

# Probabilités conditionnelles



Maths  
et sport

Lors d'une séance de tirs au but, le gardien doit décider très rapidement de quel côté il va plonger pour tenter d'intercepter le ballon. Pour prendre sa décision, il doit considérer de nombreux paramètres : le « pied fort » du joueur qui va effectuer le tir, la direction de sa course d'élan, l'historique des tirs de ce joueur, le succès ou l'échec du tir précédent de l'équipe adverse...

Ainsi, quand il ne s'en remet pas tout simplement au hasard, le gardien effectue un calcul de probabilités conditionnelles pour déterminer de quel côté il doit plonger, connaissant le joueur qui va tirer et le score actuel des deux équipes.



Blaise Pascal  
1623-1662

→ Chercheurs d'hier p. 208

## Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

### ► Probabilité, événements

#### • Probabilité d'un événement

On note  $a_1, a_2, \dots, a_n$  les événements élémentaires d'une expérience aléatoire.

La probabilité d'un événement  $A$  est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

#### • Événement contraire $\bar{A}$

$\bar{A}$  est constitué par tous les événements élémentaires ne se trouvant pas dans  $A$  :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

#### • Événements $A \cap B$ et $A \cup B$

— L'événement «  $A$  et  $B$  », noté aussi  $A \cap B$ , est constitué par tous les événements élémentaires se trouvant à la fois dans  $A$  et dans  $B$ . Si  $A \cap B = \emptyset$ , les événements  $A$  et  $B$  sont dits disjoints.

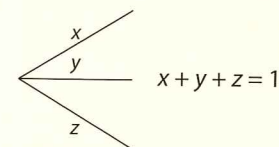
— L'événement «  $A$  ou  $B$  », noté aussi  $A \cup B$ , est constitué par les événements élémentaires se trouvant dans l'un au moins des événements  $A, B$ .

$$p(A \cup B) + p(A \cap B) = p(A) + p(B).$$

### ► Arbre pondéré

• Lorsqu'une situation est représentée par un arbre pondéré, alors :

– la somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1 ;



– la probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

- 1 On lance un dé non pipé et on lit le chiffre apparu.
  1. Quel est l'ensemble des événements élémentaires ?
  2. Quelle est la probabilité de chacun des événements élémentaires ?
  3. Quelle est la probabilité de l'événement  $\{2; 5\}$  ?

- 2 On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité de ne pas tirer un roi ?

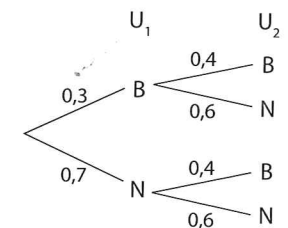
- 3  $A$  et  $B$  sont deux événements. On sait que :

$$p(A) = \frac{1}{4} \text{ et } p(B) = \frac{1}{3}.$$

1. Sans autres informations, peut-on calculer  $p(A \cup B)$  ?
2. On sait que  $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$ . Calculez  $p(A \cup B)$ .

- 4 Deux urnes  $U_1$  et  $U_2$  contiennent chacune des boules blanches et des boules noires. La probabilité de tirer une boule blanche est égale à 0,3 dans l'urne  $U_1$  et à 0,4 dans l'urne  $U_2$ . La probabilité de tirer une boule noire est donc égale à 0,7 dans l'urne  $U_1$  et à 0,6 dans l'urne  $U_2$ .

On tire successivement une boule de l'urne  $U_1$ , puis une boule de l'urne  $U_2$ .



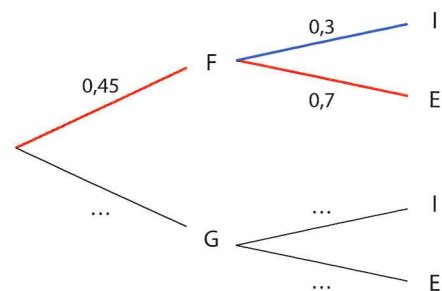
Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche puis une boule noire ?

→ Voir les corrigés p. 361

### Activité 1 DANS UN LYCÉE

Dans un lycée de 1 000 élèves, 45 % des élèves sont des filles, 55 % des garçons. Parmi les filles, 30 % sont internes et 70 % externes. Parmi les garçons, 60 % sont internes et 40 % externes.

Cette situation peut être représentée par l'arbre ci-dessous :



- 1 Complétez cet arbre.
- 2 La branche colorée en bleu signifie que si on tire au hasard une fiche dans le fichier des filles du lycée, la probabilité que ce soit la fiche d'une interne est égale à  $\frac{30}{100}$ .  
Expliquez pourquoi la probabilité de tirer, dans le fichier de tous les élèves du lycée, la fiche d'une fille externe est égale à la fraction :  $\frac{\text{nombre de filles externes}}{\text{nombre total d'élèves}}$ , c'est-à-dire à 0,315.
- 3 On peut constater que le nombre 0,315 est le produit des nombres situés sur les branches colorées en rouge :  $0,45 \times 0,7$ .  
Ainsi, on peut écrire :  $p(F \text{ et } E) = p(F) \times p_F(E)$  en notant  $p_F(E)$  la probabilité d'obtenir une fiche « externe » sachant qu'il s'agit d'une fiche « fille ».  
Calculez de deux manières différentes la probabilité de tirer la fiche :  
a) d'un garçon interne;  
b) d'une fille externe.

### Activité 2 DANS UNE VILLE

Dans une ville de 50 000 habitants, 20 % de la population a plus de 60 ans. Parmi les habitants de plus de 60 ans, 60 % sont de sexe féminin; parmi ceux de moins de 60 ans, 53 % sont de sexe féminin.

- 1 Faites un arbre pondéré correspondant à cette situation.
- 2 On rencontre au hasard un habitant de cette ville.  
a) Quelle est la probabilité que cet habitant soit un homme de plus de 60 ans ?  
b) Quelle est la probabilité que ce soit un habitant de moins de 60 ans de sexe féminin ?

## 1 Notion de probabilité conditionnelle

### 1.1 Définition

**Définition 1** Si  $p(A) \neq 0$ , on appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A** le nombre, noté  $p_A(B)$ , défini par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \text{ et } B)}{p(A)}$$

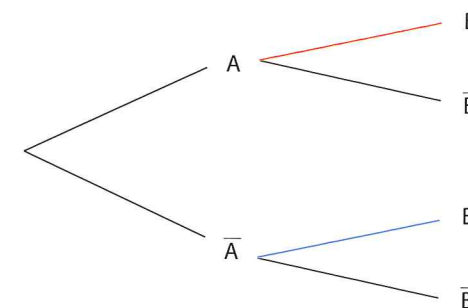
Cette égalité s'écrit également :  $p(A \text{ et } B) = p(A) \times p_A(B)$ .

### 1.2 Utilisation d'un arbre pondéré

La notion de probabilité conditionnelle a déjà été rencontrée lorsqu'une situation est modélisée par un arbre.

Ainsi, par exemple, considérons une situation modélisée par l'arbre suivant, A et B désignant deux événements :

$p_A(B)$  est le nombre figurant sur la branche rouge.  
 $p_{\bar{A}}(B)$  est le nombre figurant sur la branche bleue.



## 2 Une formule utile

**Théorème 1** Si  $p(A) \neq 0$  et  $p(B) \neq 0$ , alors :

$$p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$$

**Démonstration.** On sait que  $p_A(B) = \frac{p(A \text{ et } B)}{p(A)}$ . D'où  $p(A \text{ et } B) = p(A) \times p_A(B)$ .

De même  $p_B(A) = \frac{p(A \text{ et } B)}{p(B)}$ . D'où  $p(A \text{ et } B) = p(B) \times p_B(A)$ .

On a donc  $p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$ .

### Exemple

Dans un groupe de jeunes, 40 % sont des filles et 60 % font du ski. Parmi les filles, il y a 30 % de skieuses. On rencontre une de ces personnes au hasard. Elle fait du ski. Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille ?

Notons F l'événement « la personne rencontrée est une fille » et S l'événement « la personne rencontrée fait du ski ». D'après le texte :

$$p(F) = 0,4; p(S) = 0,6 \text{ et } p_F(S) = 0,3.$$

Il s'agit de calculer  $p_S(F)$ . D'après le théorème 1 :

$$p(S) \times p_S(F) = p(F) \times p_F(S), \text{ c'est-à-dire ici } 0,6 \times p_S(F) = 0,4 \times 0,3.$$

$$\text{D'où } p_S(F) = \frac{0,4 \times 0,3}{0,6} = 0,2.$$

### 3 Formule des probabilités totales

#### 3.1 Un exemple

Une urne contient 10 boules : 3 blanches et 7 noires.

On effectue deux tirages successifs **sans remise**.

On se propose de calculer la probabilité de l'événement : « tirer une boule blanche au deuxième tirage ».

Notons  $B_1$  l'événement : « tirer une boule blanche au premier tirage »,  $B_2$  l'événement : « tirer une boule blanche au deuxième tirage »,  $N_1$  l'événement : « tirer une boule noire au premier tirage » et  $N_2$  l'événement : « tirer une boule noire au deuxième tirage ».

On peut représenter la situation par l'arbre ci-contre.

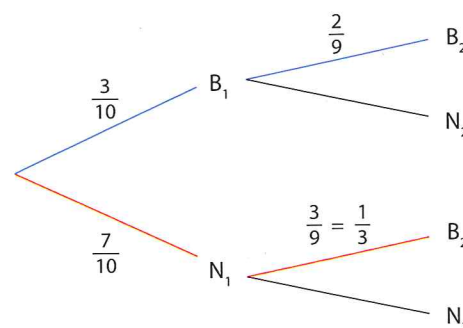
L'événement  $B_2$  peut être réalisé en suivant deux chemins différents : le chemin «  $B_1$  et  $B_2$  » (représenté en **bleu**) et le chemin «  $N_1$  et  $B_2$  » (représenté en **rouge**).

Ces événements sont disjoints, donc :

$$p(B_2) = p(B_1 \text{ et } B_2) + p(N_1 \text{ et } B_2).$$

$$\text{D'où : } p(B_2) = p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) + p(N_1) \times p_{N_1}(B_2)$$

$$\text{et ainsi } p(B_2) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{3}{10}.$$



#### Remarque

Plus généralement, deux événements correspondant à deux chemins différents sur un arbre sont toujours disjoints.

#### 3.2 Cas général

$\Omega$  est l'ensemble des événements élémentaires d'une expérience aléatoire.

$A_1, A_2, \dots, A_n$  désignent des sous-ensembles de  $\Omega$ .

Dire que  $A_1, A_2, \dots, A_n$  forment une partition de  $\Omega$  signifie que les  $A_i$  sont deux à deux disjoints et que  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$ .

Avec cette définition, on peut énoncer le résultat suivant :

##### Formule des probabilités totales

$A_1, A_2, \dots, A_n$  forment une partition de  $\Omega$ .

Alors la probabilité d'un événement quelconque  $B$  est donnée par :

$$p(B) = p(B \text{ et } A_1) + p(B \text{ et } A_2) + \dots + p(B \text{ et } A_n)$$

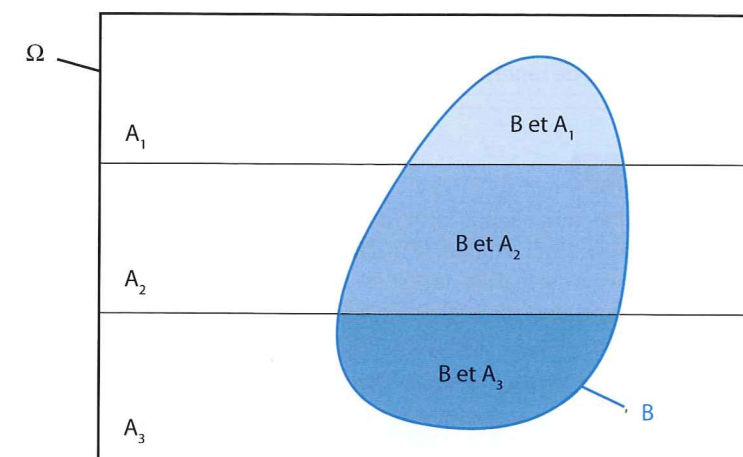
c'est-à-dire, lorsque  $p(A_i) \neq 0$  pour tout  $i$  :

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B).$$

#### Remarque

Le vocabulaire lié à la formule des probabilités totales n'est pas un attendu du programme, mais la mise en œuvre de cette formule doit être maîtrisée.

#### 3.3 Illustration dans le cas de trois sous-ensembles



$A_1, A_2$  et  $A_3$  sont disjoints et leur réunion est égale à  $\Omega$ .

Les événements «  $B$  et  $A_1$  », «  $B$  et  $A_2$  », «  $B$  et  $A_3$  » sont disjoints et leur réunion est égale à  $B$ .

On a donc :

$$p(B) = p(B \text{ et } A_1) + p(B \text{ et } A_2) + p(B \text{ et } A_3).$$

#### 3.4 Probabilités totales et arbres pondérés

Dans l'exemple traité au paragraphe 3.1, on a calculé la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage en faisant la somme des probabilités correspondant aux chemins d'extrémité  $B_2$ .

Chaque fois que la situation est représentée par un arbre pondéré, ce procédé de calcul est équivalent à la formule des probabilités totales.

## OBJECTIF 1 Construire un arbre pondéré

- Il est commode de représenter une situation aléatoire par un arbre pondéré.

## EXERCICE RÉSOLU A

Une maladie affecte le cheptel bovin d'une région. On estime que 10% des bovins sont atteints. Un test permet de diagnostiquer la maladie et on a établi que :

- quand un animal est malade, le test est positif dans 85% des cas;
- quand un animal n'est pas malade, le test est négatif dans 95% des cas.

Un animal est pris au hasard dans le cheptel bovin de cette région.

- Indiquez deux événements liés à cette situation et précisez les deux événements contraires.
- Construisez un arbre pondéré représentant cette situation et adapté aux hypothèses.

## Méthode

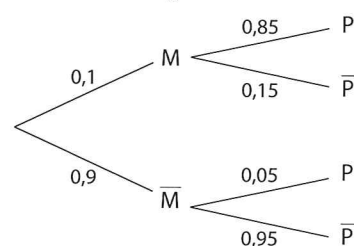
1. D'après l'énoncé, deux événements sont mis en évidence : l'ensemble des bovins malades et l'ensemble des bovins pour lesquels le test est positif. On choisit des notations commodes, ici les initiales.

2. Il y a deux manières de construire l'arbre pondéré : en commençant par M et  $\bar{M}$  ou en commençant par P et  $\bar{P}$ . Les hypothèses font apparaître les probabilités conditionnelles  $p_M(P)$  et  $p_{\bar{M}}(\bar{P})$  : on choisit donc l'arbre commençant par M et  $\bar{M}$ .

## Solution

1. On note M l'ensemble des bovins malades et P l'ensemble des bovins pour lesquels le test est positif.  $\bar{M}$  est donc l'ensemble des bovins non malades.  $\bar{P}$  est l'ensemble des bovins pour lesquels le test est négatif.

2.  $p(M) = 0,1$ , donc  $p(\bar{M}) = 1 - 0,1 = 0,9$ .  
 $p_M(P) = 0,85$ , donc  $p_M(\bar{P}) = 1 - 0,85 = 0,15$ .  
 $p_{\bar{M}}(\bar{P}) = 0,95$ , donc  $p_{\bar{M}}(P) = 1 - 0,95 = 0,05$ .



## Mise en pratique

Pour les exercices 1 et 2

- Indiquez deux événements liés à la situation et précisez les deux événements contraires.
- Construisez un arbre pondéré représentant la situation et adapté aux hypothèses.

1 La proportion de pièces défectueuses dans un lot est de 5%. Le contrôle de fabrication des pièces est tel que :

- si la pièce est défectueuse, elle est quand même acceptée dans 97% des cas;
- si la pièce n'est pas défectueuse, elle est refusée dans 4% des cas.

On prend au hasard une pièce de ce lot.

2 Dans un groupe de personnes, chacune possède une moto. Ces motos sont sportives ou bien routières. 40% d'entre elles font plus de 125 cm<sup>3</sup>. Parmi les motos de plus de 125 cm<sup>3</sup>, 30% sont des motos sportives alors que, parmi les 125 cm<sup>3</sup> ou moins, seulement 10% sont des sportives. On rencontre au hasard une personne du groupe et on considère sa moto.

## OBJECTIF 2 Exploiter un arbre pondéré

Pour calculer la probabilité d'un événement correspondant à un chemin d'un arbre pondéré, on fait le produit des probabilités inscrites sur chaque branche. Cela équivaut à appliquer la formule :  $p(A \text{ et } B) = p(A) \times p_A(B)$ .

## EXERCICE RÉSOLU B

Dans un lycée, il y a 40% de garçons et 60% de filles.

Parmi les garçons, 30% font de la danse; parmi les filles 50% font de la danse. On rencontre au hasard un élève du lycée.

- Construisez un arbre pondéré en lien avec cette situation.
- a) Quelle est la probabilité que l'élève rencontré soit un garçon ne faisant pas de la danse?  
b) Quelle est la probabilité que l'élève rencontré soit une fille faisant de la danse?

## Méthode

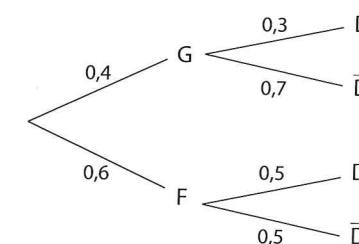
1. Dans la mesure du possible, il est conseillé de choisir des lettres commodes à identifier; ici, on prend les initiales G, F et D. Il y a deux manières de construire un arbre en lien avec la situation. Les renseignements fournis par l'énoncé permettent d'obtenir les valeurs de  $p_G(D)$  et de  $p_F(D)$ . On construit donc l'arbre de manière à faire apparaître les branches correspondant à  $p_G(D)$  et à  $p_F(D)$  :



- a)  $p(G \text{ et } \bar{D})$  s'obtient en faisant le produit des nombres inscrits sur les branches du chemin correspondant à l'événement (G et  $\bar{D}$ ).  
b) On procède de même pour  $p(F \text{ et } D)$ .

## Solution

1. On note G l'ensemble des garçons, F l'ensemble des filles, D l'ensemble des élèves qui font de la danse et  $\bar{D}$  l'ensemble des élèves qui ne font pas de la danse.



- a) Il s'agit de calculer  $p(G \text{ et } \bar{D})$ .  
 $p(G \text{ et } \bar{D}) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$ .  
b) Il s'agit de calculer  $p(F \text{ et } D)$ .  
 $p(F \text{ et } D) = 0,6 \times 0,5 = 0,30$ .

## Mise en pratique

3 Dans une concession automobile, 85% des acheteurs d'une voiture neuve choisissent une peinture métallisée. Parmi ceux-ci, 60% choisissent en plus le régulateur de vitesse. Parmi les acheteurs ne prenant pas la peinture métallisée, seulement 40% choisissent le régulateur de vitesse.

On rencontre une personne venant d'acheter une voiture neuve dans cette concession.

1. Construisez un arbre pondéré en lien avec cette situation.

2. Quelle est la probabilité que la personne :

- ait choisi la peinture métallisée et le régulateur?
- n'ait voulu ni de la peinture métallisée, ni du régulateur?

4 Un groupe de lecteurs de la presse écrite a été interrogé.

30% lisent la presse tous les jours, les autres ne la lisent qu'occasionnellement.

Parmi les lecteurs occasionnels, 40% lisent la presse régionale, les autres lisant la presse nationale. Parmi les lecteurs réguliers, 55% lisent la presse nationale et 45% lisent la presse régionale.

On rencontre au hasard un de ces lecteurs.

1. Construisez un arbre pondéré en lien avec cette situation.

2. Quelle est la probabilité que la personne rencontrée :

- lise chaque jour la presse nationale?
- soit un lecteur occasionnel et lise la presse régionale?

### OBJECTIF 3 Utiliser les probabilités totales

$A_1, A_2, A_3$  sous-ensembles de  $\Omega$  tels que  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$  et tels que les  $A_i$  sont disjoints deux à deux, c'est-à-dire tels que  $A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = A_1 \cap A_3 = \emptyset$ . On suppose que  $\forall i, p(A_i) \neq 0$ . Alors, pour tout événement  $B$ , on a  $p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + p(A_3) \times p_{A_3}(B)$ .

#### EXERCICE RÉSOLU C

Dans un lycée, il y a 30% d'internes, 20% d'externes et 50% de demi-pensionnaires. 25% des internes participent à la chorale, 10% des externes y participent et 15% des demi-pensionnaires. On rencontre un élève du lycée au hasard.

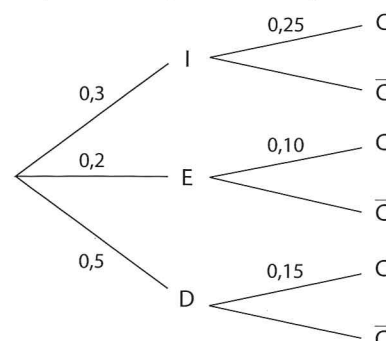
- Représentez cette situation aléatoire par un arbre pondéré.
- Quelle est la probabilité que cet élève rencontré au hasard participe à la chorale ?

#### Méthode

1. On utilise les initiales pour désigner les événements. L'énoncé indique les probabilités  $p_I(C)$ ,  $p_E(C)$ ,  $p_D(C)$ .

#### Solution

1. Notons I l'ensemble des internes, E l'ensemble des externes, D celui des demi-pensionnaires, et C l'ensemble des élèves qui participent à la chorale. On a  $p(I) = 0,3$ ;  $p(E) = 0,2$  et  $p(D) = 0,5$ . Puis  $p_I(C) = 0,25$ ;  $p_E(C) = 0,10$  et  $p_D(C) = 0,15$ .



2. Les événements I, E et D sont deux à deux disjoints et leur réunion est égale à l'ensemble de tous les élèves du lycée. On est en présence d'une situation de type « probabilités totales » : on sait alors que  $p(C)$  peut être calculé si on connaît  $p(C \cap I)$ ,  $p(C \cap E)$  et  $p(C \cap D)$ .

2. On a  $C = (C \cap I) \cup (C \cap E) \cup (C \cap D)$ . Les événements  $C \cap I$ ,  $C \cap E$  et  $C \cap D$  sont disjoints deux à deux. Donc :  
 $p(C) = p(C \cap I) + p(C \cap E) + p(C \cap D)$   
 $= p(I) \times p_I(C) + p(E) \times p_E(C) + p(D) \times p_D(C)$   
 $= 0,3 \times 0,25 + 0,2 \times 0,10 + 0,5 \times 0,15$ ,  
c'est-à-dire  $p(C) = 0,17$ .

#### Mise en pratique

5 Sur un étal, au marché, un primeur propose des barquettes de fruits rouges : 60% d'entre elles contiennent des fraises, 30% des framboises et 10% des myrtilles. La moitié des barquettes de fraises présentent l'étiquette : « Origine France », 90% des barquettes de framboises et 60% des barquettes de myrtilles. Un acheteur pressé prend une barquette au hasard.

- Représentez cette situation aléatoire par un arbre pondéré.
- Calculez la probabilité que la barquette choisie ne porte pas l'étiquette : « Origine France ».

6 Une urne contient 12 boules : 5 bleues, 3 blanches et 4 rouges. On tire deux boules successivement et sans remise. En utilisant un arbre pondéré, calculez la probabilité que la deuxième boule tirée soit rouge.

## Pour se tester

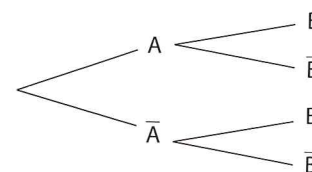
Exercices interactifs

### 7 Questions sur le cours

Complétez comme il convient.

- Si  $p(A) \neq 0$ , alors :
  - $p_A(B)$  est la probabilité conditionnelle de ..... sachant .....
  - $p(A \text{ et } B) = p(A) \times \dots\dots$
  - $p(A \text{ et } B) = p(B) \times \dots\dots$
- Si l'on dispose de l'arbre ci-dessous, alors

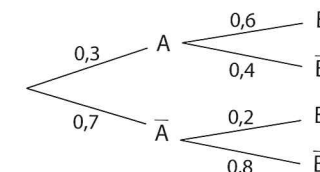
$$p(B) = \dots\dots \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times \dots\dots$$



### 8 Vrai ou faux

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

- On dispose de l'arbre pondéré ci-dessous.



Alors :

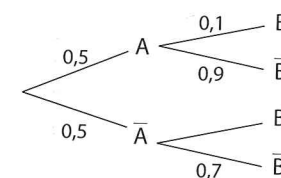
- $p_A(B) = 0,6$     b)  $p(A \text{ et } \bar{B}) = 0,012$     c)  $p(B) = 0,8$ .
- A et B sont deux événements tels que  $p(A) \neq 0$  et  $p(B) \neq 0$ .
  - Si  $p(A) = 0,5$  et  $p(A \text{ et } B) = 0,2$ , alors  $p_B(A) = \frac{2}{5}$ .
  - Si  $p(A) = 0,3$  et  $p(B) = 0,4$ , alors  $p(A \text{ et } B) = 0,12$ .
  - $p_A(B) = p_B(A)$ .
  - $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$ .

### 9 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

- Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre ci-dessous. Alors :

- $p_A(B) = 0,9$
- $p(A \text{ et } B) = 0,5$
- $p(\bar{A} \text{ et } B) = 0,15$ .



- Avec le même arbre,
  - $p_{\bar{A}}(B) = 0,03$     b)  $p_A(B) + p_{\bar{A}}(B) = 1$     c)  $p(B) = 0,3$ .

- Dans une assemblée, il y a 45% d'hommes. 30% d'entre eux sont chauves contre seulement 1% des femmes. On rencontre une personne de cette assemblée au hasard. On note H l'événement : « C'est un homme » et C l'événement : « La personne est chauve ». Alors :

- $p(H \text{ et } C) = 0,3$     b)  $p_H(C) = 0,3$     c)  $p_C(H) = 0,3$ .
- Avec les données de la question 3 ci-dessus :
  - $p(H \text{ et } \bar{C}) = 0,52$     b)  $p(C) = 0,1405$     c)  $p_H(C) + p_{\bar{H}}(C) = 1$ .

### 10 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

- A et B sont deux événements tels que  $p(A) \neq 0$  et  $p(B) \neq 0$ . Alors  $p(A \text{ et } B) =$ 
  - $p(A) \times p_B(A)$     b)  $p(B) \times p_B(A)$     c)  $p(A) \times p_A(B)$ .
  - $p_A(B)$     b) appartient à  $[0; 1]$     c) peut être négatif.
- Si l'on connaît  $p(A)$  et  $p_A(B)$ , alors on peut calculer :
  - $p(B)$     b)  $p(A \text{ et } B)$     c)  $p_A(\bar{B})$ .
- A est un événement tel que  $p(A) \neq 0$ . Alors
  - $p_A(A) = 0$     b)  $p_A(A) = 1$     c)  $p_A(A) \geq 1$ .

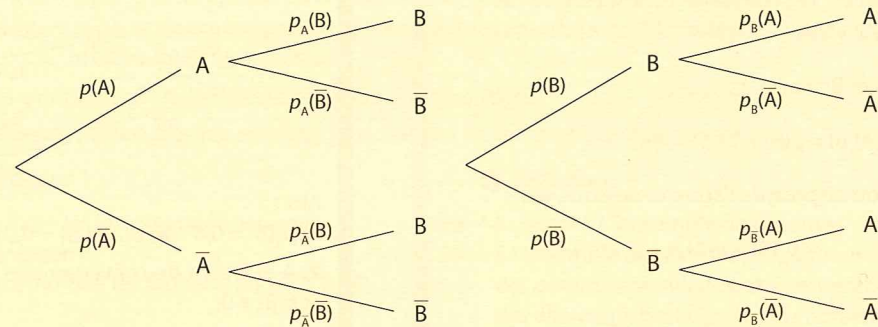
→ Voir les corrigés p. 361

## Utiliser les formules

→ Pour obtenir des probabilités conditionnelles

## 11 De trois à douze

On rencontre souvent une situation aléatoire qui peut être modélisée par un arbre de l'un des types suivants :



Douze probabilités sont inscrites sur les branches de ces deux arbres, six sur chacun d'eux.

On se propose d'étudier le problème suivant :

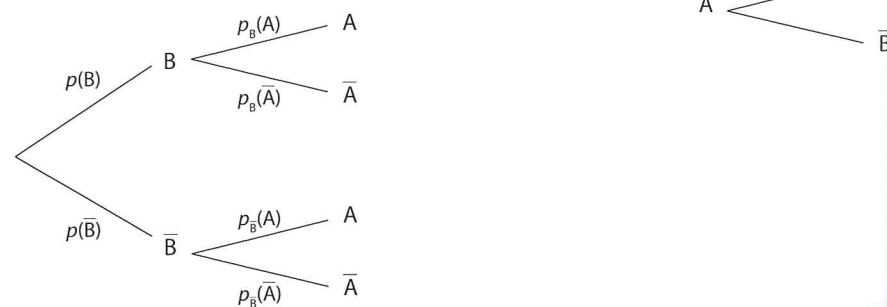
« Comment choisir trois de ces douze probabilités pour pouvoir calculer les neuf autres ? »

## A Un exemple : arbre inversé

Supposons que la situation puisse être modélisée par l'arbre ci-contre :

1. Calculez :  $p(\bar{A})$ ,  $p_{\bar{A}}(\bar{B})$ ,  $p_{\bar{A}}(B)$ .

2. On se propose à présent de calculer les nombres inscrits sur les branches de l'arbre suivant, associé à la même situation :



**Remarque.** On dit que cet arbre est l'arbre inversé du précédent.

- Expliquez pourquoi  $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B)$ .
- Calculez  $p(B)$ , puis  $p(\bar{B})$ .
- Exprimez  $p(A)$  et  $B$  en fonction de  $p(A)$  et de  $p_A(B)$ , puis en fonction de  $p(B)$  et de  $p_B(A)$ . Déduisez-en  $p_B(A)$ , puis  $p_{\bar{B}}(\bar{A})$ .
- En procédant comme dans la question c), calculez  $p_{\bar{B}}(A)$ , puis  $p_{\bar{B}}(\bar{A})$ .

## B Des propriétés fondamentales

Reprenons les notations de l'introduction.

1. Expliquez pourquoi la donnée des six nombres  $p(A)$ ,  $p(B)$ ,  $p_A(B)$ ,  $p_B(A)$ ,  $p_{\bar{A}}(B)$ ,  $p_{\bar{B}}(A)$  permet d'obtenir les six autres probabilités :  $p(\bar{A})$ ,  $p(\bar{B})$ ,  $p_{\bar{A}}(\bar{B})$ ,  $p_{\bar{B}}(\bar{A})$ ,  $p_{\bar{A}}(A)$ ,  $p_{\bar{B}}(B)$ .

On se propose à présent d'expliquer pourquoi la connaissance de trois quelconques des six nombres  $p(A)$ ,  $p(B)$ ,  $p_A(B)$ ,  $p_B(A)$ ,  $p_{\bar{A}}(B)$ ,  $p_{\bar{B}}(A)$  permet de calculer les trois autres. On connaîtra donc, d'après la question 1. ci-dessus, les douze nombres inscrits sur les deux arbres de l'introduction.

2. Démontrez les propriétés suivantes :

- $p(B) = p(A) \times p_A(B) + (1 - p(A)) \times p_{\bar{A}}(B)$ .
- $p(A) = p(B) \times p_B(A) + (1 - p(B)) \times p_{\bar{B}}(A)$ .
- $p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$ .

Pour chacune des questions suivantes, vous pouvez utiliser les résultats de la question A 2. ci-dessus.

3. On sait que  $p(A) = 0,3$ ;  $p(B) = 0,6$  et  $p_B(A) = 0,1$ .

Calculez successivement  $p_A(B)$ ,  $p_{\bar{A}}(B)$ , puis  $p_{\bar{B}}(A)$ .

4. On sait que  $p(A) = 0,2$ ;  $p_B(A) = 0,9$  et  $p_{\bar{A}}(B) = 0,8$ .

- Montrez que :  $0,2 \times p_A(B) = 0,9 \times p(B)$ .
- Montrez que :  $p(B) = 0,2 \times p_A(B) + 0,64$ .
- Déduisez-en  $p(B)$  et  $p_{\bar{A}}(B)$ .
- Calculez alors  $p_{\bar{B}}(A)$ .

## C Cas général

1. Expliquez pourquoi il y a vingt manières possibles de choisir trois nombres parmi les six nombres  $p(A)$ ,  $p(B)$ ,  $p_A(B)$ ,  $p_B(A)$ ,  $p_{\bar{A}}(B)$ ,  $p_{\bar{B}}(A)$ .

## Aide

Vérifiez que parmi les groupes de 3 nombres choisis, il y en a 4 qui contiennent  $p(A)$  et  $p(B)$ , 6 qui contiennent  $p(A)$  et pas  $p(B)$ , 6 qui contiennent  $p(B)$  et pas  $p(A)$ , et 4 qui ne contiennent ni  $p(A)$ , ni  $p(B)$ .

2. En utilisant les propriétés (1), (2) et (3) de la question B 2. ci-dessus, expliquez pourquoi la connaissance des trois nombres indiqués ci-dessous permet d'en déduire les trois autres :

- $p(A)$ ,  $p(B)$ ,  $p_B(A)$ .
- $p(A)$ ,  $p_{\bar{B}}(A)$ ,  $p_{\bar{A}}(B)$ .

Les autres cas peuvent être vérifiés de manière analogue.

## DE TÊTE



Pour les exercices 12 à 14

Donnez chaque résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

12 a)  $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}$     b)  $\frac{2}{5} \times \frac{5}{6}$     c)  $\frac{1}{8} \times \frac{4}{5}$

13 a)  $\frac{1}{\frac{2}{3}}$     b)  $\frac{1}{\frac{5}{3}}$     c)  $\frac{(\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}$

14 a)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$     b)  $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$     c)  $\frac{1}{9} - \frac{1}{18}$

Pour les exercices 15 à 17

Résolvez chacune des équations d'inconnue  $p$ .

15 a)  $p + 0,4 = 1$     b)  $p - 0,2 = 0,5$     c)  $p + 0,04 = 1$

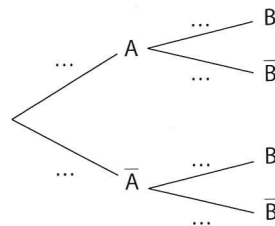
16 a)  $0,2p = 0,6$     b)  $p - 0,3 \times 0,4 = 0$     c)  $\frac{p}{0,3} = 0,2$

17 a)  $\frac{1}{3} + p = 1$     b)  $p + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = 1$     c)  $\frac{1}{3}p + \frac{2}{3} = 1$

## CONSTRUCTION D'UN ARBRE PONDÉRÉ

18 A et B sont deux événements. On sait que :  $p(A) = 0,35$ ;  $p_A(B) = 0,42$ ;  $p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,18$ .

1. Placez ces trois nombres sur l'arbre ci-dessous, après l'avoir recopié.



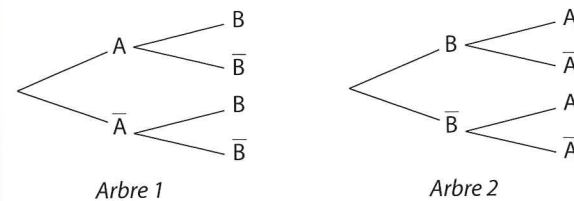
2. Complétez l'arbre pondéré avec les probabilités manquantes.

## 19 Bien choisir son arbre

A et B sont des événements tels que :  $p(A) = 0,35$ ,  $p_A(B) = 0,42$  et  $p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,37$ .

On se propose de dessiner un arbre pondéré sur les branches duquel on pourra écrire les trois renseignements donnés ci-dessus.

1. Dessinera-t-on l'arbre 1 ou l'arbre 2 ? Justifiez.



2. Sur l'arbre que vous aurez choisi, écrivez en rouge les trois renseignements donnés par le texte.

3. Complétez en bleu les probabilités manquantes.

## 20 Résultats du bac

Dans l'ensemble des classes de terminale générale, en 2010, il y avait 45% de garçons. 88% des filles ont été reçues au bac et seulement 86% des garçons.

(Source : ministère de l'Education nationale/DEPP).

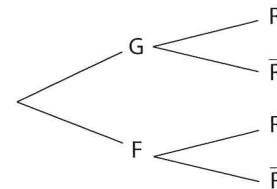
On rencontre au hasard un élève qui était en terminale cette année-là.

On note :

- G l'événement : « l'élève rencontré est un garçon ».
- F l'événement : « l'élève rencontré est une fille ».
- R l'événement : « l'élève rencontré a été reçu au bac ».

1. En utilisant les notations ci-dessus, traduisez en langage des probabilités la phrase : « 88% des filles ont été reçues au bac ».

2. Recopiez et complétez l'arbre ci-dessous permettant de modéliser la situation :



## 21 En voyage

Une agence de voyage propose deux durées de séjours, le week-end ou la semaine, et deux types de destinations, France ou étranger.

Parmi les dossiers de l'agence on constate que :

- 60% de séjours ont lieu en France;
- 45% des séjours en France durent une semaine;
- 75% des séjours à l'étranger durent une semaine.

On choisit un dossier au hasard et on note :

- F l'événement : « Le séjour a lieu en France »;
- S l'événement : « Le séjour dure une semaine »;
- E l'événement contraire de F.

1. En utilisant les données de l'énoncé, déterminez les probabilités suivantes :

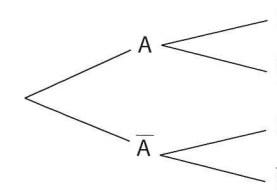
a)  $p(F)$     b)  $p_F(S)$     c)  $p_E(S)$

2. Dessinez un arbre pondéré modélisant cette situation et écrivez les probabilités correspondantes sur chacune de ses branches.

## 22 Manque-t-il des données ?

On donne :  $p(A) = 0,34$ ,  $p_A(B) = 0,65$ ,  $p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,35$ .

Peut-on remplir toutes les branches de l'arbre ci-dessous avec ces renseignements ? Expliquez.



## 23 Prendre son parapluie

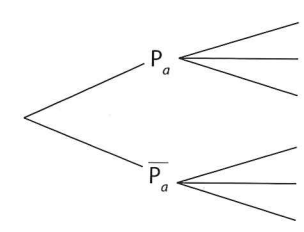
Les services de la météorologie ont établi la loi suivante concernant le temps, en début de matinée, dans la ville de Monsieur X :

Temps	Pluie	Nuageux	Beau
Probabilité	0,2	0,3	0,5

En partant le matin, celui-ci prend son parapluie à coup sûr s'il pleut; une fois sur deux si le temps est nuageux; et une fois sur dix s'il fait beau.

En vue de calculer la probabilité pour que, demain matin, Monsieur X prenne son parapluie, Pauline commence à noter P, N, B, respectivement, les événements : « il pleut », « le temps est nuageux », « il fait beau » et  $P_a$  l'événement : « Monsieur X emporte son parapluie ».

Puis elle réalise l'arbre ci-dessous :



1. Pensez-vous qu'elle pourra y faire figurer toutes les probabilités données dans l'énoncé ?

2. Proposez-lui un autre arbre et complétez-le.



## PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

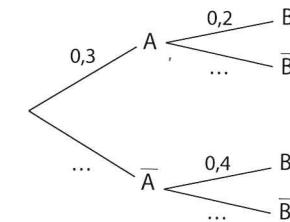
24 A et B sont deux événements.

1. On donne :  $p(A) = 0,45$  et  $p(A \cap B) = 0,15$ . Calculez  $p_A(B)$ .

2. On donne :  $p(A) = 0,38$  et  $p_A(B) = 0,5$ . Calculez  $p(A \cap B)$ .

3. On donne :  $p(A \cap B) = 0,18$  et  $p_A(B) = 0,6$ . Calculez  $p(A)$ .

25 L'arbre ci-dessous modélise une situation où A et B sont deux événements.



1. Lisez les valeurs de  $p_A(B)$  et de  $p_{\bar{A}}(\bar{B})$ .

2. Complétez cet arbre et déduisez-en les valeurs de :

a)  $p(A \text{ et } B)$     b)  $p(A \text{ et } \bar{B})$     c)  $p(\bar{A} \text{ et } B)$     d)  $p(\bar{A} \text{ et } \bar{B})$ .

3. Vérifiez que la somme des quatre nombres précédents est égale à 1.

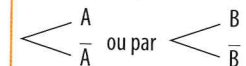
26 A et B sont deux événements.

On donne  $p(A) = 0,3$  et  $p_A(B) = 0,6$ .

1. Dessinez un arbre pondéré où vous pouvez écrire ces deux nombres.

## Aide

Posez-vous la question : faut-il commencer par :



2. Calculez  $p(A \text{ et } B)$ .

3. Calculez  $p(A \text{ et } \bar{B})$ .

27 A et B sont deux événements vérifiant :

$$p(A) = \frac{5}{3} \quad p(B) = \frac{3}{4} \quad p(A \cap B) = \frac{2}{5}$$

1. L'une des données ci-dessus est aberrante, laquelle ? Pourquoi ?

2. Modifiez cette donnée de façon que les événements A et B vérifient :  $p(A \text{ et } B) = p(A) \times p(B)$ .

3. a) En conservant cette nouvelle donnée, déterminez la valeur de  $p_A(B)$ .

b) Que remarquez-vous sur ce dernier résultat ?

Maths

et société L'addiction au jeu



Les différentes formes de jeux d'argent (loteries, paris, casinos...) continuent de connaître un engouement spectaculaire. En 2010, le total des mises des Français s'élevait à 26,3 milliards d'euros, en augmentation de 22% par rapport à l'année précédente.

D'après une enquête de l'INPES de 2010, 1,3% des Français de la tranche d'âge 18-75 ans sont des «joueurs problématiques» et peuvent être confrontés à une addiction, des problèmes financiers, une désocialisation... Face à ce qui est devenu un véritable enjeu de santé publique, les pouvoirs publics ont mis en place un dispositif de prévention et de prise en charge de l'addiction au jeu.

**28** Selon une association de prévention de la dépendance au jeu, 2% des Français sont «addicts» aux jeux; parmi ceux-ci, 8 sur 10 sont des hommes.

On rencontre une personne au hasard. Quelle est la probabilité que ce soit :

1. un homme dépendant du jeu ?
2. une femme dépendante du jeu ?

### 29 Tirages successifs

Une urne contient 20 boules blanches et 30 boules noires. On tire 3 boules successivement de cette urne. Calculez la probabilité d'obtenir 3 boules blanches sachant que la première boule tirée est blanche, lorsque le tirage est effectué :

1. avec remise;
2. sans remise.

### 30 Un dé

On lance deux fois un dé non truqué. La variable aléatoire  $X$  compte le nombre de 6 obtenus.

1. Donnez la loi de  $X$ .
2. On sait que le 6 est apparu au premier lancer. Quelle est alors la probabilité d'obtenir :
  - a) deux fois le 6 ?
  - b) une seule fois le 6 ?
  - c) zéro fois le 6 ?

**3.** On lance à présent le dé trois fois. On sait que le 6 est apparu au deuxième lancer.

Calculez alors la probabilité d'obtenir :

- a) trois fois le 6 ?
- b) deux fois le 6 ?
- c) une seule fois le 6 ?
- d) zéro fois le 6 ?

**31** Une urne contient des boules roses et des boules vertes. Il y a 30% de boules roses.

**1.** On tire de l'urne deux boules avec remise. Calculez la probabilité d'obtenir deux boules roses.

**2.** On tire cette fois les deux boules sans remise. Peut-on calculer la probabilité d'obtenir deux boules roses ? Expliquez.

### 32 Échantillonnage et tirage «avec remise»

Dans un groupe de  $N = 1\,000$  personnes, le quart est allé en vacances à l'étranger pendant l'été.

**1. a)** On interroge deux personnes différentes de ce groupe.

En utilisant un arbre pondéré, calculez la probabilité pour que les deux personnes soient allées en vacances à l'étranger.

**b)** Expliquez pourquoi, si l'on ne connaissait pas le nombre  $N$ , on ne pourrait pas répondre à cette question.

**2.** Pourtant, même en ne connaissant pas le nombre  $N$ , on aimerait trouver le résultat ou du moins en avoir une bonne valeur approchée.

Pour cela, supposons que l'on choisisse les deux personnes au hasard mais «avec remise».

**a)** Expliquez en quoi la situation aléatoire est différente. Expliquez aussi pourquoi le problème est simplifié.

**b)** Comparez le résultat trouvé ici avec le résultat trouvé dans la question 1.

**3.** On suppose à présent que le groupe ne contient que 10 personnes.

**a)** Calculez la probabilité que les deux personnes soient allées en vacances à l'étranger, selon les deux types de tirages. Comparez les résultats obtenus.

**b)** Quelle conclusion tirez-vous ?

**Remarque.** L'exercice pourrait continuer en faisant varier le nombre  $n$  de personnes interrogées (ici  $n = 2$ ).

### 33 BAC Calculatrices en panne

Une entreprise vend des calculatrices d'une certaine marque. Le service après-vente s'est aperçu qu'elles pouvaient présenter deux types de défauts, l'un lié au clavier et l'autre lié à l'affichage.

Des études statistiques ont permis à l'entreprise d'utiliser la modélisation suivante :

- La probabilité pour une calculatrice tirée au hasard de présenter un défaut de clavier est égale à 0,04.
  - En présence du défaut de clavier, la probabilité que la calculatrice soit en panne d'affichage est de 0,03.
  - En l'absence de défaut de clavier, la probabilité de ne pas présenter de défaut d'affichage est de 0,94.
- On note  $C$  l'événement «la calculatrice présente un défaut de clavier» et  $A$  l'événement «la calculatrice présente un défaut d'affichage».

**1. a)** Précisez à l'aide de l'énoncé les probabilités suivantes  $p_C(A)$ ,  $p_C(\bar{A})$  et  $p(\bar{C})$ .

**b)** Construisez un arbre pondéré décrivant cette situation.

**2.** On choisit une calculatrice de cette marque au hasard.

**a)** Calculez la probabilité pour que la calculatrice présente les deux défauts.

**b)** Calculez la probabilité pour que la calculatrice présente le défaut d'affichage mais pas le défaut de clavier.

### 34 Smartphone ou pas ?

À partir d'un fichier du rayon multimédia d'une grande surface, on peut obtenir les résultats suivants : parmi les clients achetant un téléphone portable, 40% achètent un smartphone, les autres achetant un téléphone classique. 80% des acheteurs de smartphone ont moins de trente ans alors que 75% des acheteurs de téléphone classique ont trente ans ou plus.

À la caisse, on rencontre au hasard un client achetant un téléphone portable.

**1.** Identifiez les événements intervenant dans cette situation et donnez-leur un nom.

**2.** Dessinez un arbre pondéré en lien avec cette situation.

**3.** Calculez :

- a) la probabilité que la personne rencontrée ait trente ans ou plus et qu'elle achète un smartphone;
- b) la probabilité que la personne rencontrée ait moins de trente ans et achète un téléphone classique.



### 35 Vue mer

Une résidence hôtelière de vacances possède pour la location 150 studios et 50 duplex. 70% des duplex ont vue sur la mer et seulement 20% des studios.

Décidée à louer un de ces logements, mais ne comprenant rien au plan de l'immeuble qu'on lui présente, une cliente pressée désigne un logement au hasard.

Quelle est la probabilité qu'elle désigne :

1. un duplex avec «vue mer» ?
2. un studio n'ayant pas une vue sur la mer ?

#### Aide

Commencez par identifier les événements, puis dessinez un arbre pondéré traduisant la situation.

### 36 Rouge, jaune, vert

Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule :

- si elle est rouge, il gagne 10 €;
- si elle est jaune, il gagne 5 €;
- si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir replacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 €, sinon il perd 4 €.

En vous aidant d'un arbre pondéré, trouvez les nombres manquants afin d'obtenir la loi de probabilité du gain algébrique du joueur.

Gain	10 €	8 €	-4 €	...
Probabilité	$\frac{1}{7}$	...	...	...

### 37 Avec ou sans remise

Une urne contient 10 boules blanches et 20 boules noires.

On tire deux boules successivement.

On note  $B_1$  l'événement : «la première boule tirée est blanche» et  $B_2$  l'événement : «la deuxième boule tirée est blanche».

**1. Le tirage est avec remise**

- a) Quelle est la valeur de :  $p_{B_1}(B_2)$  ?  $p_{\bar{B}_1}(B_2)$  ?
- b) Dessinez l'arbre pondéré en lien avec cette expérience aléatoire.
- c) Calculez la probabilité d'obtenir :
  - deux boules blanches;
  - deux boules noires.

**2. Le tirage est sans remise**

- a) Calculez  $p_{B_1}(B_2)$ ,  $p_{\bar{B}_1}(B_2)$ .

#### Aide

Considérez la composition de l'urne après avoir obtenu une boule blanche au premier tirage (respectivement une boule noire).



b) Dessinez l'arbre pondéré en lien avec cette nouvelle expérience aléatoire. En quoi diffère-t-il de l'arbre précédent ?

c) Calculez la probabilité d'obtenir :  
– deux boules blanches ;  
– deux boules noires.

### 38 Deux cartes sans remise

On tire deux cartes successivement et sans remise d'un jeu de 32 cartes.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un roi au premier tirage ?

**Aide** Dans un jeu de 32 cartes, il y a 4 rois.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir un roi au deuxième tirage sachant que :

a) l'on a obtenu un roi au premier ?

b) l'on n'a pas obtenu de roi au premier ?

3. Dessinez un arbre pondéré en lien avec cette expérience aléatoire. Vous pouvez noter  $R_1$  l'événement : « Obtenir un roi au premier tirage » et  $R_2$  l'événement : « Obtenir un roi au deuxième tirage ».

4. Calculez la probabilité :

a) d'obtenir deux rois ;

b) de n'obtenir aucun roi ;

c) d'obtenir un seul roi.

5. Quelle relation doivent vérifier les probabilités que l'on vient de calculer ? Vérifiez que c'est bien le cas.

### 39 Deux cartes simultanément

On tire deux cartes simultanément dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir deux as ?

**Aide**

Ramenez-vous à un tirage de deux cartes successivement et sans remise.  
Dans un jeu de 52 cartes, il y a 4 as.

### 40 Trois couleurs de boules

Une urne contient 5 boules bleues, 6 boules noires et 9 boules rouges. On tire une boule au hasard.

1. Calculez directement la probabilité d'obtenir une boule bleue sachant que la boule tirée n'est pas noire.

2. Retrouvez ce résultat en utilisant, cette fois, la définition de  $p_A(B)$ .

3. Laquelle des deux méthodes préférez-vous ?

### 41 Un sonar pour pêcher

Un chalutier se rend sur sa zone de pêche. La probabilité qu'un banc de poissons soit sur cette zone est de 0,7. Le chalutier est équipé d'un sonar pour détecter la

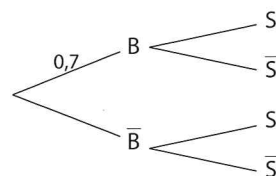
présence d'un banc de poissons. Si un banc est présent, le sonar indique la présence du banc dans 80 % des cas. S'il n'y a pas de banc de poissons dans la zone de pêche, le sonar indique néanmoins la présence d'un banc dans 5 % des cas.

On note :

B l'événement : « il y a un banc de poissons sur la zone » et  $\bar{B}$  l'événement contraire de B.

S l'événement : « le sonar indique l'existence d'un banc de poissons » et  $\bar{S}$  l'événement contraire de S.

1. Reproduisez et complétez l'arbre pondéré suivant.



2. Déterminez la probabilité qu'il y ait un banc de poissons et qu'il soit détecté par le sonar.

3. Déterminez la probabilité qu'il n'y ait pas de banc de poissons mais que le sonar en détecte un.



### 42 À partir d'un tableau d'effectifs

Un lycée prépare au bac général et au bac technologique. Voici, résumés dans un tableau, les résultats obtenus au bac 2012.

	Bac général	Bac technologique
Reçus	316	193
Collés	34	47

On rencontre au hasard un élève de cet établissement ayant passé le bac en 2012.

1. Calculez directement la probabilité qu'il ait été reçu sachant qu'il a passé :

a) un bac général ;

b) un bac technologique.

2. Calculez la probabilité qu'il ait passé un bac technologique sachant qu'il a été reçu.

### 43 À partir d'un tableau de pourcentages

Le tableau ci-dessous donne la répartition des salariés d'une entreprise, entre cadres et non-cadres et bénéficiaires ou non d'une voiture de fonction.

	Employés	Cadres
Salariés disposant d'une voiture de fonction	4%	16%
Salariés ne disposant pas d'une voiture de fonction	65%	15%

On rencontre au hasard un salarié de l'entreprise.

1. Lisez dans le tableau la probabilité que ce soit un cadre disposant d'une voiture de fonction.

2. Calculez directement la probabilité que le salarié rencontré dispose d'une voiture de fonction sachant :

a) qu'il est employé ;

b) qu'il est cadre.

### 44 En week-end

Le comité d'entreprise d'une société parisienne souhaite organiser un week-end en province. Une enquête est faite auprès des 1200 employés de cette entreprise afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport (les seuls moyens de transport proposés sont le train, l'avion ou l'autocar).

Les résultats de l'enquête auprès des employés de l'entreprise sont répertoriés dans le tableau suivant :

	Train	Avion	Autocar	Total
Femme	468	196	56	720
Homme	150	266	64	480
Total	618	462	120	1200

On interroge au hasard un employé de cette entreprise.

On note :

F l'événement : « l'employé est une femme » ;

T l'événement : « l'employé choisit le train ».

1. Calculez les probabilités  $p(F)$ ,  $p(T)$ , puis déterminez la probabilité que l'employé ne choisisse pas le train.

2. Expliquez ce que représente l'événement  $F \cap T$ , puis calculez sa probabilité.

3. L'employé interrogé au hasard ne choisit pas le train. Calculez la probabilité que cet employé soit une femme.

### 45 BAC Usages d'Internet

En vue de sa prochaine brochure d'information sur les dangers d'Internet, un lycée a fait remplir un questionnaire à chacun des 2000 élèves, répartis dans les classes de seconde, première et terminale.

On obtient la répartition suivante :

- un quart des élèves est en terminale ;
- 35 % des élèves sont en première ;
- tous les autres sont en seconde ;
- parmi les élèves de terminale, 70 % utilisent régulièrement Internet ;
- 630 élèves sont des élèves de première qui utilisent régulièrement Internet ;
- 1740 élèves utilisent régulièrement Internet.

On choisit au hasard un questionnaire d'élève, en supposant que ce choix se fait en situation d'équiprobabilité. On note :

- S l'événement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de seconde » ;
- E l'événement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de première » ;
- T l'événement « le questionnaire est celui d'un élève en classe de terminale » ;
- I l'événement « le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement Internet ».

1. Complétez le tableau d'effectifs ci-dessous.

	Seconde	Première	Terminale	Total
Utilise Internet régulièrement				
N'utilise pas Internet régulièrement				
Total				

2. Déterminez la probabilité d'obtenir le questionnaire d'un élève de seconde qui utilise régulièrement Internet.

3. Calculez la probabilité de I sachant T, notée  $p_T(I)$ , et interprétez ce résultat à l'aide d'une phrase.

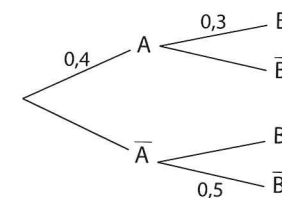
4. Calculez la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un élève qui n'utilise pas Internet.

5. Le questionnaire est celui d'un élève qui utilise régulièrement Internet. Montrez que la probabilité que ce soit le questionnaire d'un élève de première est égale à  $\frac{21}{58}$ .

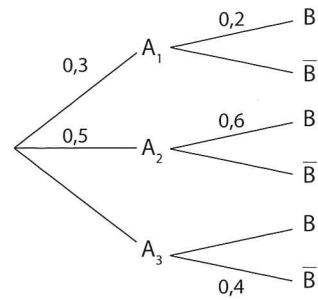
## PROBABILITÉS TOTALES

46 Dans chacun des cas, avec les données figurant sur l'arbre pondéré, calculez  $p(B)$ .

a)



b)



**47** Une urne contient trois boules bleues et quatre boules vertes.

On tire de cette urne deux boules successivement. On note  $B_1$  l'événement : « La 1<sup>re</sup> boule tirée est bleue » et  $B_2$  l'événement : « La 2<sup>e</sup> boule tirée est bleue ».

**1. Le tirage est avec remise**

a) Donnez les valeurs de  $p(B_1)$  et de  $p(B_2)$ .

b) Quelle est la valeur de  $p(B_1 \text{ et } B_2)$  ?

**2. Le tirage est sans remise**

a) Donnez la valeur de  $p(B_1)$ .

b) En dessinant un arbre pondéré, calculez  $p(B_2)$ .

Etes-vous étonné par ce résultat ? Expliquez.

c) A-t-on  $p(B_1 \text{ et } B_2) = p(B_1) \times p(B_2)$  comme dans le tirage avec remise ?

**48** Dans un groupe de personnes, il y a 53% d'hommes. On sait aussi que 40% des hommes et 30% des femmes de ce groupe parlent couramment anglais. On interroge au hasard une personne de ce groupe. On note H l'événement « être un homme » et A l'événement « parler couramment anglais ».

**1.** Construisez un arbre pondéré représentant cette situation et inscrivez sur chaque branche la probabilité associée.

**2.** Calculez  $p(A)$ .

**49 En stage**

Pour recruter des stagiaires, une entreprise organise des tests de sélection. Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves, il y a 60% de garçons. Après avoir pris connaissance des résultats aux tests, l'entreprise engage 70% des garçons candidats et 80% des filles candidates. On rencontre au hasard un candidat qui s'était présenté au test.

**1.** Quelle est la probabilité que ce candidat soit un garçon et qu'il soit engagé comme stagiaire ?

**2.** Quelle est la probabilité que ce candidat soit une fille et qu'elle soit engagée comme stagiaire ?

**3.** Calculez la probabilité que ce candidat soit engagé.

### 50 ALGORITHMIQUE

A et B sont deux événements.

**1.** Écrivez un algorithme qui permet, lorsqu'on lui donne  $p(A)$ ,  $p_A(B)$  et  $p_{\bar{A}}(B)$ , de calculer  $p(B)$ .

**2.** Traduisez cet algorithme en un programme pour votre calculatrice.

### 51 Éviter le biais psychologique

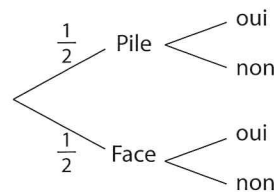
Si, dans une enquête, on pose la question : « Avez-vous triché à un examen ? », on comprend que la personne interrogée hésitera à répondre « oui ».

Une technique pour contourner la difficulté consiste à coupler cette question avec une deuxième question tout à fait anodine, comme : « Aimez-vous le chocolat noir ? ». Voici comment se déroule l'enquête. On demande à la personne interrogée de lancer une pièce de monnaie : si elle obtient « Pile », elle répond à la question délicate ; si elle obtient « Face », elle répond à la question anodine. La personne se sent alors en confiance car elle comprend que l'enquêteur ne saura jamais à quelle question elle a répondu, ce qui est vrai.

Néanmoins l'enquêteur va pouvoir obtenir ce qu'il souhaite, c'est-à-dire le pourcentage  $x$  de « oui » à la première question.

Pour cela, il devra connaître au préalable le pourcentage de « oui » à la deuxième question, ce qui n'est pas difficile. Supposons que cela soit 65 %.

Appelons  $r$  le pourcentage de « oui » obtenu à la suite de l'enquête. Complétez l'arbre ci-dessous et montrez que l'enquêteur peut effectivement connaître le pourcentage  $x$  de « oui » à la première question.



**52** Au bridge, un joueur reçoit successivement 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. On suppose les cartes non truquées. Calculez la probabilité que :

a) la première carte obtenue soit un as ;

b) la deuxième carte soit un as ;

c) la troisième carte soit un as.

#### Aide

Attention, dans la question b), la première carte n'est pas nécessairement un as. De même dans la question c), la première et la deuxième carte ne sont pas nécessairement des as.

### 53 Sur la glace

Une patineuse participe à une compétition. Deux de ses sauts l'inquiètent. Elle ne réussit le premier saut que dans 95% des cas. Comme elle est émotive, si elle ne réussit pas ce premier saut, elle rate le deuxième 3 fois sur 10 ; sinon, si tout va bien lors du premier saut, elle réussit le deuxième dans 90% des cas.

Soit  $R_1$  l'événement : « la patineuse réussit le premier saut » et  $R_2$  l'événement : « la patineuse réussit le deuxième saut ».

**1. a)** Quelle est la probabilité de l'événement  $R_1$  ?

b) Calculez la probabilité de l'événement  $R_2$  sachant que  $R_1$  est réalisé.

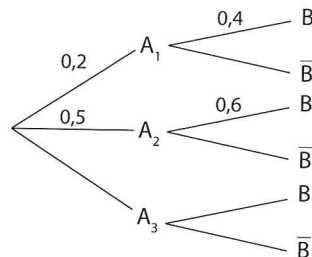
c) Calculez la probabilité de l'événement  $R_2$  sachant que  $R_1$  n'est pas réalisé.

**2.** Déterminez la probabilité de l'événement : « la patineuse réussit les deux sauts ».

**3.** Calculez la probabilité de l'événement  $R_2$ .



**54** Une situation aléatoire est modélisée par l'arbre ci-dessous.



On sait de plus que  $p(B) = 0,44$ .

Calculez  $p_{A_3}(B)$ .

### 55 BAC Aménagement d'intérieur

Dans un programme de construction proposé par un promoteur immobilier, les acquéreurs doivent choisir entre la pose de moquette, de carrelage ou de sol plastifié pour revêtir le sol du salon. Pour le revêtement des murs, ils ont le choix entre peinture ou papier peint.

Le recueil des choix des acquéreurs par l'entreprise donne les résultats suivants :

- 20% ont choisi la moquette ;
  - 50% ont choisi le carrelage ;
  - les autres acquéreurs ont choisi la pose de sol plastifié.
- Parmi les acquéreurs ayant choisi la moquette, 46% choisissent le papier peint pour le revêtement des murs. Parmi les acquéreurs ayant choisi le carrelage, 52% choisissent le papier peint pour le revêtement des murs. 42,7% des acquéreurs ont choisi le papier peint pour le revêtement des murs.

On interroge au hasard l'acquéreur d'un logement construit par cette entreprise.

On considère les événements suivants :

M : « l'acquéreur a choisi la moquette » ;

C : « l'acquéreur a choisi le carrelage » ;

S : « l'acquéreur a choisi le sol plastifié » ;

P : « l'acquéreur a choisi le papier peint ».

**1.** Représentez la situation à l'aide d'un arbre pondéré, qui sera complété tout au long de l'exercice.

**2. a)** Décrivez l'événement  $M \cap P$ .

b) Calculez la probabilité  $p(M \cap P)$ .

**3. a)** Montrez que la probabilité que l'acquéreur ait choisi la pose de sol plastifié et de papier peint est égale à 0,075.

b) L'acquéreur a choisi le sol plastifié. Calculez la probabilité qu'il ait choisi le papier peint.

### 56 BAC Vies sauvées

« Un geste qui sauve : en France, chaque année, 55 000 personnes sont victimes d'un accident cardio-vasculaire. Sept fois sur dix, ces accidents surviennent devant témoin. »

(Source : TNS/Fédération française de cardiologie, 2009).

En 2009, environ 36% de la population française a appris à accomplir les gestes qui sauvent.

#### Partie A

Lors d'un accident cardio-vasculaire devant témoins, on admet que la proportion de témoins formés aux gestes qui sauvent suit la proportion nationale.

La probabilité qu'un accident cardio-vasculaire se produise devant un témoin formé aux gestes qui sauvent est de 0,25.

Lorsque l'accident cardio-vasculaire s'est produit devant un témoin formé aux gestes qui sauvent, la probabilité que le malade survive est 0,1.

Sinon, la probabilité que le malade survive est de 0,007.

On appelle T l'événement « L'arrêt cardiaque s'est produit devant un témoin formé aux gestes qui sauvent ».

On appelle S l'événement «Le malade survit à l'arrêt cardiaque».

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

- Déterminez, d'après l'énoncé,  $p(T)$ ,  $p_T(S)$  et  $p_T(\bar{S})$ .
- En déduire  $p(T \cap S)$ .
- Vérifiez que la valeur arrondie au centième de  $p(S)$  est 0,03.
- Interprétez ces deux derniers résultats.
- Justifiez que le nombre de victimes d'accidents cardiaques survivant à cet accident peut s'estimer à environ 1 650.

**Partie B**

En 2015 tous les lieux publics (stades, centres commerciaux...) seront équipés en défibrillateurs. Par ailleurs, un sondage montre qu'environ 71% de la population souhaite se former à accomplir les gestes qui sauvent.

Si ce taux de formation est atteint :

- la probabilité que l'accident cardiaque survienne devant un témoin formé aux gestes qui sauvent serait de 0,5;
- la probabilité de survie en cas d'intervention d'un témoin formé aux gestes qui sauvent serait augmentée à 0,25, et à 0,046 sinon.

Déterminez combien de vies supplémentaires pourraient être sauvées si ces conditions étaient satisfaites.

**Maths**

**et santé** La généralisation des défibrillateurs



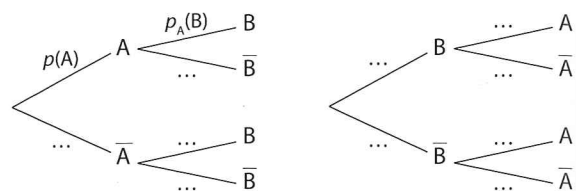
Lorsque les signaux électriques qui pilotent l'activité du cœur sont anormaux, le cœur ne peut alors plus assurer sa fonction de pompage sanguin. Un défibrillateur automatisé est un petit appareil capable d'analyser l'activité cardiaque et d'envoyer une décharge électrique de fort voltage afin de réinitialiser l'influx électrique pilotant l'activité du cœur. Depuis 2007, l'utilisation des défibrillateurs automatisés est autorisée pour les non-médecins, ce qui a rendu possible l'équipement progressif de tous les sites accueillant du public. L'utilisation d'un tel défibrillateur multiplie fortement les chances de survie d'un malade.

**UTILISATION D'UN TABLEAU**

**57 Arbre ou tableau**

Très souvent, dans un exercice de ce chapitre, il se dégage deux événements A et B. Des renseignements sont donnés du genre :  $p(A) = \dots$ ;  $p_A(B) = \dots$ ;  $p(\bar{A} \cap B) = \dots$ . Pour traduire la situation afin de répondre aux questions, on se demande s'il vaut mieux dessiner un arbre pondéré (et lequel) ou un tableau.

Un arbre pondéré se présente ainsi :



et un tableau ainsi :

	A	$\bar{A}$	
B	$p(A \cap B)$	...	...
$\bar{B}$	...	...	...
	$p(A)$	$p(\bar{A})$	

1. Recopiez les arbres et le tableau et, dans chacun des cas, remplacez les emplacements vides par les probabilités qu'ils représentent.

2. Dans un exercice, lorsque l'on ne sait pas s'il vaut mieux utiliser un arbre ou un tableau, il est bon de choisir le dessin sur lequel on pourra faire figurer le plus possible des données de l'énoncé.

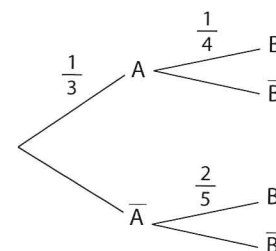
On pourra remarquer que sur un tableau, on peut indiquer des probabilités d'intersections d'événements, alors qu'on ne peut pas le faire sur un arbre.

Avec les renseignements donnés dans chacun des cas ci-après, dessinez l'outil, arbre ou tableau, traduisant le mieux les données et complétez-le.

- a)  $p(A) = 0,3$       $p_A(B) = 0,8$       $p_{\bar{A}}(B) = 0,6$
- b)  $p(B) = 0,4$       $p_B(A) = 0,3$       $p_{\bar{B}}(A) = 0,5$
- c)  $p(A) = 0,6$       $p(B) = 0,5$       $p(A \cap B) = 0,2$
- d)  $p(A) = \frac{1}{4}$       $p(B) = \frac{1}{3}$       $p(\bar{A} \cap B) = \frac{8}{15}$
- e)  $p(A \cap B) = \frac{1}{12}$       $p(\bar{A} \cap B) = \frac{5}{12}$       $p(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{6}$

**58 D'un arbre à un tableau**

Une situation aléatoire est modélisée par l'arbre pondéré ci-dessous :



1. Recopiez et complétez cet arbre.

2. Calculez les probabilités des événements :  $A \cap B$ ,  $A \cap \bar{B}$ ,  $A \cap B$  et  $\bar{A} \cap \bar{B}$ . Écrivez ces nombres aux extrémités des branches correspondantes.

3. Utilisez les résultats obtenus pour compléter le tableau ci-après.

	B	$\bar{B}$	
A	$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{3}$
$\bar{A}$			

**59 D'un tableau à un arbre**

Les données d'un exercice de probabilités ont conduit au tableau suivant :

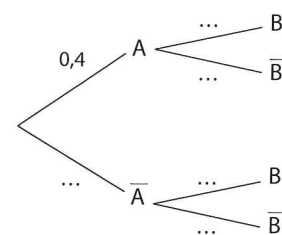
	B	$\bar{B}$	
A	0,2		0,4
$\bar{A}$			
	0,3		1

Sur ce tableau, on peut lire par exemple :

$p(A) = 0,4$ ;      $p(A \cap B) = 0,2$ .

1. Complétez le tableau précédent.

2. À partir de ce tableau, sauriez-vous trouver les probabilités manquantes sur l'arbre ci-dessous ?



**60 A et B sont deux événements.**

Lorsque c'est possible, complétez les cases blanches des tableaux ci-dessous et donnez la valeur de  $p(A \cap B)$ .

1.

	A	$\bar{A}$	
B	0,3		0,7
$\bar{B}$			
	0,5		

2.

	A	$\bar{A}$	
B	0,4		
$\bar{B}$			0,4
		0,3	

3.

	A	$\bar{A}$	
B			0,8
$\bar{B}$			0,2
		0,6	

4.

	A	$\bar{A}$	
B	0,5		
$\bar{B}$	0,4		
		0,1	

**61 Inégalités de salaire**

Le personnel salarié d'une entreprise compte 55% d'hommes. Les femmes dont le salaire mensuel est supérieur ou égal à 2000 € représentent 23% du personnel, et les hommes dont le salaire mensuel est inférieur à 2000 € représentent 25% du personnel. On appelle S le salaire mensuel d'un salarié.

1. Avec les renseignements donnés, vaut-il mieux faire un tableau ou un arbre ? Choisissez et dessinez.
2. On rencontre par hasard une personne de l'entreprise.
  - a) Calculez la probabilité que ce soit une femme qui gagne moins de 2000 € par mois.
  - b) Calculez la probabilité que la personne rencontrée ait un salaire supérieur ou égal à 2000 € sachant que c'est un homme.

Maths

et société Inégalités de salaire



En 2006, le salaire moyen des femmes était inférieur de 27 % à celui des hommes, tous temps de travail et toutes catégories professionnelles confondus. Cette différence traduit plusieurs inégalités : l'inégalité face au temps de travail (les femmes étant plus souvent à temps partiel), l'inégalité face à l'attribution des postes, et l'inégalité de salaires proprement dite : à poste équivalent et à temps plein, une femme touche en moyenne 10 % de moins qu'un homme. La Commission européenne a défini une stratégie sur la période 2010-2015 afin de diminuer ces inégalités.

**62 Pièces de collection**

Un collectionneur de pièces de monnaie a observé que ses pièces peuvent présenter au maximum deux défauts notés  $a$  et  $b$ . Il prélève au hasard une pièce dans sa collection.

On note  $A$  l'événement : « La pièce prélevée au hasard dans la collection présente le défaut  $a$  » et  $B$  l'événement : « La pièce prélevée au hasard dans la collection présente le défaut  $b$  ».

On donne les probabilités suivantes :

$$p(A) = 0,2; p(B) = 0,1 \text{ et } p(A \cup B) = 0,25.$$

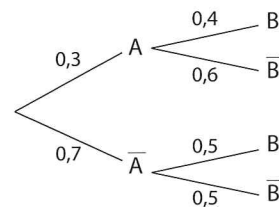
1. Démontrez que la probabilité de l'événement « une pièce prélevée au hasard dans la collection présente les deux défauts » est égale à 0,05.
2. Démontrez que la probabilité de l'événement « une pièce prélevée au hasard dans la collection ne présente aucun des deux défauts » est égale à 0,75.

3. Le collectionneur prélève au hasard une pièce parmi celles qui présentent le défaut  $b$ . Calculez la probabilité que cette pièce présente également le défaut  $a$ .
4. Le collectionneur prélève au hasard une pièce parmi celles qui ne présentent pas le défaut  $b$ . Calculez la probabilité que cette pièce présente le défaut  $a$ .

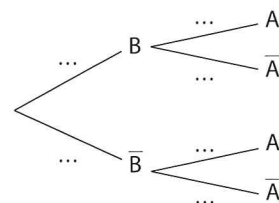
**INVERSION D'UN ARBRE PONDÉRÉ**

Pour les exercices de cette rubrique, on pourra se reporter au TD Utiliser les formules p. 194.

- 63** Une situation est modélisée par l'arbre ci-dessous,  $A$  et  $B$  désignant deux événements.



On se propose de déterminer les probabilités inscrites sur chacune des branches de l'arbre ci-dessous :



Cet arbre, commençant par les événements  $B$  et  $\bar{B}$ , est appelé l'arbre inversé du précédent.

1. a) En utilisant l'arbre initial, calculez  $p(A \cap B)$  et  $p(\bar{A} \cap B)$ .

b) Déduisez-en  $p(B)$ .

2. On souhaite à présent obtenir  $p_B(A)$ .

En écrivant  $p(A \cap B)$  de deux manières, calculez  $p_B(A)$ .

3. Calculez de même  $p_B(\bar{A})$ .

4. Recopiez l'arbre inversé et complétez les probabilités manquantes.

**Remarque.** Dans beaucoup d'exercices, on ne demande pas de dessiner et compléter l'arbre inversé en entier ; on ne demande, par exemple, que le calcul de  $p_B(A)$ .

- 64** On tire une boule dans une urne contenant trois boules blanches et une boule noire. Si l'on obtient la boule noire, on lance alors un dé tétraédrique non truqué marqué 1, 2, 6, 6 ; sinon, on lance un dé cubique non truqué marqué 1, 2, 3, 4, 5, 6.

On réalise l'expérience et on obtient 6. On se propose alors de trouver la probabilité d'avoir tiré la boule noire.

1. Dessinez un arbre pondéré traduisant l'expérience.

2. a) Calculez la probabilité d'obtenir :

– la boule noire et 6 ;

– une boule blanche et 6.

- b) Déduisez-en la probabilité d'obtenir 6.

3. Calculez la probabilité d'avoir tiré la boule noire sachant que l'on a obtenu 6.

**Aide**

Pour cette dernière question, utilisez la probabilité de l'événement : « Obtenir la boule noire et 6 ».

**65 ALGORITHMIQUE**

$A$  et  $B$  sont deux événements.

1. Écrivez un algorithme qui permet, lorsqu'on lui donne  $p(A)$ ,  $p_A(B)$  et  $p_{\bar{A}}(B)$ , de calculer  $p_B(A)$ .

2. Traduisez cet algorithme en un programme pour votre calculatrice.

**Remarque.** Si vous avez déjà réalisé l'algorithme calculant  $p(B)$ , il suffit de compléter ce dernier.

**66 BAC Stress au travail**

Une entreprise financière est divisée en deux secteurs ; 65 % de son personnel travaille dans le secteur  $A$  et 35 % dans le secteur  $B$ .

Cette entreprise s'intéresse au niveau de stress de son personnel.

Une enquête, menée sous la forme d'un questionnaire informatisé, est réalisée au sein de l'entreprise. Le questionnaire est proposé de manière anonyme aux salariés des deux secteurs. Cette enquête révèle que pour le secteur  $A$ , 20 % du personnel se dit stressé, tandis que, dans le secteur  $B$ , ce taux est de 30 %.

On choisit au hasard le questionnaire d'un employé de l'entreprise, chacun ayant la même probabilité d'être choisi. On note :

- $A$  l'événement « le questionnaire est celui d'un employé du secteur  $A$  » ;
- $B$  l'événement « le questionnaire est celui d'un employé du secteur  $B$  » ;
- $S$  l'événement « le questionnaire est celui d'un employé stressé ».

1. Construisez un arbre pondéré décrivant la situation.

2. Calculez la probabilité que le questionnaire choisi soit celui d'un employé qui travaille dans le secteur  $B$  et qui est stressé.

3. L'entreprise examine l'opportunité d'installer une salle de relaxation. Si le taux d'employés stressés est strictement supérieur à 25 %, cette salle sera installée. L'entreprise implantera-t-elle la salle de relaxation ? Justifiez la réponse.

4. Sachant que le questionnaire choisi est celui d'un employé stressé, quelle est la probabilité qu'il travaille dans le secteur  $A$  ?

Maths

et santé

Les conséquences du stress



Un salarié sur cinq souffre de troubles de santé liés au stress au travail, stress lié à différents facteurs : les tâches confiées, l'organisation du travail, les relations interpersonnelles, les moyens mis à la disposition des salariés ou la conjoncture économique... Outre ses conséquences sur la santé, le stress est également préjudiciable aux entreprises (impact négatif sur la productivité et le climat social) et à l'ensemble de la société (coût social du stress estimé à plus de 2 milliards d'euros par an en France). Depuis 2009, le stress est devenu un enjeu de santé publique.

**67 BAC Bonne ou mauvaise surprise**

Lors de l'année de terminale ES, les trois quarts des élèves travaillent sérieusement tout au long de l'année scolaire.

Un candidat au baccalauréat ES a une probabilité de 0,9 d'obtenir son bac s'il a travaillé sérieusement et une probabilité de 0,2 s'il n'a pas travaillé sérieusement pendant l'année scolaire.

Un candidat est dit surpris s'il est admis alors qu'il n'a pas travaillé sérieusement pendant l'année scolaire ou bien s'il est refusé et qu'il a travaillé sérieusement pendant l'année scolaire. On note :

- $T$  l'événement « le candidat a travaillé sérieusement » ;
- $A$  l'événement « le candidat est admis au baccalauréat ES » ;
- $S$  l'événement « le candidat est surpris ».

On interroge au hasard un candidat au baccalauréat ES. Dans tout l'exercice, on donnera des valeurs approchées arrondies au millièème.

1. Construisez un arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé.

2. Déterminez la probabilité des événements suivants :

a)  $T \cap A$  ;

b)  $T \cap \bar{A}$  ;

c)  $\bar{T} \cap A$  ;

d)  $\bar{T} \cap \bar{A}$ .

3. a) Déterminez la probabilité que le candidat interrogé soit admis.

b) Le candidat est admis. Déterminez la probabilité que ce candidat ait travaillé sérieusement pendant l'année scolaire.

4. Démontrez que la probabilité de l'événement S est 0,125.

### 68 Tel père, tel fils ?

Lors d'une enquête réalisée auprès d'élèves de classes de Terminale, on apprend que 60% des élèves sont des filles. De plus, 40% des filles et 30% des garçons fument.

1. On choisit un élève au hasard. On note A l'événement « l'élève choisi fume » et F l'événement « l'élève choisi est une fille ». Quelle est la probabilité que l'élève choisi soit :

- un garçon ?
- une fille qui fume ?
- un garçon qui fume ?

2. Déduisez des questions précédentes, en le justifiant, que  $p(A) = 0,36$ .

3. L'enquête permet de savoir que :

- parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
- parmi les élèves non fumeurs, 65 % ont des parents non fumeurs.

On note B l'événement « l'élève choisi a des parents fumeurs ».

a) Calculez les probabilités  $p(A \text{ et } B)$  et  $p(\bar{A} \text{ et } B)$ . Déduisez-en  $p(B)$ .

b) Calculez  $p_B(A)$ , probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.

Calculez  $p_{\bar{B}}(A)$ , probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.

### 69 BAC Inégalité face à la maladie

On s'intéresse à la population des personnes âgées de plus de 65 ans d'un certain pays en 2011.

Dans cette population :

- 58 % sont des femmes ;
- 5 % des personnes sont atteintes d'une maladie incurable, appelée maladie  $\mathcal{A}$ , et parmi celles-ci les deux tiers sont des femmes.

On choisit au hasard une personne dans cette population. On note :

- F l'événement « la personne choisie est une femme » ;
- H l'événement « la personne choisie est un homme » ;
- A l'événement « la personne choisie est atteinte de la maladie  $\mathcal{A}$  » ;
- $\bar{A}$  l'événement « la personne choisie n'est pas atteinte de la maladie  $\mathcal{A}$  ».

1. a) Donnez la probabilité de l'événement F et celle de l'événement A.

Donnez la probabilité de l'événement F sachant que l'événement A est réalisé, notée  $p_A(F)$ .

b) Définissez par une phrase l'événement  $A \cap F$ , puis calculez sa probabilité.

c) Montrez que la probabilité de l'événement A sachant que F est réalisé est égale à  $0,057 \times 10^{-3}$  près.

2. La personne choisie est un homme. Démontrez que la probabilité que cet homme soit atteint de la maladie  $\mathcal{A}$  est égale à  $0,040 \times 10^{-3}$  près.

3. Peut-on affirmer que, dans ce pays en 2011, dans la population des personnes âgées de plus de 65 ans, une femme risquait davantage de développer la maladie  $\mathcal{A}$  qu'un homme ? Justifiez.

### 70 BAC Faut-il se faire vacciner ?

Le but de cet exercice est de vérifier l'efficacité d'un vaccin sur une population donnée. On dispose des données suivantes :

- Un quart de la population a été vaccinée contre la maladie.
- Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a un vacciné sur treize parmi les malades.
- La probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il est vacciné est égale à 0,1.

Pour une personne rencontrée par hasard, on note :

M l'événement « être malade »,  $\bar{M}$  son contraire ;

V l'événement « être vacciné »,  $\bar{V}$  son contraire.

1. On rencontre par hasard une personne dans la population. Dessinez un arbre traduisant l'énoncé.

2. Calculez la probabilité de l'événement « M et V », notée  $p(M \cap V)$ . Déduisez-en que  $p(M) = \frac{13}{40}$ .

3. a) Calculez  $p(M \cap \bar{V})$ .

b) Déduisez-en  $p_V(M)$ .

4. Déterminez le réel  $k$  tel que  $p_V(M) = kp_{\bar{V}}(M)$ . Énoncez ce dernier résultat en langage courant.

### 71 APPRENDRE À CHERCHER

Dans l'ensemble des élèves de Terminale d'un lycée, 55 % des élèves sont des filles.

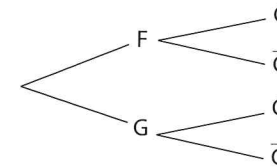
Parmi les garçons, 40 % aiment le cinéma et parmi les élèves aimant le cinéma, 65 % sont des filles.

Pour un élève de Terminale rencontré au hasard, on note F l'événement : « être une fille », G l'événement : « être un garçon » et C l'événement : « aimer le cinéma ».

#### 1. Traduction de l'énoncé

a) Avec ces notations, traduisez les données du texte.

b) Deux renseignements du texte sur trois portent sur des probabilités conditionnelles. D'où, pour traduire la situation, on dessinera un arbre plutôt qu'un tableau. Comme l'on dispose aussi de  $p(F)$ , on dessinera plutôt l'arbre commençant par F et G :



Dessinez l'arbre ci-dessus et écrivez en rouge toutes les probabilités connues.

**Note** Il n'est pas interdit de dessiner aussi l'arbre inversé.

2. On se propose de calculer les probabilités manquantes.

a) Écrivez  $p(F \text{ et } C)$  de deux manières.

**Aide** On obtient ainsi une relation entre  $p(C)$  et  $p_{\bar{F}}(C)$ .

b) En utilisant les probabilités totales, calculez  $p(C)$  en fonction de  $p_{\bar{F}}(C)$ .

c) Déduisez-en  $p_{\bar{F}}(C)$ .

d) Complétez l'arbre ci-dessus.

### POUR LA LOGIQUE

72 On jette un dé équilibré. On note  $\Omega$  l'ensemble des éventualités :  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ ; et  $\mathcal{P}(\Omega)$  l'ensemble des parties de  $\Omega$ .

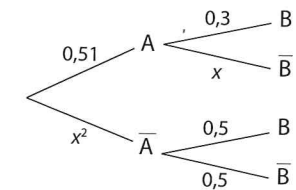
1. La propriété (P) suivante est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

(P)  $\exists A \in \mathcal{P}(\Omega)$  tel que  $\forall B \in \mathcal{P}(\Omega), p_A(B) = p(B)$ .

2. La propriété (Q) suivante est-elle vraie ? Justifiez votre réponse.

(Q)  $\exists A \in \mathcal{P}(\Omega), \exists B \in \mathcal{P}(\Omega)$  tel que  $p_A(B) = \frac{1}{2} p(B)$ .

73 On considère l'arbre pondéré suivant :



La propriété (P) suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

(P) Il existe au moins un réel  $x$  de  $]0; 1[$  tel que cet arbre corresponde à une expérience aléatoire.

## Chercheurs d'hier

### Pascal et le calcul des probabilités

Étienne Pascal suit de près l'instruction de son fils Blaise, particulièrement doué. Ce dernier, dès l'âge de 12 ans, étudie les *Éléments* d'Euclide et, quatre ans plus tard, son père le fait admettre aux réunions de savants du Père Mersenne.



**Blaise Pascal**  
1623 - 1662

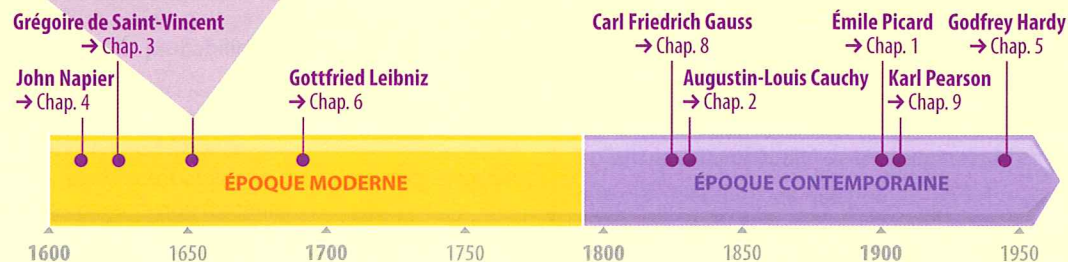
À 17 ans, il écrit *Essai sur les coniques*; dans cet ouvrage, il donne les grandes lignes d'un traité qui ne fut malheureusement jamais publié.

Afin d'aider son père dans ses travaux de comptabilité, Pascal essaie de construire une machine à calculer. Après trois ans d'efforts et de multiples essais (il construisit 50 modèles différents!), il fabrique le modèle définitif vers 1645.

En 1654, Pascal affine ses traités de Géométrie et de Physique. Il fait également différentes études en Arithmétique, en Analyse combinatoire et en Calcul des Probabilités. Ce travail apparaît dans sa correspondance avec Fermat.

Selon Poisson, « un problème relatif aux jeux de hasard proposé à un austère janséniste (Pascal) par un homme du monde (le chevalier de Méré) a été à l'origine du calcul des probabilités ».

Malgré son intense activité scientifique, Pascal n'est pas satisfait de son existence terrestre. Attiré par la religion, il abandonne en partie son travail scientifique pour se consacrer à la méditation et à l'apologie de la religion chrétienne.



#### À la même époque

##### En France

Les parlementaires et les princes qui se sont dressés contre le gouvernement de Mazarin durant la minorité du roi Louis XIV subissent un échec. La monarchie triomphe de la Fronde et l'absolutisme en sort renforcé.

**Mazarin**  
(1602 - 1661)



#### À la même époque

##### En peinture

Le peintre espagnol Velázquez, l'un des plus grands coloristes de tous les temps, peint les *Ménines*. Il introduit dans ses compositions une liberté et un chromatisme qui séduiront les impressionnistes.

**Velázquez**  
(1599 - 1660)



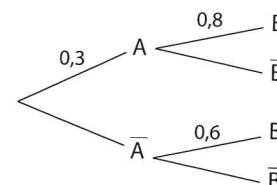
#### Sur le Web

<http://villemin.gerard.free.fr/Esprit/Pascal.htm>  
<http://www.blaisepascal.net>

## Soutien

### 74 Savoir utiliser un arbre pondéré

→ On se propose sur un exemple de voir comment on peut utiliser facilement un arbre pondéré.



→ Notez que les nombres inscrits sur les branches désignent des probabilités; ce sont donc des nombres compris entre 0 et 1! La probabilité de A est le nombre inscrit sur la branche reliant l'origine à A, c'est-à-dire 0,3, mais, attention, la branche reliant A à B correspond à la probabilité de B sachant A, notée  $p_A(B)$ , et non pas à  $p(B)$ .

1. Quelle est la probabilité de  $\bar{A}$ ?

→ **Indication.** Pour obtenir la probabilité de  $\bar{A}$ , on utilise le fait que  $p(A) + p(\bar{A}) = 1$ .

Retenez plus généralement la propriété suivante (loi des nœuds) : la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.

2. a) Ici on a :  $p_A(B) = 0,8$ . Déduisez-en  $p_A(\bar{B})$  en utilisant la loi des nœuds.

b) Lisez sur l'arbre la valeur de  $p_{\bar{A}}(B)$  et déduisez-en, en utilisant la loi des nœuds, que  $p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,4$ .

3. On se propose de calculer  $p(A \text{ et } B)$ .

→ La probabilité de l'événement « A et B » est égale au produit des deux probabilités inscrites sur les branches reliant l'origine de l'arbre à B en passant par A.

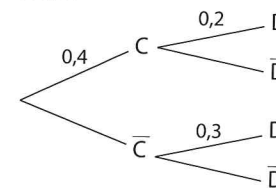
4. Donc ici  $p(A \text{ et } B) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$ .

Calculez  $p(A \text{ et } \bar{B})$ ,  $p(\bar{A} \text{ et } B)$ ,  $p(\bar{A} \text{ et } \bar{B})$ .

### 75 Un autre arbre pondéré

→ Pour cet exercice, vous pouvez vous reporter si besoin à l'exercice 74 ci-dessus.

Une expérience aléatoire peut être modélisée par l'arbre ci-dessous :



Calculez chacune des probabilités suivantes :  $p(\bar{C})$ ,  $p_C(D)$ ,  $p_C(\bar{D})$ ,  $p(C \text{ et } D)$ ,  $p(\bar{C} \text{ et } \bar{D})$ .

## Approfondissement

### 76 Vrai-faux

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifiez votre réponse.

A et B sont deux événements tels que  $p(A) \neq 0$  et  $p(B) \neq 0$ . Alors :

1.  $p(A) + p(B) = 1$ .

2.  $p(A) + p(B) + p(\bar{A}) + p(\bar{B}) = 2$ .

3.  $p(A \cap B) + p(\overline{A \cap B}) = 1$ .

4.  $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A) \times p_A(B)$ .

5.  $p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$ .

6.  $p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$ .

7.  $p_A(B) + p_{\bar{A}}(B) = 1$ .

8. On suppose que  $p(A) \neq 1$ . Alors :  $p(A \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = 1$ .

### 77 Efficacité d'un vaccin

→ On se propose d'étudier l'efficacité d'un vaccin sur une population donnée.

On suppose que l'on dispose des trois données suivantes :

– un tiers de la population a été vaccinée contre la maladie;

– au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a un vacciné sur quinze parmi les malades;

– la probabilité qu'un individu soit malade sachant qu'il est vacciné est égale à 0,08.

Plus précisément on souhaite connaître le quotient  $\frac{p_{\bar{v}}(M)}{p_v(M)}$  en notant  $p_{\bar{v}}(M)$  la probabilité qu'une personne rencontrée au hasard soit malade sachant qu'elle n'est pas vaccinée et  $p_v(M)$ , la probabilité qu'une personne rencontrée au hasard soit malade sachant qu'elle est vaccinée.

1. Expliquez pourquoi la valeur de ce quotient fournit un renseignement sur l'efficacité du vaccin.

2. À partir des trois données dont vous disposez :

a) calculez  $p_{\bar{v}}(M)$  et  $p_v(M)$ ,

b) déduisez-en la valeur du quotient  $\frac{p_{\bar{v}}(M)}{p_v(M)}$ .

3. Énoncez ce dernier résultat en langage courant.

## 78 Exercice commenté

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant des conseils.

Un commerçant vend des produits biologiques en paniers de légumes frais contenant 2 kg de légumes ou en paniers contenant 5 kg de légumes.

35% des clients qui achètent ces paniers ont au moins un enfant.

Parmi ceux qui n'ont pas d'enfant, 40% choisissent les paniers de 5 kg et les autres choisissent les paniers de 2 kg.

On interroge au hasard un client qui achète un panier de légumes.

On note E l'événement « le client interrogé a au moins un enfant » et C l'événement « le client interrogé a choisi un panier de 5 kg de légumes ».

1. Dessinez un arbre pondéré en lien avec la situation.

2. Décrivez l'événement  $\bar{E} \cap C$  et montrez que :

$$p(\bar{E} \cap C) = 0,26.$$

3. On sait de plus que 36% des clients qui achètent des paniers choisissent des paniers de 5 kg.

a) Calculez  $p(E \cap C)$ .

b) Déduisez-en la probabilité conditionnelle de C sachant que E est réalisé.

## Conseils

1. Parmi les deux arbres possibles, l'un commençant par  $\begin{matrix} E \\ \swarrow \searrow \\ \bar{E} \end{matrix}$ , l'autre par  $\begin{matrix} C \\ \swarrow \searrow \\ \bar{C} \end{matrix}$ , l'un des deux est plus adapté à l'énoncé car la valeur de  $p(E)$  est donnée.

Écrivez en rouge sur les branches les deux probabilités données par le texte et complétez ce que vous pouvez en utilisant la règle des nœuds.

2. Dites en langage courant ce qu'est l'événement  $\bar{E} \cap C$ . Repérez le chemin correspondant à cet événement et utilisez la règle sur les arbres permettant de calculer la probabilité associée à un chemin. On utilise en fait la formule :  $p(A \cap B) = p(A) \times p_B(B)$ .

3. a) En utilisant l'arbre dessiné, écrivez  $p(C)$  en fonction de  $p(E \cap C)$  et de  $p(\bar{E} \cap C)$ , à l'aide de la formule des probabilités totales.

b) Vous connaissez  $p(E \cap C)$  et  $p(E)$ ; vous pouvez donc en déduire  $p_E(C)$ .

## Analyser l'énoncé

Reconnaître un exercice sur les probabilités conditionnelles.

## Analyser l'énoncé

Ne vous laissez pas impressionner par la partie du texte décrivant la situation. Si besoin, relisez-la plusieurs fois et constatez que l'énoncé indique explicitement les événements en lien avec la situation, et en donne une notation.

## Analyser l'énoncé

Un arbre est explicitement demandé. On le remplit partiellement en utilisant les informations données par l'énoncé.

## Remarque

Une fois construit l'arbre pondéré, vous pouvez l'utiliser en vous servant des trois règles de base sur les arbres, sans avoir à énoncer les formules qui justifient ces règles.

## Remarque

Dans la question 3, un renseignement supplémentaire est donné.

→ Voir les corrigés p. 361

## QCM

79 Cet exercice est un questionnaire à choix multiples; pour chacune des cinq questions, une et une seule affirmation est exacte.

Indiquez sur votre copie le numéro de la question et la bonne affirmation sans justifier votre choix.

1. Ce tableau incomplet donne les résultats d'un sondage dans une population de 60 personnes.

	Cadres	Employés
Hommes		25
Femmes	8	15

On interroge une personne au hasard; la probabilité que ce soit une femme sachant que c'est un cadre est :

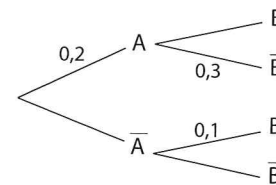
a)  $\frac{2}{15}$       b)  $\frac{2}{5}$       c)  $\frac{8}{23}$

2. A et B sont deux événements tels que  $p(A) = 0,5$  et  $p(B) = 0,2$ .

La probabilité de l'événement  $A \cup B$  est égale à :

a) 0,70      b) 0,69      c) on ne peut pas savoir.

3. Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre ci-dessous où A et B sont deux événements,  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  leurs événements contraires.



Alors on a :

a)  $p(B) = 0,22$       b)  $p(\bar{A} \cap B) = 0,8$       c)  $p_B(A) = 0,8$ .

4. Dans un magasin, un bac contient des cahiers soldés. On sait que 50% des cahiers ont une reliure spirale et que 75% des cahiers sont à grands carreaux. Parmi les cahiers à grands carreaux, 40% ont une reliure spirale. Adèle choisit au hasard un cahier à reliure spirale. La probabilité qu'il soit à grands carreaux est égale à :

a) 0,75      b) 0,3      c) 0,6.

## EXERCICE DU BAC

## 80 BAC Hérité

L'asthme est une maladie inflammatoire chronique des voies respiratoires en constante augmentation.

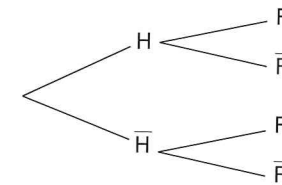
En France, les statistiques font apparaître que, parmi les adultes, environ 4% des hommes et 5% des femmes sont asthmatiques.

Dans la population française, on considère un couple pris au hasard parmi l'ensemble des couples homme-femme.

## A Étude de l'asthme du couple

On note H l'événement : « L'homme est asthmatique », et F l'événement : « La femme est asthmatique ».

1. Recopiez et complétez l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. On note les événements :

•  $A_0$  « aucun des deux adultes du couple n'est asthmatique »;

•  $A_1$  « un seul des deux adultes du couple est asthmatique »;

•  $A_2$  « les deux adultes du couple sont asthmatiques ».

Montrez que  $p(A_0) = 0,912$ .

Puis montrez que  $p(A_1) = 0,086$ ,  $p(A_2) = 0,002$ .

## B Étude de la transmission de l'asthme au premier enfant

Les études actuelles sur cette maladie montrent que :

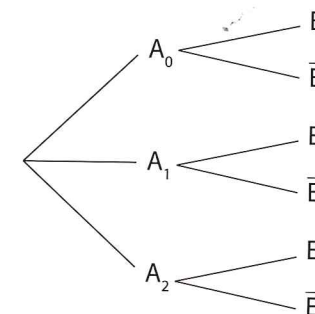
• Si aucun des parents n'est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,1.

• Si un seul des parents est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,3.

• Si les deux parents sont asthmatiques, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est de 0,5.

On note E l'événement « Le premier enfant du couple est asthmatique ».

1. Reproduisez sur votre copie puis complétez l'arbre de probabilités ci-dessous.



2. Montrez que  $p(E) = 0,118$ .

3. Calculez  $p_E(A_0)$  et interprétez le résultat. Déduisez-en  $p_E(\bar{A}_0)$  et interprétez le résultat.

4. Quelle est la probabilité qu'un enfant non asthmatique ait au moins un de ses parents asthmatique ?