Chapitre 5 : la fonction logarithme népérien

I Introduction du logarithme

1) La fonction ln

La fonction logarithme népérien notée ln est l'unique primitive* sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, qui s'annule en 1.

Ceci signifie que si $f(x) = \ln x$ alors $\ln 1 = 0$ et $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$\ln x$ existe si et seulement si x est strictement positif

* F est une primitive de la fonction f si et seulement si pour tout x, $F'(x) = f(x)$

Notation : le logarithme népérien d'un nombre réel x strictement positif est noté $\ln x$ ou $\mathrm{Log}_e(x)$

Calculatrice : pour obtenir $\ln 0{,}8$

$\boxed{\ln}$ $0{,}8$ $\boxed{\text{EXE}}$ $\qquad \ln 0{,}8 = -0{,}223$

2 _ Tableau de variation de la fonction ln

a) Sens de variation

pour tout $x > 0$ $\quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad$ or pour tout $x > 0$ $\quad \dfrac{1}{x} > 0$

on en déduit que pour tout $x > 0$ $\quad f'(x) > 0$: la fonction f est

donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

double barre car la fonction ln n'est pas définie pour $x = 0$: 0 est valeur interdite.

b) Signe de $\ln x$

x	0	1	a	b	$+\infty$
$f(x) = \ln x$	$-\infty$	0	$\ln a$	$\ln b$	$+\infty$
signe de $\ln x$	$-$	0	$+$		

f est croissante sur $]0 ; +\infty[$ donc

f conserve l'ordre :

si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$

si $a < b$ alors $\ln a < \ln b$.

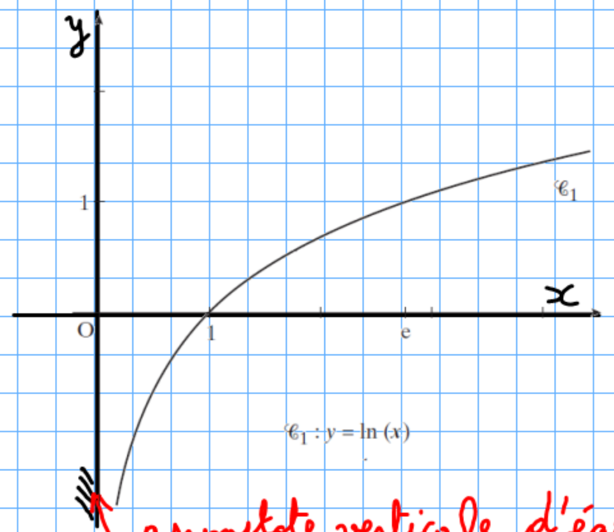
si $\ln a = \ln b$ alors $a = b$

- si $0 < x < 1$ alors $\ln x < 0$
- si $x = 1$ alors $\ln x = 0$
- si $x > 1$ alors $\ln x > 0$

réciproquement si $\ln x < 0$ alors $0 < x < 1$

si $\ln x = 0$ alors $x = 1$

si $\ln x > 0$ alors $x > 1$



asymptote verticale d'équation $x = 0$

3. Méthodes :

a) Justifier un ensemble de définition

Exemple : f est la fonction définie par $f(x) = \ln(1-2x)$

Déterminer en le justifiant l'ensemble de définition f.

$\ln(1-2x)$ existe pour tout x tel que $(1-2x) > 0$

$\iff -2x > -1$

$\iff x < \frac{-1}{-2}$

$\iff x < \frac{1}{2}$

$\mathcal{D}_f = \left]-\infty ; \frac{1}{2}\right[$

b) Résoudre une équation ou une inéquation

Exemple 1 : résoudre l'équation $\ln(1-2x) = \ln(3x+1)$

- tout d'abord on cherche l'ensemble E sur lequel l'équation est définie.

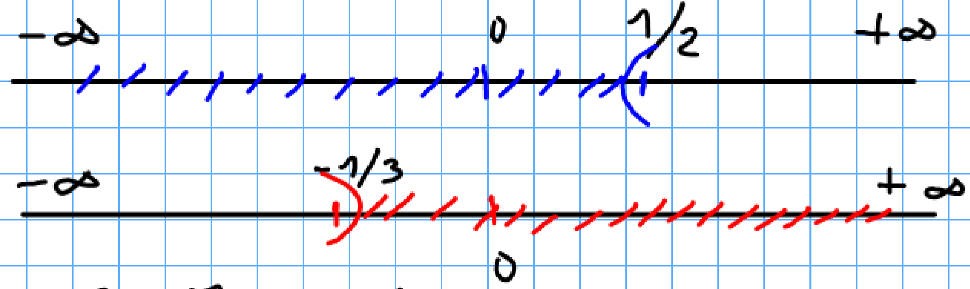
on doit avoir $1-2x > 0$ et $3x+1 > 0$

$1-2x>0$ et $3x+1>0$

$\Leftrightarrow -2x>-1$ $\qquad$ $\Leftrightarrow 3x>-1$

$\Leftrightarrow x<\frac{-1}{-2}$ $\qquad$ $\Leftrightarrow x>-\frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$



$E = \left]-\frac{1}{3} ; \frac{1}{2}\right[$

• On résout dans E l'équation précédente

pour tout $x \in E$: l'équation équivaut à $1-2x = 3x+1$

car $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$.

$0 = 5x$ soit $5x = 0$
$\phantom{0 = 5x \text{ soit }} /5 \quad /5$

$x = 0$

$0 \in E$ donc $\mathcal{S} = \{0\}$

Exemple 2 : Résoudre $\ln(x^2-4) = \ln 3x$

• Tout d'abord on cherche l'ensemble E des valeurs de x telles que l'équation existe. On doit avoir $x^2-4>0$ et $3x>0$

$$\underbrace{x^2-4}_{a^2-b^2}>0 \quad \text{et} \quad 3x>0$$

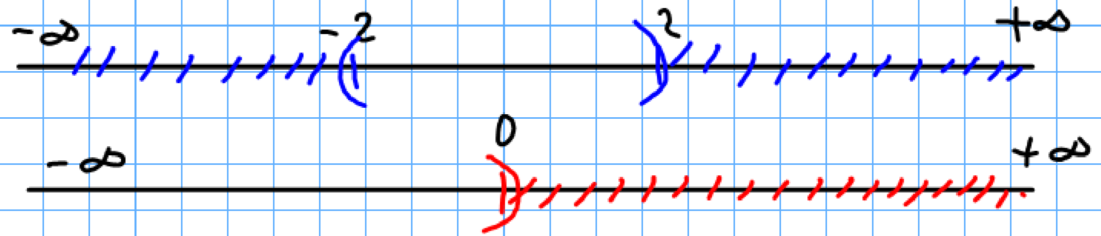
$$\iff (x-2)(x+2)>0 \quad \text{et} \quad 3x>0$$

$$\iff x > \frac{0}{3}$$

$$\iff x>0$$

Le trinôme x^2-4 est du signe de a (positif) à l'extérieur de ses racines -2 et 2.

$$x^2-4>0 \iff x \in \,]-\infty;-2[\, \cup \,]2;+\infty[$$



$$E = \,]2;+\infty[\,.$$

. Ensuite on résout l'équation $\ln(x^2-4) = \ln 3x$ dans l'ensemble E précédent :

pour tout $x \in E$: l'équation équivaut à $x^2 - 4 = 3x$ ($\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$)

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4)$

$= 9 + 16 = 25$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad$ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$= \dfrac{+3-5}{2\times 1} = -1$ $\qquad$ $= \dfrac{+3+5}{2\times 1} = 4$

on rappelle que $E =]2 ; +\infty[$ $\quad x_1 \notin E \quad x_2 \in E$

$\mathcal{S} = \{4\}$

Exemple 3 : $\ln(x^2-4) < \ln 3x$.

On a déjà déterminé l'ensemble E des valeurs de x pour lesquelles l'inéquation existe

pour tout $x \in E$: $\ln(x^2-4) < \ln 3x$

$\boxed{\ln a < \ln b \iff a < b}$

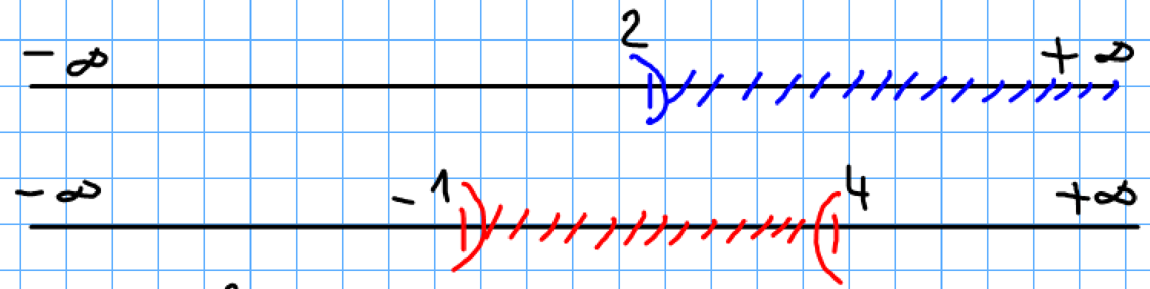
$$\iff x^2 - 4 < 3x$$

$$\iff x^2 - 3x - 4 < 0$$

Le trinôme est du signe de $-a$ (négatif) à l'intérieur de ses racines -1 et 4.

$$x^2 - 3x - 4 < 0 \iff x \in \left]-1 ; 4\right[$$

E :



$$\ln(x^2-4) < \ln 3x : \mathcal{S} = \left]2 ; 4\right[$$

II Propriétés algébriques du logarithme

1) Produit

Pour tous réels a et b strictement positifs $\boxed{\ln(ab) = \ln a + \ln b}$ (1)

attention, le produit ab peut être positif sans que a et b ne soient eux-mêmes strictement positifs. exemple : $\ln[(-3)\times(-5)] \neq \ln(-3) + \ln(-5)$

n'existe pas n'existe pas !

2) Puissances entières

De la propriété précédente, on déduit que

$$\ln(a^2) = \ln(a\times a) = \ln a + \ln a$$
$$= 2\ln a$$

$$\ln(a^3) = \ln(a^2\times a) = \ln(a^2) + \ln a$$
$$= 2\ln a + \ln a$$
$$= 3\ln a$$

de façon générale $\boxed{\ln(a^n) = n\ln a}$ (2)

3- Exposant réel :

On admet que pour tout $a > 0$ et pour tout réel k

on a : $\boxed{\ln(a^k) = k \ln a}$ (3)

En particulier

- pour $k = \frac{1}{2}$ on a $\ln a^{1/2} = \frac{1}{2} \ln a$ or $a^{1/2} = \sqrt{a}$, ainsi $\boxed{\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a}$ (4)
- pour $k = -1$ on a $\ln a^{-1} = -1 \ln a$ or $a^{-1} = \frac{1}{a}$, ainsi $\boxed{\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a}$ (5)

4- Quotient :

Pour tous a et b strictement positifs, on a : $\boxed{\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b}$ (6)

Preuve : $\frac{a}{b}$ peut s'écrire $a \times \frac{1}{b}$

ainsi $\ln \frac{a}{b} = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$

or $\frac{1}{b} = b^{-1}$ donc $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln b^{-1} = -\ln b$

ainsi $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

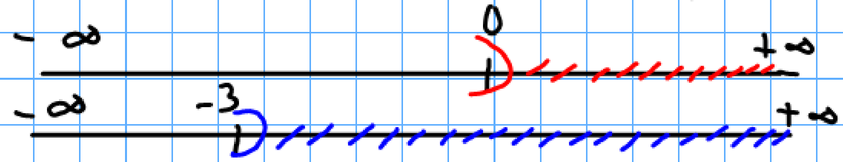
5) Méthodes : utiliser les propriétés algébriques du logarithme pour résoudre des équations ou inéquations.

a) résoudre : $\ln x + \ln(x+3) = \ln 4$

Méthode :

1. tout d'abord on cherche l'ensemble E des valeurs pour lesquelles l'équation existe.

On doit avoir $x > 0$ et $x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$



$E =]0\,;+\infty[$

2. On résout dans E l'équation précédente en appliquant les propriétés algébriques du logarithme : pour tout $x \in E$ $\ln x + \ln(x+3) = \ln 4$

$$\Leftrightarrow \ln[x(x+3)] = \ln 4$$

③ On se ramène à une équation de la forme $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

pour tout $x \in E$ $\ln[x(x+3)] = \ln 4$

$\Leftrightarrow x(x+3) = 4$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x = 4$

$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$ $\Delta = b^2 - 4ac = (3)^2 - 4\times1\times(-4) = 9 + 16 = 25$

$x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{-3-5}{2}$ $x_2 = \dfrac{-3+5}{2}$

$x_1 = -4 \notin E$ $x_2 = 1$ $\mathcal{S} = \{1\}$

$\ln x + \ln(x+3) = \ln 4 \Leftrightarrow x = 1$

b) Résoudre une inéquation du type $q^n \geq k$, $k > 0$

Dans un village, la population en janvier 2005 était de 1000 habitants.

déterminer en quelle année la population aura

a) doublé, si l'augmentation est de 3% par an ?

b) diminué de moitié si la baisse est de 3% par an ?

---

a) Augmenter de 3% revient à multiplier par $c = 1 + t = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$

Soit P_n l'effectif de la population de l'année $(2005 + n)$

P_0 correspond donc à la population de l'année $2005 + 0 = 2005$. $P_0 = 1000$.

Le schéma de principe est le suivant

$$\underset{2005}{P_0} \xrightarrow[\times 1{,}03]{+3\%} \underset{2006}{P_1} \xrightarrow[\times 1{,}03]{+3\%} \underset{2007}{P_2} \xrightarrow[\times 1{,}03]{+3\%} \underset{2008}{P_3} \longrightarrow \cdots$$

(P_n) est une suite géométrique car on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même quantité $q = 1{,}03$, appelée raison de la suite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = P_0 \times q^n$

On cherche le rang n tel que $P_n \geqslant 2P_0$

$$\Leftrightarrow \cancel{P_0} \times q^n \geqslant 2\cancel{P_0}$$

$$\Leftrightarrow q^n \geqslant 2$$ avec $q = 1{,}03$ on obtient :

$1{,}03^n \geqslant 2$

$\Leftrightarrow \ln\left[1{,}03^n\right] \geqslant \ln 2$

$$\boxed{a \geqslant b \Leftrightarrow \ln a \geqslant \ln b}$$

$\Leftrightarrow n \ln 1{,}03 \geqslant \ln 2$ puis en divisant par $\ln(1{,}03) > 0$, on obtient

$n \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}03}$ soit $n \geqslant 23{,}45$; ainsi comme $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 24$

ce qui correspond à l'année $2005 + 24 = 2029$

<u>Conclusion</u> : la population du village aura doublé à partir du 1er janvier 2029

b) diminution de 3% par an :

Diminuer de 3% revient à multiplier par $c = 1 + t = 1 + \left(\dfrac{-3}{100}\right) = 1 - 0{,}03$
$= 0{,}97$

(P_n) est une suite géométrique car on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même quantité $q = 0,97$ appelée raison de la suite.

$$P_0 \xrightarrow[\times 0,97]{-3\%} P_1 \xrightarrow[\times 0,97]{-3\%} P_2 \xrightarrow[\times 0,97]{-3\%} P_3 \ldots\ldots P_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\qquad P_n = P_0 \times q^n$

on cherche le rang n à partir duquel $P_n \leqslant \frac{P_0}{2}$

$$\Leftrightarrow \cancel{P_0} \times q^n \leqslant \frac{\cancel{P_0}}{2}$$

$$\Leftrightarrow q^n \leqslant \frac{1}{2}$$

$$0,97^n \leqslant \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} a \leqslant b \\ \Leftrightarrow \ln a \leqslant \ln b \end{array}}$$

$$\Leftrightarrow \ln 0,97^n \leqslant \ln\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \Leftrightarrow n \ln 0,97 \leqslant -\ln 2$$

$$\Leftrightarrow n \geqslant \frac{-\ln 2}{\ln 0,97}$$

on change le sens de l'inégalité car $\ln 0,97 < 0$

Lorsque l'on multiplie ou divise chaque membre d'une inégalité par un réel négatif (ici $\ln 0,97 < 0$) on obtient une inégalité de sens contraire.

on obtient $n \geq 22{,}75$ soit $n \geq 23$ car $n \in \mathbb{N}$

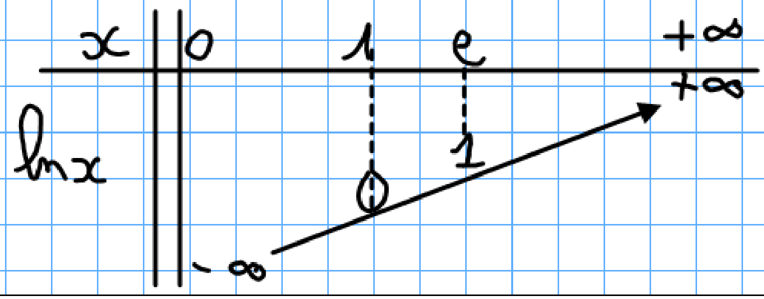
La population aura diminué de moitié à compter de $2005+23$
soit à partir de 2028.

III Equation $\ln x = k$; $k \in \mathbb{R}$

1. Le nombre e

La fonction ln est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$,
à valeurs dans $]-\infty;+\infty[$,
$1 \in]-\infty;+\infty[$, donc
d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\ln x = 1$
admet une unique solution dans $]0;+\infty[$.
La solution de cette équation est le nombre noté e.

$$\boxed{\ln e = 1}$$



2. Puissances de e - exponentielle

a) **Propriété** : pour tout réel k on peut écrire $\boxed{k = \ln e^k}$

$$\ln e^k = k \times \ln e = k \times 1 = k$$

b) **Application** : résoudre $\ln x = 27,52$

pour tout $x > 0$ on a $\ln x = \ln e^{27,52} \Leftrightarrow x = e^{27,52}$

Vocabulaire : e^k se lit « e puissance k »

ou encore « e exposant k »

ou encore « exponentielle de k »

3- Méthode : résolution d'équations et d'inéquations

a) $\ln(2x-1) = -5$

- on cherche l'ensemble E des valeurs pour lesquelles l'équation existe.

on doit avoir : $2x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow 2x > 1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$ $\quad E =]\frac{1}{2} ; +\infty[$

- on résout dans $E =]\frac{1}{2} ; +\infty[$ l'équation $\ln(2x-1) = -5$

pour tout $x \in E$: $\ln(2x-1) = -5$

$\Leftrightarrow \ln(2x-1) = \ln e^{-5}$

$\Leftrightarrow 2x - 1 = e^{-5}$

$\Leftrightarrow 2x = e^{-5} + 1$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{e^{-5}+1}{2}$

$\boxed{\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b}$

rappel $e^{-5} = \dfrac{1}{e^{5}}$

donnons une valeur approchée de $\dfrac{e^{-5}+1}{2} \simeq 0,5034$ à 10^{-4} près.

Conclusion : $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{e^{-5}+1}{2} \right\}$

b) $\ln(2x-1) > 1$

- on cherche l'ensemble E des valeurs pour lesquelles l'inéquation existe.

  on doit avoir $2x - 1 > 0$: $E = \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$

- on résout dans E l'inéquation.

pour tout $x \in E$: $\ln(2x-1) > 1$

$$\Leftrightarrow \ln(2x-1) > \ln e$$

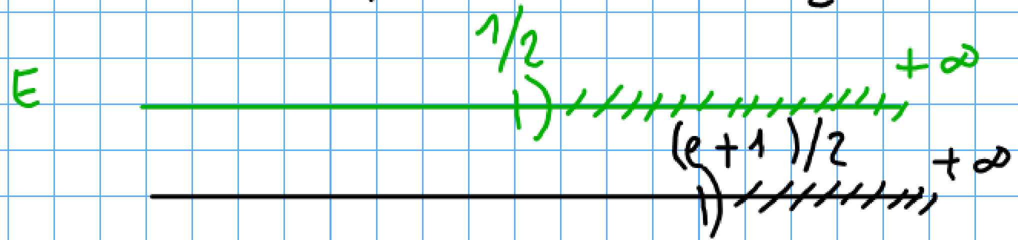
$\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$

$$\Leftrightarrow 2x - 1 > e$$

$$\Leftrightarrow 2x > e + 1$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{e+1}{2}$$

donnons une valeur approchée de $\frac{e+1}{2} \simeq 1,8591$ à 10^{-4} près.



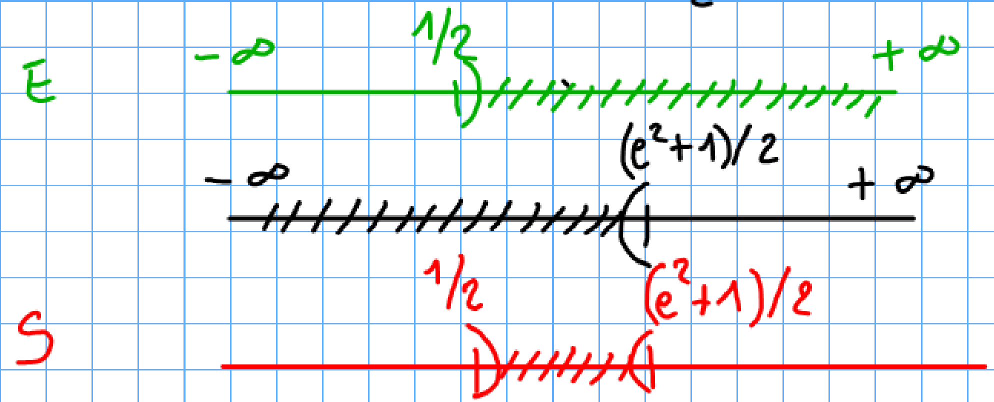
$\mathcal{S} = \left]\frac{e+1}{2} ; +\infty\right[$

c) $\ln(2x-1) \leq 2$

- on résout dans $E = \left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ l'inéquation
- pour tout $x \in E$:

$$\begin{aligned}
& \ln(2x-1) \leq 2 \\
\iff & \ln(2x-1) \leq \ln e^2 \\
\iff & 2x-1 \leq e^2 \\
\iff & 2x \leq e^2+1 \\
\iff & x \leq \frac{e^2+1}{2}
\end{aligned}$$

Donnons une valeur approchée de $\frac{e^2+1}{2} \simeq 4,1945.$



$S = \left]1/2 ; \frac{e^2+1}{2}\right[$

4 - Equation $a(\ln x)^2 + b\ln x + c = 0$ a, b, c réels, $a \neq 0$

Méthode : On pose $X = \ln x$, puis on résout l'équation du second degré $aX^2 + bX + c = 0$