20 points. Si la somme est égale à 4 ou 6 le joueur gagne 10 points. Dans les autres cas, il ne gagne rien.
a. Déterminer, en fonction de m, la loi de la variable aléatoire X égale au gain algébrique du joueur.
b. Calculer, en fonction de m, le gain moyen du joueur. Combien doit miser le joueur pour que le jeu soit équitable ?

21 Décorations lumineuses

Une entreprise reçoit des boîtes de guirlandes électriques dont un tiers sont des guirlandes pouvant être utilisées uniquement à l'extérieur (E).
Un employé vérifie au hasard 20 boîtes. On assimile ce choix à un tirage successif avec remise.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boîtes contenant des guirlandes à n'utiliser qu'à l'extérieur.

1 a. Reconnaître la loi suivie par X.
Donner ses paramètres.
b. Calculer, à l'aide de la calculatrice, $P(X = 10)$.
c. Calculer $P(X \geqslant 1)$.

2 L'employé vérifie n boîtes.
a. Montrer que $P(X \geqslant 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
b. Résoudre l'inéquation $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant 0{,}1$.
c. En déduire le nombre de boîtes que l'employé doit vérifier pour que la probabilité d'obtenir au moins une boîte à n'utiliser qu'à l'extérieur soit supérieure ou égale à 0,9.

22 Loi binomiale pour de grandes valeurs de n

On considère X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;p)$.

1 La variance de X est donnée par l'expression :
$$V = np(1-p).$$
Donner l'expression de l'écart type σ.

2 Justifier que, a et b étant des entiers positifs :
$$P(a < X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a).$$

3 On rappelle que le calcul de la probabilité cumulée $P(X \leqslant k)$, dans le cas d'une loi binomiale, est donnée à la calculatrice par :
Sur TI™ : `A:binomFRép(n,p,k)` ;
Sur Casio 75 : BinomialCD(n, p, k).

Voir pages 346 et 347

a. X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10\,;0{,}3)$.
Calculer l'espérance μ et l'écart type σ de X.
Calculer $P(\mu - 2\sigma < X \leqslant \mu + 2\sigma)$.
b. Recommencer le calcul précédent pour :
- $n = 6$ et $p = 0{,}9$;
- $n = 400$ et $p = 0{,}5$;
- $n = 2\,000$ et $p = 0{,}4$.

Lorsque n devient grand et que p est voisin de 0,5, quelle est la valeur, arrondie au centième près, de la probabilité calculée ?

2 Probabilité conditionnelle

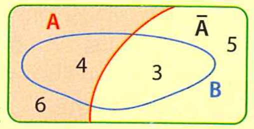
23 QCM

Trouver toutes les bonnes réponses.
A et B sont deux événements d'un univers E.

1 La probabilité que l'événement B soit réalisé, sachant que A est réalisé, est :
a. $P(A \cap B)$. **b.** $P_B(A)$. **c.** $\dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

2 Si les événements A et B précédents sont tels que $P(A \cap B) = 0{,}2$ et $P_A(B) = 0{,}25$, alors :
a. $P(A) = 0{,}4$. **b.** $P(A) = 0{,}8$. **c.** $P(A) = 0{,}45$.

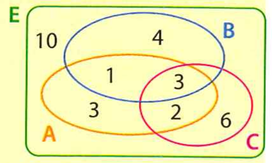
3 Les événements A et B sont représentés ci-contre.



a. $P_B(A) = 0{,}4$.
b. $P_A(B) = 0{,}4$.
c. $P_{\bar{A}}(B) = 0{,}6$.
d. $P(A \cap B) = 0{,}4$.

24 QCM

On considère des événements A, B et C d'un même univers E, schématisé par le diagramme ci-contre.



Trouver toutes les bonnes réponses.
a. $P(A) = 0{,}9$; **b.** $P(A \cap B \cap C) = \dfrac{3}{29}$;
c. $P(B) = \dfrac{4}{29}$; **d.** $P_A(B) = \dfrac{4}{5}$; **e.** $P_C(A) = \dfrac{5}{11}$.

25 QCM

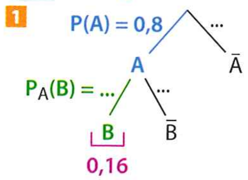
Le tableau suivant donne la répartition des élèves en fonction de la langue étudiée :

	Anglais (A)	Espagnol (E)
Russe (R)	10	4
Chinois (C)	9	9
Allemand (D)	16	22

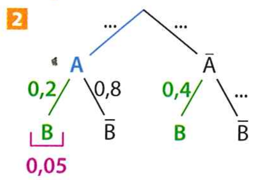
Trouver toutes les bonnes réponses.
a. $P_A(R) = 0{,}125$; **b.** $P_C(E) = 0{,}5$;
c. $P_D(E) = \dfrac{22}{16}$; **d.** $P(E \cap R) = 0{,}05$.

26 Compléter les arbres pondérés

1



2



27 Jeu de dés

On lance deux dés équilibrés, un vert et l'autre violet, dont les faces sont numérotées de 1 à 6, puis on calcule la somme des nombres apparus.
Calculer la probabilité d'obtenir une somme égale à 10 sachant que le dé violet indique 4.

28 Chômage en France

Une enquête est réalisée auprès d'une population de chômeurs de 25 à 64 ans, comportant autant d'hommes que de femmes :
- 43 % sont en fin d'emploi à durée limitée ;
- 27 % ont été licenciés ;
- 9 % ont démissionné.

Parmi les femmes, 22,5 % sont au chômage à la suite d'un licenciement, 11,3 % après avoir démissionné, et 45 % après la fin d'un emploi à durée limitée.
a. Construire un tableau à double entrée représentant la situation.
b. On interroge un chômeur.
Calculer la probabilité que ce soit une femme licenciée.
c. On interroge un chômeur ayant démissionné.
Calculer la probabilité que ce soit une femme.
d. On interroge un chômeur en fin d'emploi à durée limitée.
Calculer la probabilité que ce soit un homme.

29 Jeu de hasard ALGO

Dans un jeu de hasard, on sait que, pour un tirage donné, 1 joueur sur 1 million est un « grand gagnant ».
Parmi ces « grands gagnants », 1 sur 20 est un joueur occasionnel.

1 Déterminer la probabilité d'être, parmi les joueurs, un « grand gagnant » et un joueur occasionnel.

2 Déterminer la probabilité d'être un joueur occasionnel qui ne soit pas un « grand gagnant ».

3 On propose l'algorithme suivant :

```
Variables : x,y,z,p
Demander la probabilité
de A et la stocker dans x ;
Demander la probabilité
de B sachant A
et la stocker dans y ;
Demander la probabilité
de B sachant nonA
et la stocker dans z ;
Si x<0 ou x>1
Alors Afficher «Erreur»
Si y<0 ou y>1
Alors Afficher «Erreur»
Si z<0 ou z>1
Alors Afficher «Erreur»
    x*y+(1-x)*z → p
Afficher p
Fin
```

En appliquant cet algorithme à l'exercice, expliquer à l'aide d'une phrase le calcul réalisé.
Donner le résultat affiché p.

3 Probabilité d'un événement sur un arbre pondéré

30 Vrai ou faux ?

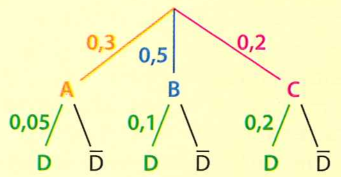
1 **a.** Les événements A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers E, donc pour tout événement B :

$$P(B) = P_A(B) + P_{\bar{A}}(B).$$

b. Les événements A et B forment une partition de l'univers E. Si C est un événement de E, les événements $A \cap C$ et $B \cap C$ sont incompatibles.

c. Si les événements A, B et C forment une partition de l'univers E, alors $P(A) + P(B) + P(C) = P(E)$.

2 A, B, C et D sont quatre événements de E, tels que A, B et C forment une partition de E.



Alors :

a. $P(A \cap B) = 0{,}15$.

b. $P(B \cap D) = 0{,}05$.

c. $P(D) = 0{,}265$.

d. $P_D(A) = \frac{1}{7}$.

31 QCM

Une ou plusieurs réponses sont possibles.
Corriger les réponses fausses.

A et B sont deux événements de probabilité non nulle dans un univers E, tels que :

$$P(A \cap B) = 0{,}38 \quad \text{et} \quad P(\bar{A} \cap B) = 0{,}22.$$

Alors :

a. $P(B) = 0{,}60$.

b. $P(\bar{A}) = 0{,}40$.

c. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) + P(A \cap \bar{B}) = 0{,}40$.

d. $P_B(A) = 0{,}36$.

32 QCM

Une maladie atteint 1 % d'une population donnée.
Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :

- chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % sont négatifs ;
- chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs.

Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test.
On note M l'événement : « l'individu est malade » et T l'événement : « le test pratiqué est positif ».

a. $P(T \cap M) = 0{,}99$.

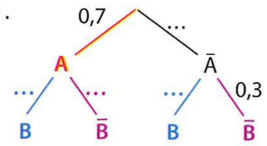
b. $P(\bar{T}) = 0{,}99$.

c. $P(T) = 0{,}0297$.

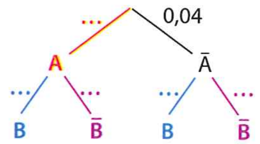
d. Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu soit malade.

33 Compléter les arbres suivants

a. $P(B) = 0{,}13$.



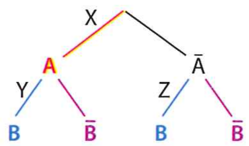
b. $P_B(A) = 0{,}96$ et $P(B) = 0{,}208$.



34 Algorithme

A et B sont deux événements d'un même univers, de probabilité non nulle. On note :

$P(A) = X$; $P(B) = W$; $P_A(B) = Y$;
$P_{\text{nonA}}(B) = Z$; $P(A \text{ et } B) = U$; $P(\text{nonA et } B) = V$.




```
PROGRAM:PROBA
:Prompt X,Y,Z
:X*Y→U
:(1-X)*Z→V
:U+V→W
:Disp "
```

1 Que calcule, en termes de probabilité, la deuxième ligne du programme ? la troisième ligne ?
Compléter les trois lignes du programme qui ont été effacées, demandant l'affichage des probabilités calculées.

2 Reconnaître la propriété illustrée par ce programme.

3 Prolonger ce programme pour qu'il calcule, en plus, la probabilité $P_B(A)$.

4 **Application**
Une agence de voyage propose des week-ends ou des séjours d'une semaine.
65 % des séjours proposés par cette agence de voyage sont des séjours d'une semaine.
Parmi ces séjours d'une semaine, 20 % proposent une thalassothérapie.
Parmi les week-ends proposés, 30 % proposent une thalassothérapie.
Le candidat d'un jeu télévisé gagne un séjour dans cette agence.

a. Calculer la probabilité qu'il ait gagné un séjour en thalassothérapie.

b. Sachant que le candidat a gagné un séjour en thalassothérapie, calculer la probabilité que ce soit un séjour d'une semaine.

35 Covoiturage

Un site de covoiturage publie les résultats d'une enquête réalisée auprès des inscrits sur ce site.
67 % des inscrits ont déjà pratiqué le covoiturage et parmi eux, 72 % pensent qu'ils ont réalisé des économies financières.
Parmi ceux n'ayant jamais pratiqué le covoiturage, 84 % pensent qu'il permet de réaliser des économies financières.
On interroge au hasard un inscrit sur le site.
On note C l'événement : « cet inscrit pratique le covoiturage » et E l'événement : « cet inscrit pense que le covoiturage permet de réaliser des économies financières ».

1 **a.** Donner $P_C(E)$ et $P_{\bar{C}}(E)$.

b. Construire un arbre pondéré représentant la situation.

2 On interroge une personne inscrite sur le site.

a. Calculer la probabilité qu'elle pratique le covoiturage et qu'elle pense que le covoiturage permet de réaliser des économies financières.

b. Calculer $P(E \cap \bar{C})$. Interpréter le résultat.

c. En déduire $P(E)$. Interpréter le résultat.

3 **a.** Calculer $P(\bar{E})$.

b. On interroge une personne inscrite sur le site pensant que le covoiturage ne fait pas réaliser d'économie financière. Calculer la probabilité que ce soit une personne pratiquant le covoiturage.
Arrondir le résultat à 10^{-2} près.

36 Orientation post-Bac

Dans une région française, 22 938 étudiants sont titulaires d'un Bac, dont 6 500 d'un Bac professionnel ou technique.
Parmi les étudiants ayant un Bac général, 13 % sont admis en BTS ou en IUT.
Parmi les étudiants titulaires d'un Bac, 31 % sont admis en BTS ou en IUT.
On note B l'événement « l'étudiant est titulaire d'un Bac général » et I l'événement « l'étudiant est admis en IUT ou en BTS ».

1 Construire un arbre pondéré, ou un tableau à double entrée, représentant la situation.

2 On interroge un étudiant titulaire d'un Bac, au hasard. Calculer la probabilité que ce soit un étudiant titulaire d'un Bac professionnel ou technique admis en IUT ou en BTS.

3 Calculer la probabilité qu'un étudiant soit admis dans un IUT ou en BTS.

4 On interroge un étudiant admis en BTS ou en IUT. Calculer la probabilité qu'il ait un Bac général.

37 Taux de participation à un scrutin

Pour le renouvellement du conseil municipal d'une ville, les électeurs sont répartis en fonction de leur âge.
Le groupe A comprenant les électeurs de moins de 35 ans, représente 38 % de l'ensemble des électeurs.
Le groupe B comprenant les électeurs de 35 à 60 ans, représente 43 % de l'ensemble des électeurs.
Le groupe C comprenant les électeurs de plus de 60 ans, représente 19 % de l'ensemble des électeurs.
Les **taux de participation** pour chacun des groupes est :

- 81 % dans le groupe A ;
- 84 % dans le groupe B ;
- 69 % dans le groupe C.

On note V l'événement « l'électeur a participé au scrutin ».

1 On choisit un électeur « X » au hasard.

a. Calculer la probabilité que ce soit un électeur de moins de 35 ans ayant participé au scrutin.

b. Quel est le taux de participation du scrutin ?

2 On choisit au hasard un bulletin parmi les bulletins dépouillés.
Quelle est la probabilité pour que ce bulletin soit celui d'une personne de 35 ans ou plus ?

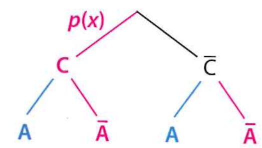
38 Lancement d'un nouveau produit

Une entreprise propose un nouveau produit sur le marché.
Après avoir réalisé une enquête, le service commercial constate que la probabilité qu'une personne connaisse ce nouveau produit après x semaines de publicité est donnée par la formule :

$$p(x) = \frac{5x}{6x+4},$$

où x est un nombre réel positif.
Si une personne connaît le produit après x semaines, la probabilité qu'elle achète ce produit est 0,8.
Si une personne ne connaît pas le produit, la probabilité qu'elle achète ce produit est 0,2.
On interroge une personne au hasard.
On note C l'événement « la personne connaît le produit » et A l'événement « la personne achète le produit ».

1 **a.** Compléter, à l'aide de l'énoncé, l'arbre pondéré ci-dessous :



b. Exprimer, en fonction de x, la probabilité que la personne connaisse le produit et l'achète.

2 Exprimer, en fonction de x, la probabilité $q(x)$ que la personne achète le produit.

3 **a.** Étudier les variations de q sur $[0\,;+\infty[$.

b. Résoudre l'inéquation $q(x) > 0{,}5$. Interpréter.

39 Sondage pour la construction d'un barrage

Le barrage des Trois-Gorges, en Chine.

Un sondage effectué dans une région à propos de la construction d'un barrage donne les résultats suivants :
65 % des personnes interrogées sont contre la construction de ce barrage et parmi les personnes qui sont contre, 70 % sont écologistes.
Parmi les personnes favorables à cette construction, 20 % sont écologistes.
On note C l'événement « la personne interrogée est contre la construction » et E l'événement « la personne interrogée est écologiste ».

1 a. Donner les probabilités $P(C)$ et $P_C(E)$.
Indiquer par une phrase la signification de $P_{\overline{C}}(E)$ et donner sa valeur.
b. Dresser un arbre résumant les données.
Déterminer $P(C \cap E)$, puis la probabilité pour qu'une personne interrogée soit écologiste.
c. On interroge une personne écologiste.
Calculer la probabilité qu'elle soit contre la construction du barrage.

2 a. On choisit au hasard trois personnes parmi celles interrogées lors de ce sondage. Le nombre de personnes interrogées étant très grand, on peut estimer que ce choix se fait de façon indépendante.
Quelle est la probabilité que deux personnes exactement soient contre la construction du barrage ?
b. On prend au hasard des fiches de personnes interrogées. Combien faut-il prendre de fiches au minimum pour obtenir au moins une personne favorable à la construction de ce barrage avec une probabilité supérieure à 0,999 ?

40 Remporter le gros lot

On dispose de deux urnes U1 et U2.
L'urne U1 contient 2 billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher.
L'urne U2 contient 3 billes vertes et 7 billes rouges toutes indiscernables au toucher.
Une partie consiste à tirer au hasard une bille de l'urne U1, noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U1, puis de tirer au hasard une bille de l'urne U2, noter sa couleur et remettre la bille dans U2.
À la fin de la partie, si le joueur a tiré deux billes vertes, il gagne un lecteur mp3.
S'il a tiré une bille verte, il gagne un ours en peluche.
Sinon, il ne gagne rien.

1 Montrer, à l'aide d'un arbre pondéré, que la probabilité de gagner un lecteur mp3 est $p = 0{,}06$.

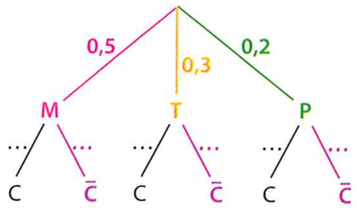
2 Quelle est la probabilité de gagner un ours en peluche ?

3 On appelle n le nombre de personnes participant à la loterie un jour donné et jouant une seule fois.
On note p_n la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur mp3.
a. Justifier que $p_n = 1 - 0{,}94^n$.
b. Combien de personnes au moins doivent jouer pour qu'il y ait 99 % de chances qu'au moins un des joueurs gagne un lecteur mp3 ?

41 Carte des desserts

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert :
• un assortiment de macarons, choisi par 50 % des clients ;
• une part de tarte Tatin, choisie par 30 % des clients.
20 % des clients ne prennent pas de dessert et aucun client ne prend plusieurs desserts.
Le restaurateur a remarqué que :
• parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80 % prennent un café ;
• parmi les clients ayant pris une part de tarte Tatin, 60 % prennent un café ;
• parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90 % prennent un café.
On interroge au hasard un client de ce restaurant.
On note les événements :
• M : « le client prend un assortiment de macarons » ;
• T : « le client prend une part de tarte Tatin » ;
• P : « le client ne prend pas de dessert » ;
• C : « le client prend un café ».

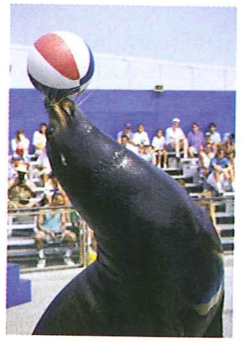
1 Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2 a. Calculer la probabilité que le client prenne un café et un assortiment de macarons.
b. Montrer que la probabilité que le client prenne un café est 0,76.

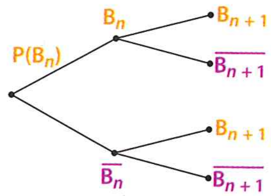
3 Un assortiment de macarons est vendu 6 €, une part de tarte Tatin est vendue 7 € et un café est vendu 2 €.
Chaque client prend un plat, et un seul, au prix unique de 18 €, ne prend pas plus d'un dessert, ni plus d'un café.
Soit X la variable aléatoire égale à la somme totale dépensée par le client.
Déterminer la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat.

42 L'otarie jongleuse



Dans un zoo, une otarie est dressée pour rattraper des ballons.
On a observé que :
• si une otarie attrape un ballon, la probabilité qu'elle en attrape un de nouveau est 0,3 ;
• si elle rate le ballon, la probabilité qu'elle l'attrape la deuxième fois est 0,9.
Au début du jeu, l'otarie attrape le ballon.
Pour tout entier naturel n non nul, on note B_n l'événement : « l'otarie attrape le ballon lors du n-ième envoi ».
$\overline{B_n}$ est l'événement contraire de B_n.
On considère alors la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = P(B_n)$.

1 a. Donner $P_{B_n}(B_{n+1})$; $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$.
b. Placer ces probabilités sur l'arbre pondéré suivant et le compléter :



c. Exprimer $P(B_{n+1})$ en fonction de $P(B_n)$ et $P(\overline{B_n})$.

2 a. Sur tableur, préparer le tableau suivant :

	A	B	C	D	E
1	n	$P(B_n)$	$P(\overline{B}_n)$	$P_{B_n}(B_{n+1})$	$P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$
2	0	1	0	0,3	0,9

b. Entrer en cellule B3 `=$D$2*B2+C2*$E$2`
et en cellule C3 `=1-B3`. Recopier jusqu'à $n = 100$.
Observer les valeurs de $P(B_n)$ et $P(\overline{B_n})$.
c. Changer les valeurs initiales de $P(B_n)$ et $P(\overline{B_n})$.
Le comportement des suites de termes généraux $P(B_n)$ et $P(\overline{B_n})$ est-il modifié ?

3 a. En utilisant **1 c.**, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
b. On définit la suite (t_n) de terme général :
$$t_n = u_n - \frac{9}{16}.$$
Montrer que la suite (t_n) est géométrique de raison $-0{,}6$.
Calculer le premier terme.
c. Exprimer t_n, puis u_n en fonction de n.

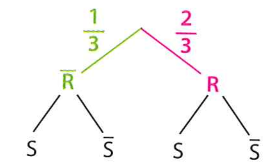
4 Déterminer, à l'aide du tableur, le nombre de lancers du ballon à partir duquel l'otarie a moins de 3 chances sur 5 de rattraper le ballon.

5 a. Déterminer la limite de la suite (t_n) quand n tend vers $+\infty$.
b. En déduire la probabilité que l'otarie rattrape le ballon après un très grand nombre de lancers.
Interpréter le résultat en termes de probabilité.
c. Si l'otarie attrape le ballon au premier lancer avec une probabilité de 0,5, le comportement de la suite (u_n) est-il modifié ?

43 Lancers successifs de dés

Une boîte contient deux dés : un dé rose cubique parfaitement équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et un dé vert dont deux faces portent le numéro 6 et les autres le numéro 2.
On choisit un dé au hasard dans la boîte, puis on lance ce dé. Le dé rose a deux fois plus de chance d'être choisi que le dé vert.
On note :
• R l'événement « le dé est rose » ;
• S l'événement « on obtient six au lancer du dé ».

1 a. Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :

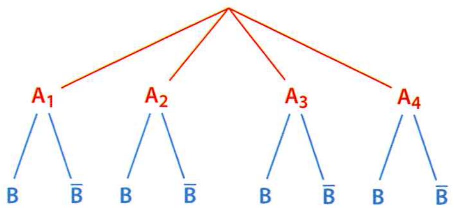
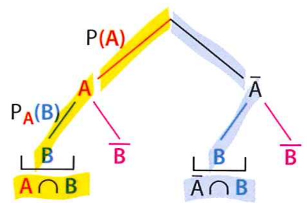


b. Calculer la probabilité d'avoir choisi le dé rose et obtenu un six.
c. Calculer la probabilité d'obtenir un six quel que soit le dé choisi.
d. On a obtenu un six.
Calculer la probabilité que le dé soit vert.

2 On relance le dé choisi une deuxième fois.
a. Prolonger l'arbre pondéré précédent.
b. Calculer la probabilité d'avoir choisi le dé rose et d'avoir obtenu deux fois le six.
c. Calculer la probabilité d'obtenir deux fois le six quel que soit le dé choisi.
d. Sachant qu'on a obtenu deux fois le six, calculer la probabilité que le dé soit vert.

3 On relance n fois le dé choisi.
Montrer que la probabilité d'obtenir n fois un six est :
$$p_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

4 a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité d'obtenir le dé vert sachant qu'on a obtenu n fois un six.
b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la plus petite valeur de n telle que :
$$p_n \leqslant 0{,}001.$$

Dans l'énoncé	Comment faire ou rédiger ?
Traduire une situation par un arbre pondéré par les probabilités.	L'énoncé présente une partition de l'univers en parties A_1, A_2, A_3, ... On dresse alors un arbre pondéré en plaçant les probabilités $P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(A_3)$, ... sur les branches du premier niveau. On repère dans l'énoncé les phrases contenant les expressions « sachant que », « parmi », « si », ... dans lesquelles A_1, A_2, A_3, ... sont les ensembles de référence.  Sur les branches du deuxième niveau, on place les probabilités des événements B et $\bar{B}$, conditionnées par chacun des événements A_1, A_2, A_3, ...
Donner la probabilité conditionnelle $P_A(B)$, probabilité de B sachant A.	A et B sont deux événements de l'univers E et la probabilité de A est non nulle. On choisit au hasard un individu réalisant l'**événement B parmi** ceux réalisant l'**événement A**. La probabilité de B est **conditionnée** par l'événement A. On note $P_A(B)$, en écrivant A « en bas ». Cette notation $P_A(B)$ indique que A est l'événement de référence. Et de plus, $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$.
Calculer la probabilité de l'intersection $P(A \cap B)$.	Si l'on a placé, sur un arbre pondéré, la probabilité de A et la probabilité conditionnelle de B sachant A, on suit les branches pour obtenir $P(A \cap B)$ par le produit de ces deux probabilités : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$. On a aussi : $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$. 
Calculer $P(B)$ dans un arbre pondéré.	Dans le cas d'**une partition** de E, on peut dresser un arbre pondéré comme celui dessiné plus haut. La **probabilité de B** se calcule en ajoutant les produits des probabilités situées sur chacune des branches arrivant à B : $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$. Ainsi, sur l'arbre ci-dessus : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.
On choisit au hasard un individu réalisant B. Calculer la probabilité qu'il réalise A.	Cette question est posée quand on a déjà calculé la probabilité de B. On demande ici de calculer la **probabilité conditionnelle** de A **sachant que** B **est réalisé**. On revient alors à la définition : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
On choisit n individus au hasard et de façon indépendante...	Dans l'énoncé, on repère les phrases indiquant qu'une expérience aléatoire est répétée : « On choisit n individus au hasard et de façon **indépendante** » ou « On assimile l'expérience à n tirages **successifs avec remise** ». On peut alors établir une **loi binomiale** de paramètres n (le nombre d'expériences répétées) et p (la probabilité de succès). Cette loi se note $\mathscr{B}(n\,;p)$.

Exercice guidé

44 On étudie le trafic sur un tronçon d'autoroute de contournement d'une grande ville.
On constate que la moitié des véhicules empruntant cette autoroute sont des camions et que 40 % sont des voitures particulières. Les autres sont des motos.
La société exploitant cette autoroute propose des abonnements aux usagers. Parmi les conducteurs de voitures particulières, 60 % n'ont pas souscrit d'abonnement. 20 % des conducteurs de motos et 20 % des conducteurs de camions se sont abonnés.
Un véhicule se présente au péage.
On note les événements suivants :
- M : « le véhicule est une moto » ;
- C : « le véhicule est un camion » ;
- V : « le véhicule est une voiture particulière » ;
- A : « le conducteur a souscrit un abonnement ».

1 a. Traduire l'énoncé par un arbre pondéré.
b. Donner $P_M(A)$.
2 a. Montrer que la probabilité que le conducteur arrivant au péage ait souscrit un abonnement est 0,28.
b. Sachant que le conducteur est un abonné, calculer la probabilité que son véhicule soit une moto.
3 Quatre véhicules arrivent au péage, indépendamment les uns des autres.
a. Calculer la probabilité que deux véhicules exactement soient ceux de deux abonnés. *Arrondir à 10^{-3} près.*
b. Calculer la probabilité qu'au moins un véhicule soit celui d'un abonné. *Arrondir à 10^{-3} près.*
4 Le tarif pour emprunter ce tronçon d'autoroute est de 2 € pour une moto, 4 € pour un camion et 3,50 € pour une voiture particulière. L'abonnement permet d'obtenir une réduction de 20 %.
a. Calculer la probabilité que le conducteur paie exactement 3,20 €.
b. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire S égale à la somme payée par le conducteur.
c. Calculer la somme payée en moyenne par véhicule quand un grand nombre de véhicules se présente au péage.

Aide

Lire l'énoncé au moins jusqu'à la première question pour savoir de quoi on parle et connaître les lettres employées pour les événements.
Ne pas anticiper sur les questions et les **suivre avec soin**.
Si un pourcentage est donné dans l'énoncé, toujours se poser la question « **quel est l'ensemble de référence** sur lequel porte ce "pourcent" ? »
« **Parmi** les personnes ... » signifie que l'on a une fréquence conditionnelle.

1 a. L'étude statistique permet de déterminer les événements formant une partition de l'ensemble des véhicules et d'établir les probabilités à placer sur les branches du premier niveau : la première phrase donne $P(C) = 0,5$.
Les phrases suivantes donnent les probabilités à placer sur les branches du deuxième niveau.
b. $P_M(A)$ est la probabilité que le conducteur soit abonné, **sachant que** son véhicule est une moto.

2 a. « A » se situe plusieurs fois sur le dernier niveau. On suit chacune des branches arrivant à A, on calcule le produit des pondérations rencontrées, puis on ajoute les produits calculés.
b. On demande $P_A(M)$.

3 On peut penser que les véhicules arrivent au péage de façon indépendante les uns des autres. On a alors répétition de 4 épreuves de Bernoulli de paramètre $p = P(A)$.
a. On reconnaît une loi binomiale que l'on établit.
b. « Au moins un » doit faire penser au contraire : « **aucun conducteur** n'est abonné ».

4 a. On considère un nouvel univers : l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S :
$$\{1,6\ ;\ 2\ ;\ 2,8\ ;\ 3,2\ ;\ 3,5\ ;\ 4\}.$$
La probabilité que la somme payée soit égale à 3,20 € est $P(C \cap A)$, à calculer à l'aide de l'arbre.
b. On dresse la loi de la variable aléatoire S dans un tableau.
c. On calcule l'espérance de S pour trouver la somme payée en moyenne par véhicule.

Revoir les outils de base

Savoir utiliser les propriétés de la moyenne

45 Anouchka achète deux jupes à 33 € chacune, un sac à 65 € et trois pulls à 19 € chacun.
1 Calculer la dépense moyenne d'Anouchka.
2 Elle possède six bons de réduction de x euros chacun qu'elle utilise pour chacun de ces achats. Calculer, en fonction de x, la nouvelle dépense moyenne d'Anouchka.
3 Anouchka bénéficie d'une remise de 20 % sur chacun de ses achats, mais elle ne peut alors pas utiliser ses bons de réduction. Calculer la nouvelle dépense moyenne.
4 Calculer le montant des bons de réduction pour que leur utilisation soit plus avantageuse que la remise de 20 %.

Aide
1 On applique la formule de la moyenne pondérée :
$$\bar{x} = \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots n_px_p}{n_1 + n_2 + \ldots + n_p}.$$
2 Si l'on **ajoute ou retranche** un même nombre à chaque terme de la moyenne, la moyenne est **augmentée ou diminuée** de ce nombre.
3 Si l'on **multiplie chaque terme** de la moyenne par un même nombre, la moyenne est **multipliée par ce nombre.** Ici, les prix diminuent de 20 %, donc ils sont multipliés par le coefficient multiplicateur correspondant.
4 Résoudre l'inéquation.

Savoir appliquer les propriétés de la moyenne au calcul de l'espérance

46 **1** Soit X la variable aléatoire égale au gain obtenu lors d'un jeu de hasard.
La loi de probabilité de X est donnée par le tableau :

Gain x_i	0	2	3	5	10
Probabilité	0,45	0,35	0,10	0,09	0,01

Calculer l'espérance E(X) de la variable aléatoire X.
2 Lors de la partie suivante, le meneur de jeu propose de doubler les gains. Soit Y la variable aléatoire égale au gain du joueur. Écrire l'expression de Y en fonction de X, puis calculer son espérance.
3 Le joueur a misé m euros au début de la partie. Écrire, en fonction de X, l'expression de la variable aléatoire Z égale au gain algébrique du joueur puis calculer l'espérance de Z. Calculer le montant de la mise pour que le jeu soit équitable.

Aide
1 L'espérance de X est la moyenne des valeurs du gain, pondérée par les probabilités.

Valeur de X	x_1	x_2	…	x_n
Probabilité	p_1	p_2	…	p_n

$$E(X) = x_1\ p_1 + x_2\ p_2 + \ldots + x_n\ p_n$$
2 Les valeurs du gain ont doublé, donc la variable aléatoire Y est le double de X.
L'espérance étant une moyenne, on applique la propriété de la moyenne.
3 Le joueur a misé m euros au début de la partie et ne récupère pas sa mise. Donc on retranche cette somme de chacun des gains. On applique ensuite les propriétés de la moyenne. Le jeu est **équitable** lorsque $E(X) = 0$.

Savoir reconnaître et utiliser les coefficients binomiaux

47 La variable aléatoire X suit la loi binomiale notée $\mathcal{B}(3\,;0{,}4)$.
1 **a.** Construire l'arbre pondéré correspondant à la situation.
b. Lire sur l'arbre le nombre de chemins comportant exactement : 3 succès ; 1 succès ; 2 succès.
c. Calculer la probabilité d'obtenir 2 succès.
2 On ajoute un niveau à l'arbre pondéré précédent.
a. Écrire, à l'aide des coefficients binomiaux, le nombre de chemins contenant exactement 2 succès, puis exactement 3 succès.
b. Calculer les valeurs de ces coefficients binomiaux à la calculatrice.

Aide
1 **b.** Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le **nombre de chemins** comportant k succès sur un arbre à n niveaux.
c. On retrouve les propriétés des coefficients binomiaux :
$$\binom{n}{n} = 1\,;\quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$
d. Une liste comportant 2 succès peut s'écrire {S ; S ; E} et a pour probabilité $0{,}4^2 \times 0{,}6$. Le nombre de listes comportant **2 succès** est le nombre de chemins comportant **2 succès** sur un arbre à **3 niveaux**.
2 Les valeurs des coefficients binomiaux s'obtiennent à la calculatrice. Voir pages 346 et 347

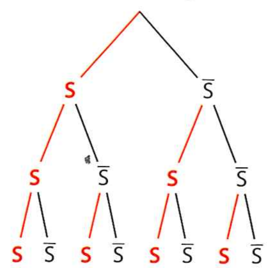
Pour aller plus loin

48 Le problème de Monty Hall

Le problème de Monty Hall est inspiré d'un jeu télévisé américain : *Let's Make a Deal*.
Monty Hall fut son présentateur pendant treize ans.
Le jeu oppose un présentateur à un joueur. Ce joueur est placé devant trois portes fermées.
Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre.
Le joueur doit tout d'abord désigner une porte, puis le présentateur ouvre une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture.
Le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début.
Le candidat a alors le droit, ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte.
Que doit faire le candidat ?
Quelles sont ses chances de gagner la voiture en agissant au mieux ?

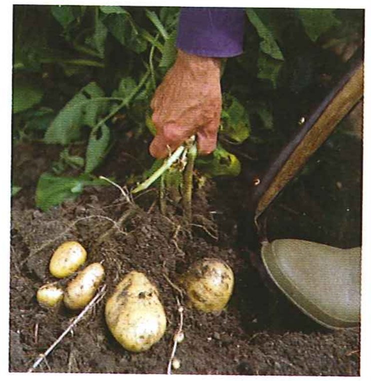
49 Espérance de gain

Lors d'un jeu télévisé, Lila-Rose dispose d'un dé parfaitement équilibré.
Elle lance ce dé jusqu'à obtenir pour la deuxième fois « six ». Dans ce cas, la partie s'arrête.
Elle gagne 400 € si un « six » apparaît et perd 100 € si un « non six » apparaît.
On lance au maximum trois fois le dé.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de Lila-Rose.
1 **a.** On donne ci-contre l'arbre correspondant au jeu décrit ci-dessus. Compléter cet arbre par les pondérations.
b. Déterminer la loi de probabilité de X.
c. Le jeu est-il équitable ?



2 On poursuit le jeu ainsi : si Lila-Rose obtient n « six », on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne et on tire ensuite, de cette urne, une boule dont le numéro est k. Lila-Rose multiplie alors par k le gain précédent. On note alors Y la variable aléatoire égale au gain de Lila-Rose.
a. Construire l'arbre pondéré représentant la situation.
b. Calculer la probabilité que Lila-Rose n'ait rien gagné à l'issue du jeu.
c. Calculer le gain que Lila-Rose peut espérer obtenir à l'issue du jeu.

50 Test de dépistage en agriculture



Pour déceler les plants de pommes de terre malades, les producteurs doivent attendre que ceux-ci sortent de terre. Mais des pommes de terre portées par des plants qui ont l'air sains peuvent être porteuses d'un virus qui peut détruire la culture.
Depuis peu, un nouveau test de diagnostic fondé sur l'ADN permet de décider si une pomme de terre est exempte ou non de cette maladie. Il se pratique sur la partie externe du plant. Ce test étant onéreux, le producteur ne l'applique qu'après avoir observé et sélectionné les plants.
Dans le champ d'un producteur, 35 % des plants sont malades. Le producteur observe chacun des plants.
Il arrache les plants qui lui semblent malades :
La probabilité qu'il n'arrache pas un plant malade est 0,1.
La probabilité qu'il arrache un plant sain est 0,2.
Pour être certain que les plants non arrachés sont sains, il désire pratiquer le test d'ADN sur tous ces plants.
On admet que :
- dans le cas d'un plant malade non arraché, la probabilité que le test soit positif est 0,9 ;
- dans le cas d'un plant sain non arraché, la probabilité que le test soit négatif est 0,9.

On note :
- M l'événement « le plant est malade » ;
- A l'événement « le plant est arraché » ;
- T l'événement « le test est positif ».

Construire l'arbre pondéré traduisant cette situation.
Calculer $P_{\bar{A}\cap T}(M)$. Interpréter le résultat.
À partir de quelle proportion de plants malades dans le champ, la probabilité $P_{\bar{A}\cap T}(M)$ est-elle supérieure à 0,5 ?

51 Petite ou grande raquette ?

Dans un club de tennis, on propose aussi une activité ping-pong, bien utile quand tous les courts sont occupés. La probabilité que tous les courts soient occupés quand on n'a pas réservé est de 0,8.
Un couple de membres du club qui n'a pas réservé se présente : si les courts sont occupés, il joue au ping-pong dans 70 % des cas ; si les courts ne sont pas tous occupés, il joue au ping-pong dans 30 % des cas.
On interroge, au hasard, un couple du club qui n'a pas réservé. On note :
A : « les courts sont occupés » ;
B : « le couple joue au ping-pong ».
1 **a.** Traduire l'énoncé par un arbre pondéré.
b. Donner $P_A(B)$ et $P_{\bar{A}}(B)$.
c. Calculer la probabilité que les courts soient occupés et que le couple joue au ping-pong.
d. Déduire des résultats précédents, la probabilité que le couple joue au ping-pong.
2 Sachant que le couple interrogé joue au ping-pong, calculer la probabilité que les courts soient tous occupés.
3 Trois couples se présentent successivement et indépendamment les uns des autres. Aucun des couples n'a réservé. On suppose que, pour chaque couple, la probabilité qu'il joue au ping-pong est de 0,62. On s'intéresse au nombre de couples jouant au ping-pong parmi ces trois couples. Déterminer la probabilité qu'au moins un des couples ne joue pas au ping-pong.

52 Citoyen européen

Lors d'un sondage organisé dans différents pays de l'Union européenne, sur une population comportant 52 % de femmes et 48 % d'hommes, on a posé cette question :
« Qu'est-ce qui renforcerait le plus votre sentiment d'être un citoyen européen ? ».
31 % des femmes interrogées et 34 % des hommes interrogés ont répondu qu'un système européen de protection sociale serait l'élément qui renforcerait le plus leur sentiment d'être un citoyen européen.
(Source : « Le futur de l'Europe », Commission européenne, sondage réalisé en mars 2006.)
Parmi les réponses des personnes interrogées lors de ce sondage, on prélève une réponse au hasard.
On appelle :
• H : « la réponse est celle d'un homme » ;
• F : « la réponse est celle d'une femme » ;
• S : « la réponse est "un système de protection sociale européen" ».
1 Dessiner un arbre pondéré traduisant la situation. Calculer la probabilité de l'événement S.
2 On choisit au hasard trois réponses de ce sondage. On admet que le nombre de réponses est suffisamment grand pour assimiler le choix de trois réponses à des tirages successifs indépendants avec remise. Déterminer la probabilité qu'au moins deux des trois réponses soient « avoir un système de protection sociale européen ».
On arrondira le résultat au millième près.

53 Espérance de gain dans un jeu vidéo

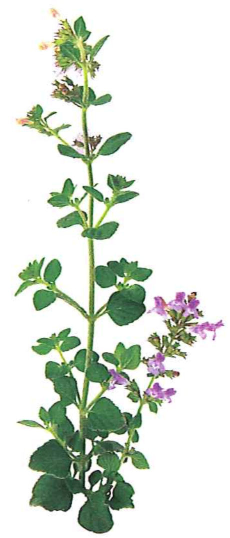
Dans un jeu vidéo, 10 boules bleues et n boules vertes apparaissent sur l'écran avec $n \geqslant 2$.
Le joueur doit atteindre une boule.
S'il atteint une boule bleue, il gagne deux points.
S'il atteint une boule verte, il perd trois points.
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
1 Si le joueur atteint une boule, elle disparaît de l'écran. Le joueur atteint deux boules successivement.
a. Construire l'arbre pondéré traduisant la situation.
b. Quels sont les chemins sur l'arbre pondéré menant à une perte d'un point ?
c. Exprimer en fonction de n, la probabilité d'atteindre une boule bleue, puis une boule verte.
d. Montrer que $P(X=-1)=\dfrac{20n}{(n+10)(n+9)}$.
e. Déterminer la loi de probabilité de X.
2 **a.** Vérifier que l'espérance de X est :
$$E(X)=\frac{-6n^2-14n+360}{(n+10)(n+9)}.$$
b. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $E(X)>0$.
3 Dans une deuxième partie du jeu, une boule atteinte réapparaît dans le jeu. Le jeu contient trois fois plus de boules vertes que de boules bleues.
Le joueur atteint 20 boules apparues sur l'écran.
Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boules bleues atteintes.
Les résultats seront arrondis au millième près.
a. Calculer la probabilité que le joueur atteigne deux boules bleues.
b. Calculer la probabilité que le joueur atteigne au moins une boule bleue.
4 Le jeu contient toujours trois fois plus de boules vertes que de boules bleues, mais le joueur atteint N boules apparues sur l'écran.
Déterminer le nombre minimum de boules que doit atteindre le joueur pour que la probabilité d'atteindre au moins une boule bleue soit supérieure ou égale à 0,99.

54 Tirage avec remise ou sans remise

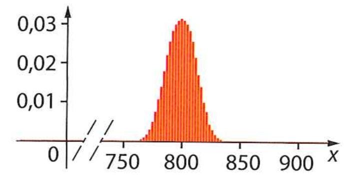
Lors d'une tombola, on place dans une enveloppe n billets ($n \geqslant 4$), dont quatre seulement sont gagnants.

On tire successivement deux billets de l'enveloppe.
On note G_k l'événement « le billet est gagnant au k-ième tirage ». On note X la variable aléatoire égale au nombre de billets gagnants obtenus à l'issue des deux tirages.
1 **Premier jeu**
On ne remet pas le premier billet dans l'enveloppe.
a. Exprimer $P(G_1)$, $P_{G_1}(G_2)$, $P_{\overline{G_1}}(G_2)$, en fonction de n.
b. Construire un arbre pondéré traduisant la situation. Calculer la probabilité d'obtenir exactement un billet gagnant à l'issue des deux tirages.
2 **Second jeu**
On remet le premier billet dans l'enveloppe et on tire ensuite un second billet.
a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.
b. Calculer la probabilité d'obtenir exactement un billet gagnant. On pourra s'aider d'un arbre.
c. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un billet gagnant.
3 On veut déterminer le jeu le plus avantageux pour obtenir exactement un billet gagnant.
On définit sur l'intervalle $[4;+\infty[$, les fonctions f et g par :
$$f(x)=\frac{8(x-4)}{x(x-1)} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{8(x-4)}{x^2}.$$
a. Étudier le signe de $f(x)-g(x)$.
b. En déduire le jeu le plus avantageux pour obtenir exactement un billet gagnant.
Expliquez, sans calcul, ce résultat.
4 **a.** Montrer que pour tout réel $x>4$:
$$f(x)-g(x)<\frac{8}{x^2}.$$
d. Déterminer une valeur de $x>4$ à partir de laquelle on a $f(x)-g(x)<0{,}01$.
c. En déduire le nombre de billets que l'on doit placer dans l'enveloppe pour que les deux jeux puissent être considérés comme équivalents pour obtenir un billet gagnant.
5 **a.** Pour chacun des deux jeux, calculer l'espérance du nombre de billets gagnants.
b. Comparer ces espérances.
Quel est alors le jeu le plus avantageux pour le joueur ?

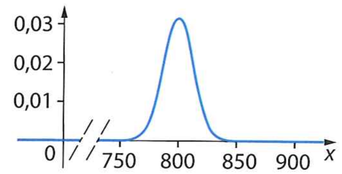
55 Approche de la loi binomiale



Une entreprise pharmaceutique prépare des plantes pour des infusions.
Le laboratoire étudie la taille des feuilles d'une plante, avant qu'elles soient séchées. Si la taille des feuilles est inférieure à 5 cm, les feuilles sont inutilisables une fois séchées.
La probabilité qu'une feuille soit utilisable est $p=0{,}8$.
On prélève, au hasard, $n=1\,000$ feuilles. Les tirages sont assimilés à des tirages successifs sans remise. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de feuilles utilisables parmi les feuilles prélevées.
1 **a.** Quelle est la loi suivie par X ? Préciser ses paramètres.
Le diagramme en bâtons représentant la loi de X est donné ci-dessous :



b. Calculer la variance de X : $V(X)=np(1-p)$, ainsi que l'écart type.
c. À l'aide de la calculatrice, calculer :
$P(X=775)$; $P(X=800)$; $P(X=825)$; $P(775 \leqslant x \leqslant 825)$.
2 Soit la fonction f définie par :
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{320\pi}}\,e^{\frac{-(x-800)^2}{320}}.$$
a. Étudier les variations de f et préciser les coordonnées de son extremum.
Comparer ces coordonnées à la valeur de la probabilité $P(X=800)$ demandée au **1 c.**
b. Calculer $f(775)$ et $f(825)$.
Comparer aux résultats obtenus au **1 c.**
c. Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
3 La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous :



Les deux représentations graphiques sont très proches.
Proposer un calcul utilisant une intégrale pour approcher le calcul $P(775 \leqslant X \leqslant 825)$.

56 Sportif ou mélomane ?

Une boîte de jeu est constituée de questions portant sur les thèmes *Sport* ou *Musique*. Un tiers des questions portent sur le thème *Sport*, les autres portent sur le thème *Musique*.

PARTIE A

On pose à Océane une question choisie au hasard dans la boîte et on sait que :
- la probabilité qu'Océane réponde correctement à une question *Sport* est $\frac{1}{2}$;
- la probabilité qu'Océane réponde correctement à une question *Musique* est $\frac{3}{4}$.

On note :
C : « la question porte sur le sport » ;
M : « la question porte sur la musique » ;
E : « Océane répond correctement à la question ».

1 Déterminer la probabilité de l'événement :
« la question posée porte sur le thème *Musique* et Océane y a répondu correctement ».

2 Montrer que la probabilité de E est $\frac{2}{3}$.

3 On suppose qu'Océane n'a pas répondu correctement à la question posée.
Quelle est la probabilité pour que la question posée ait porté sur le thème *Sport* ?

4 On pose successivement à Océane quatre questions indépendantes les unes des autres.
Calculer la probabilité qu'Océane réponde correctement à au moins une question posée.

PARTIE B

En fait, le jeu se déroule de la façon suivante :
On pose à Océane une 1^re^ question (selon les modalités vues en **Partie A**). Elle marque 5 points si elle répond correctement et le jeu s'arrête. Sinon, on lui pose une 2^e^ question, choisie indépendamment de la 1^re^, et elle marque 2 points si elle répond correctement et le jeu s'arrête. Sinon, on lui pose une 3^e^ question et elle marque 1 point si elle répond correctement. Sinon, le jeu s'arrête et elle ne marque aucun point.
Chaque fois qu'une question est tirée, on remet dans la boîte une question portant sur le même thème.

1 Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

2 Définir la loi de probabilité du nombre de points marqués par Océane.

3 Calculer l'espérance mathématique du nombre de points marqués par Océane. L'interpréter.

57 Préparer le printemps

Arielle prépare son jardin pour le printemps prochain. Elle achète deux sacs. Le sac 1 contient des bulbes de narcisses et le sac 2, des bulbes de tulipes.
La probabilité pour qu'un bulbe du sac 1 donne un narcisse jaune est égale à $\frac{1}{4}$.
La probabilité pour qu'un bulbe du sac 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.
Arielle choisit au hasard un sac et plante 50 bulbes.
On admet que l'effectif est suffisamment grand pour assimiler le tirage à un tirage successif avec remise.
Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leqslant n \leqslant 50$.
On définit les événements suivants :
- A : « Arielle a choisi le sac 1 » ;
- B : « Arielle a choisi le sac 2 » ;
- J_n : « Arielle obtient n fleurs jaunes ».

1 On suppose qu'Arielle choisit le sac 1.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fleurs jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du sac 1.
a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
b. Quelle est l'espérance mathématique de cette loi ?
c. Calculer, à l'aide de la calculatrice, la probabilité qu'Arielle obtienne 15 fleurs jaunes.
d. Calculer la probabilité qu'Arielle obtienne plus de 10 fleurs jaunes. *Arrondir le résultat au millième près.*
e. Donner une expression en fonction de n de la probabilité qu'Arielle obtienne n fleurs jaunes et qu'elle ait planté les 50 bulbes du sac 1.

2 **a.** Calculer $P(J_n \cap B)$. Interpréter le résultat.
b. Calculer $P(J_n \cap A)$.
c. Calculer la probabilité qu'Arielle obtienne n fleurs jaunes après avoir planté 50 bulbes issus du sac 1 ou du sac 2.

3 On note p_n la probabilité conditionnelle $P_{J_n}(A)$.
a. Montrer que, pour tout entier n :

$$p_n = \frac{3^{50}}{3^{50} + 2^{50} \times 3^n}.$$

b. Résoudre $p_n \geqslant 0{,}9$. Interpréter le résultat obtenu.
c. Déterminer la limite de la suite (p_n) lorsque n tend vers l'infini.

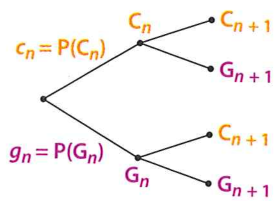
58 Vélos en libre service

Afin d'améliorer le trafic automobile et de diminuer la pollution, une ville propose à ses habitants un système de location de vélos.
Pour commencer son expérimentation, la ville met des vélos à la disposition des habitants dans les deux endroits les plus fréquentés : en centre-ville et près de la gare.
Une enquête réalisée pour mieux connaître les besoins des habitants montre que :
- si un usager emprunte un vélo au centre-ville, il le dépose à la gare avec une probabilité égale à 0,6 ;
- si un usager emprunte un vélo à la gare, il le dépose au centre-ville avec une probabilité égale à 0,8 .

Le responsable s'interroge sur la probabilité que ce vélo soit au centre-ville après avoir été emprunté par un certain nombre d'usagers.
Au début de l'expérimentation, la probabilité de pouvoir emprunter un vélo à la gare est égale à 0,9 .
On appelle C_n l'événement : « le vélo est au centre-ville après avoir été emprunté par n usagers ».
On appelle G_n l'événement : « le vélo est à la gare après avoir été emprunté par n usagers ».
On note $c_n = P(C_n)$ et $g_n = P(G_n)$.
Ainsi, $g_0 = 0{,}9$.

1 **a.** Quelle est la probabilité qu'un vélo soit déposé à l'agence du centre-ville par le premier usager, sachant qu'il a été pris à la gare ?
b. Quelle est la probabilité qu'un vélo soit déposé au centre-ville après avoir été emprunté par un usager au centre-ville ou à la gare ?
c. Quelle est la probabilité qu'un vélo soit déposé au centre-ville après avoir été emprunté par deux clients successivement ?
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2 L'arbre ci-contre représente la répartition des vélos pour le $n+1^{\text{ième}}$ usager.



a. Placer les probabilités manquantes sur l'arbre pondéré ci-contre.
b. Montrer que :
$c_{n+1} = 0{,}4\,c_n + 0{,}8\,g_n$.
On rappelle que $c_n + g_n = 1$.
Exprimer c_{n+1} uniquement en fonction de c_n .

3 Pour tout entier naturel n , on pose $v_n = c_n - \frac{4}{7}$.
a. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n .
En déduire que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme v_0 .
b. Calculer l'expression de v_n , puis de c_n en fonction de n .
c. Calculer c_{10} .
d. Quelle est la probabilité que le vélo soit au centre-ville après avoir été emprunté par un très grand nombre d'usagers ?

59 Fouilles archéologiques

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

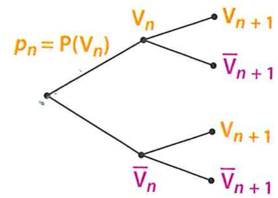
Fouille du site gaulois et médiéval de « La pièce de Chameul » à Chevilly (Loiret), sur l'échangeur A19-A10 (INRAP, 2006).

Lorsque le n-ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.
Soit V_n l'événement : « le n-ième sondage est positif ».
On note p_n la probabilité de l'événement V_n .
L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :
- si un sondage est positif, le suivant a une probabilité d'être aussi positif, égale à 0,6 ;
- si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité d'être aussi négatif, égale à 0,9 .

On suppose que le 1^er^ sondage est positif, soit $p_1 = 1$.

1 **a.** Calculer la probabilité que les deuxième et troisième sondages soient positifs.
b. Calculer la probabilité que le 3^e^ sondage soit positif.

2 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
L'arbre ci-contre représente la situation pour le $n+1^{\text{ième}}$ sondage.



a. Placer les probabilités manquantes sur l'arbre pondéré ci-contre.
b. Montrer que $p_{n+1} = 0{,}6\,p_n + 0{,}1\,(1 - p_n)$.
Exprimer p_{n+1} uniquement en fonction de p_n .

3 On note (u_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0{,}2$.
a. Démontrer que cette suite est géométrique et en préciser le premier terme et la raison.
b. Exprimer u_n , puis p_n en fonction de n.
c. Calculer p_{10} . *Arrondir le résultat au millième près.*
d. Étudier les variations de la suite (u_n) , puis de la suite (p_n).
e. Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la probabilité p_n. Interpréter.

60 ... en sociologie

Les Français et la lecture

Les résultats d'une enquête du ministère de la Culture, auprès de 150 hommes et 120 femmes, sur le nombre de livres lus au cours des douze derniers mois, sont donnés par les diagrammes ci-contre.

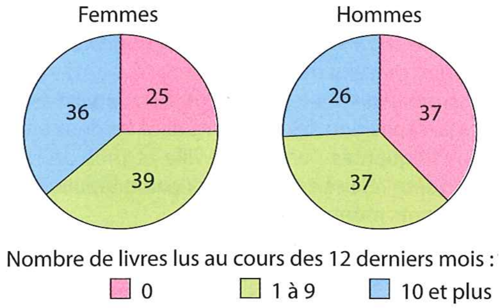
On note les évènements :

A : « n'avoir lu aucun livre » ;

M : « avoir lu entre 1 et 9 livres » ;

B : « avoir lu plus de 10 livres » ;

H : « la personne est un homme ».



1 Construire l'arbre pondéré correspondant à la situation décrite.

2 On interroge une de ces personnes au hasard sur le nombre de livres qu'elle a lus au cours des 12 derniers mois.

a. Calculer la probabilité que ce soit un homme ne lisant aucun livre.

b. Calculer la probabilité d'obtenir une personne lisant plus de 10 livres.

c. On interroge une personne ayant lu plus de 10 livres au cours des douze derniers mois.

Calculer la probabilité que ce soit un homme.

61 ... en médecine

Test de dépistage

Un laboratoire propose un test de dépistage pour une maladie. La probabilité qu'une personne atteinte de cette maladie ait un test positif est 0,97 .

La probabilité qu'une personne non atteinte de cette maladie ait un test positif est 0,01 .

La probabilité qu'une personne ait un test positif est 0,394 .

On procède à un dépistage systématique dans la population où s'est déclenchée la maladie. On choisit une personne au hasard dans cette population.

On note les événements :

M : « la personne est atteinte de la maladie »

et T : « la personne choisie a un test positif ».

1 Construire l'arbre pondéré correspondant à cette situation.

2 a. La « **sensibilité** » d'un test est définie par la probabilité d'obtenir un test positif chez les malades.

Donner la sensibilité de ce test.

b. La « **spécificité** » d'un test est définie par la probabilité d'obtenir un test négatif chez les non-malades.

Donner la spécificité de ce test.

3 On note p la probabilité que la personne choisie soit malade. Exprimer P(T) en fonction de p, puis calculer la probabilité p .

On admet que le résultat du test est fiable s'il est conforme à l'état de santé de la personne choisie.

Calculer la probabilité que le test soit fiable.

4 La probabilité d'avoir la maladie M en cas de test positif s'appelle « **la valeur prédictive positive** » (VPP) d'un test.

Calculer la valeur prédictive positive de ce test.

62 ... en géographie

Répartition linguistique en Suisse

On étudie la répartition des langues principales en Suisse selon la nationalité suisse ou étrangère.

Les étrangers représentent 18 % de la population totale de Suisse.

En %	Allemand	Français	Italien	Romanche	Autres
Population de nationalité suisse	72,5	21	4,3	0,6	1,6
Population de nationalité étrangère	29,4	18	14,8	0,1	37,7
Population totale	63,5	20,4	6,5	0,5	9,1

Source : Recensement fédéral, 2000.

On arrondira les résultats au millième près.

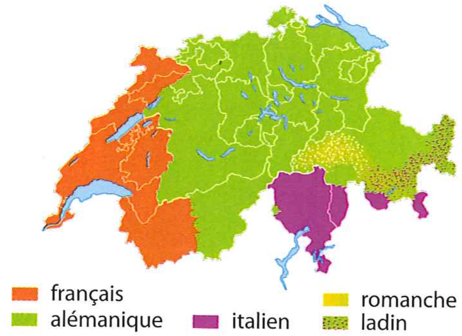
1 Construire l'arbre pondéré correspondant au tableau ci-dessus et adapté au caractère étudié.

2 On rencontre au hasard un habitant de la Suisse.

Montrer que la probabilité que sa langue principale soit le français est $P(F) \approx 0{,}2$.

3 On rencontre au hasard un habitant dont la langue principale est le français. Calculer la probabilité qu'il soit de nationalité suisse.

4 Un employé des douanes demande aux personnes dont il vérifie les passeports, leur langue principale. On assimile ces vérifications à des tirages successifs avec remise. Déterminer le nombre minimum de passeports que l'employé des douanes doit vérifier pour que la probabilité d'obtenir au moins un passeport appartenant à une personne de langue française soit supérieure à 0,99 .



63 ... en SES

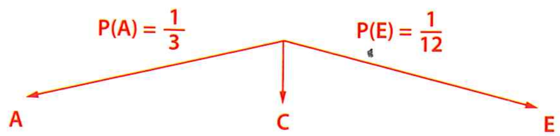
Emploi-jeune

Une enquête révèle que 60 000 jeunes bénéficient de contrats « emploi-jeune » dans le domaine « jeunesse et sport ».

La répartition de ces emplois, suivant le projet du bénéficiaire, en fonction du type d'employeur est donnée par le tableau suivant :

Employeur	Association (A)	Collectivités locales (C)	Autres (E)
Projet Sport (S)	17 200	2 400	400
Autre projet (Pr)	22 800	12 600	4 600

1 Compléter l'arbre pondéré à deux niveaux correspondant à la répartition des emplois selon le projet.



2 a. On interroge un jeune ayant un emploi dans une collectivité locale.

Calculer la probabilité qu'il ait un projet « Sport ».

b. On interroge un bénéficiaire d'un emploi-jeune. Calculer la probabilité qu'il ait un projet « Sport » et qu'il travaille dans une association.

3 On interroge au hasard, et indépendamment les uns des autres, dix bénéficiaires d'un emploi-jeune.

X est la variable aléatoire égale au nombre de jeunes ayant un projet « Sport ».

a. Préciser la loi suivie par la variable aléatoire X et donner ses paramètres.

b. Calculer la probabilité d'obtenir, parmi les dix jeunes interrogés, au moins un jeune ayant un projet « Sport ».

Arrondir le résultat au millième près.

4 Un fabricant des vêtements de sport propose d'aider les jeunes ayant bénéficié de ces contrats « emploi-jeune ». Il offre 600 € par contrat et cette offre est multipliée par 10 si le projet est un projet « Sports ». Calculer le financement moyen qu'un jeune peut espérer obtenir.