Partir d'un bon pied

Voir corrigés en fin de manuel

A QCM – Relation fonctionnelle de l'exponentielle

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.

1 Pour tous réels a et b, on a :

a. $e^{a+b}=e^a+e^b$. **b.** $e^{ab}=e^a\times e^b$. **c.** $e^{a+b}=e^a\times e^b$. **d.** $e^{ab}=e^a+e^b$.

2 Pour tout réel x, on a :

a. $e^{2x+1}-e=e(e^x+1)(e^x-1)$. **b.** $e^2+\frac{1}{e^x}=e^{2-x}$. **c.** $\frac{e^{-x}+1}{e^x}=\frac{1-e^x}{e^{2x}}$.

3 Pour tout réel x, l'expression $(e^x)^2\times e^{3x-1}$ est égale à :

a. $e^{2x(3x-1)}$. **b.** $\frac{e^{5x}}{e}$. **c.** $e^{x2+3x-1}$. **c.** $\frac{e^{x^2}}{e^{1-3x}}$.

B Équation avec exponentielle

1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a. $e^{0,02x-1}=1$; **b.** $e^{-0,5x+1}=e^2$; **c.** $e^{-3x+1}=0$.

2 Justifier que $3e^{2x}-e^x-2=(e^x-1)(3e^x+2)$.
En déduire les solutions de l'équation $3e^{2x}=e^x+2$.

C Vrai ou faux ? – Calcul de dérivée

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier par un calcul.

1 Soit $f(x)=2e^{-0,5x+1}$ sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x)=e^{-0,5x+1}$.

2 Soit $f(x)=\frac{e}{e^{-1}}e^{x-1}$ sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x)=f(x)$.

3 Soit $f(x)=e^{-x}-e^x$ sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x)=-f(x)$.

4 Soit $f(x)=(x+5)e^{-0,1x+2}$ sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x)=0,1(5-x)e^{-0,1x+2}$.

D Coefficient multiplicateur

➔ Voir exercice 83 page 125

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.

1 Un pays voit sa population augmenter chaque année de 2,5 %.

a. Donner le coefficient multiplicateur.

b. Si ce taux se maintient durant 10 ans, calculer le taux d'accroissement total de cette population sur les 10 ans.

c. Pour une population initiale de 4,67 millions, quelle sera la population au bout de 10 ans ?

2 On connaît la variation d'un indice boursier sur 6 jours consécutifs.

Jour	1	2	3	4	5	6
Taux (en %)	2	1,8	– 1,5	– 3	– 0,5	4

Calculer le coefficient multiplicateur global à 10^{-3} près et en déduire le taux d'évolution global de cet indice sur cette période de 6 jours.

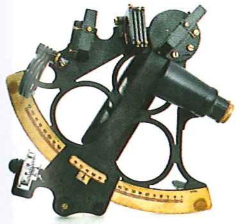
CHAPITRE 4 Fonction ln

D'hier à aujourd'hui

L'invention des logarithmes

Au XVII$^{\text{e}}$ siècle, les flottes commerciales constituent des sources d'enrichissement pour les gouvernements. La navigation nécessitait alors de longs calculs astronomiques (calcul de la position du navire à partir de la position des astres). Il fallait donc la rendre plus efficace.

Bien avant que la notion de fonction ne soit décrite par Euler en 1748, l'écossais John Napier (« Neper » en français) (1550-1617) invente, à la fin de sa vie, une association de nombres afin d'alléger les calculs numériques : les **logarithmes**, du grec *logos* (rapport, raison) et *arithmos* (nombre). C'est ensuite son assistant, Jost Bürgi (1552-1632), qui améliorera ce système. Puis Henry Briggs, en 1624, établira des tables de logarithmes décimaux, plus pratiques à utiliser que les logarithmes népériens.



L'utilisation des logarithmes s'est rapidement étendue dans toute la communauté scientifique de l'époque. Les navigateurs ont adopté ces tables afin d'effectuer plus rapidement des calculs sur les sinus d'angles de 0 à 90° mesurés à l'aide d'instruments comme le sextant (ci-contre). En « transformant » les multiplications de leurs calculs trigonométriques en additions, ils pouvaient ainsi faire le point sur la position de leur voilier et calculer leur cap en quelques minutes (au lieu de plusieurs heures auparavant).

Principe du calcul avec les tables de logarithmes :

On désire calculer $253,4\times0,2582$.

On peut aussi écrire cette opération : $2,534\times10^2\times2,582\times10^{-1}$.

En **table 1** : 253,4 se transforme en : $2+0,\boxed{40\,381}$

et 0,2582 se transforme en : $-1+0,\boxed{41\,196}$.

Puis on additionne : $1+0,81577=1,81\,577$.

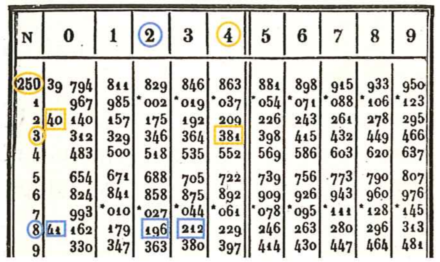
Il faut ensuite aller chercher $\boxed{81\,577}$ (**table 2**) :

on trouve le nombre 81 578 comme logarithme de 6 543.

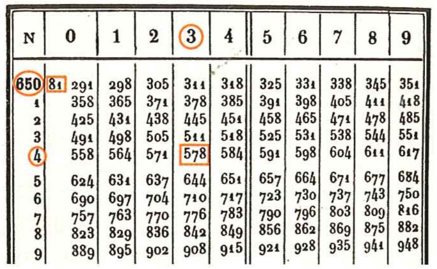
Donc $253,4\times0,2582\approx6,543\times10^1=65,43$.

Note Tout nombre décimal positif s'écrit sous la forme $d\times10^n$, où d est un nombre décimal de $[1\,;10[$ et n un entier relatif.
Ainsi, les nombres 25,34 – 253 400 – 2,534 – 0,02534 – 2 534 s'écrivent tous $2,534\times10^n$.
Dans la table : au nombre 2 534 est associée la « mantisse » $\boxed{40\,381}$.

II. Logarithmes des nombres de 1 à 10 000.



N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	39 794	811	829	846	863	881	898	915	933	950
1	967	985	*002	*019	*037	*054	*071	*088	*106	*123
2	40 140	157	175	192	209	226	243	261	278	295
3	312	329	346	364	381	398	415	432	449	466
4	483	500	518	535	552	569	586	603	620	637
5	654	671	688	705	722	739	756	773	790	807
6	824	841	858	875	892	909	926	943	960	976
7	993	*010	*027	*044	*061	*078	*095	*111	*128	*145
8	41 162	179	196	212	229	246	263	280	296	313
9	330	347	363	380	397	414	430	447	464	481



N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
850	81 291	298	305	311	318	325	331	338	345	351
1	358	365	371	378	385	391	398	405	411	418
2	425	431	438	445	451	458	465	471	478	485
3	491	498	505	511	518	525	531	538	544	551
4	558	564	571	578	584	591	598	604	611	617
5	624	631	637	644	651	657	664	671	677	684
6	690	697	704	710	717	723	730	737	743	750
7	757	763	770	776	783	790	796	803	809	816
8	823	829	836	842	849	856	862	869	875	882
9	889	895	902	908	915	921	928	935	941	948

Aujourd'hui, tout phénomène conduisant à manipuler de grands nombres ou à comparer des évolutions fait appel aux logarithmes : le pH en chimie, les décibels pour définir le niveau sonore, etc. En sciences sociales, le logarithme décimal (log) s'utilise dans la formule de nombreux indicateurs. Par exemple, l'IDH (indicateur de développement humain) est la moyenne de trois indicateurs : l'espérance de vie, l'indice d'éducation et l'indice de richesse. Ce dernier est donné par :

$$\frac{\log(\text{PIB réel})-\log(100)}{\log(40\,000)-\log(100)}.$$

Logarithme et Exponentielle vont au restaurant. Au moment de régler l'addition, qui paye ?

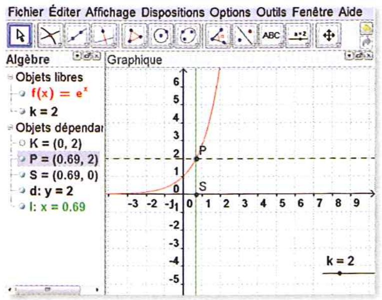
Exponentielle, parce que Logarithme ne paie rien !

Activité 1 Résoudre graphiquement l'équation $e^x = k$ TICE

On considère la fonction exponentielle et $\mathscr{C}_{exp}$ sa courbe représentative.
Sur un logiciel dynamique, on trace la courbe $\mathscr{C}_{exp}$.
On définit le réel k à l'aide d'un curseur : P le point de la courbe $\mathscr{C}_{exp}$ d'ordonnée k et S le point ayant la même abscisse que P sur l'axe des abscisses (voir **Figure 1** et **Figure 2**).

1 a. Pourquoi k ne peut-il être négatif ou nul ?
b. Si $k > 0$, combien y a-t-il de solution(s) à l'équation $e^x = k$?
Donner les coordonnées de P lorsque $k = 1$, puis lorsque $k = e$.
c. Lire la solution de l'équation $e^x = k$ sur les trois écrans ci-dessous.

2 On place le point M tel que l'abscisse de M est l'ordonnée k du point P et l'ordonnée de M est l'abscisse de P :
$x_M = k = y_P$ et $y_M = x_P$. On construit ainsi, point par point, une nouvelle fonction f telle que $f(x_M) = y_M$ (voir **Figure 3**).
a. Lorsque P parcourt $\mathscr{C}_{exp}$, dans quel intervalle varie l'abscisse du point M ? L'ordonnée de M peut-elle être négative ?
b. Lire les coordonnées de M pour $k = 2$; $k = 3$ et $k = 6$, puis $k = 0{,}5$ en utilisant le logiciel.
Quelle semble être la relation entre $f(2)$, $f(3)$ et $f(6)$? Puis entre $f(2)$ et $f(0{,}5)$?



Objets libres
f(x) = e^x
k = 2
Objets dépendar
K = (0, 2)
P = (0.69, 2)
S = (0.69, 0)
d: y = 2
l: x = 0.69

Figure 1

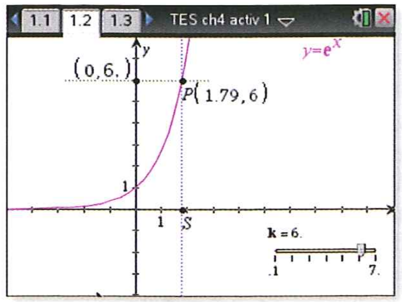


Figure 2

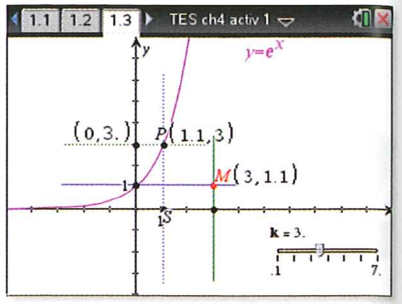


Figure 3

Activité 2 Découvrir les propriétés de la fonction ln

On admet l'existence de la fonction ln qui, à tout réel x strictement positif, associe le réel y tel que $e^y = x$.

1 Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	1	e	e^2	e^3	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{e^2}$
y tel que $e^y = x$						

2 La fonction ln s'obtient à la calculatrice par la touche ln .
a. Calculer $\ln(3)$ et $\ln(2)$, puis $\ln(6)$.
Retrouver les valeurs obtenues dans les figures de l'Activité 1.
b. Essayer « $\ln(-2)$ ». Est-ce égal à $-\ln(2)$?
Trouver le nombre a tel que $\ln(a) = -\ln(2)$.

Note Sur TI™ :
La touche ln donne `ln(`.
Ne pas oublier de fermer la parenthèse.

3 À la calculatrice, visualiser la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction ln.
a. Par lecture graphique, donner son sens de variation.
b. La courbe $\mathscr{C}$ traverse-t-elle l'axe des abscisses ? En quelle valeur ?
Donner le tableau de signes de $\ln(x)$.
c. Calculer $\ln(10^9)$, puis $\ln(10^{99})$.
Pourquoi la fonction ln peut-elle s'appeler « l'escargot » des fonctions ?

4 Soit y_1 et y_2 deux réels quelconques, et x_1 et x_2 leurs images par la fonction exponentielle.
Ainsi : $x_1 = e^{y_1}$ et $x_2 = e^{y_2}$ et $y_1 = \ln(x_1)$ et $y_2 = \ln(x_2)$.
a. Rappeler la relation fonctionnelle de la fonction exponentielle.
b. Écrire $e^{y_1} \times e^{y_2}$ en utilisant cette relation. En déduire une relation concernant $\ln(x_1)$ et $\ln(x_2)$.

Activité 3 Conjecturer la dérivée de la fonction ln TICE

Soit $\mathscr{C}_{exp}$ la courbe de la fonction exponentielle et $\mathscr{C}_{ln}$ la courbe de la fonction logarithme népérien.
Sur un logiciel dynamique, on crée un curseur k, variant de 0 à 10. On place le point M de la courbe $\mathscr{C}_{ln}$ ayant pour abscisse la valeur du curseur k et le point P de la courbe $\mathscr{C}_{exp}$, d'ordonnée k.

1 a. Rappeler la dérivée de la fonction exponentielle $\exp : x \mapsto e^x$.
b. Que représente le nombre dérivé de la fonction exponentielle sur un graphique.
c. Déterminer par le calcul l'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{exp}$ tracée ci-contre pour $k = 4$.

2 a. Sur les **figures 2** et **3**, lire le nombre dérivé de la fonction ln en 2, puis en 5.
b. Faire bouger le curseur k. Regarder le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{ln}$ et l'abscisse du point M.
Faire une conjecture sur la fonction dérivée de la fonction ln.

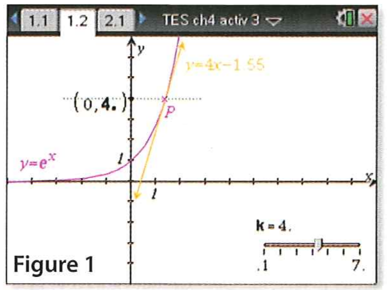


Figure 1

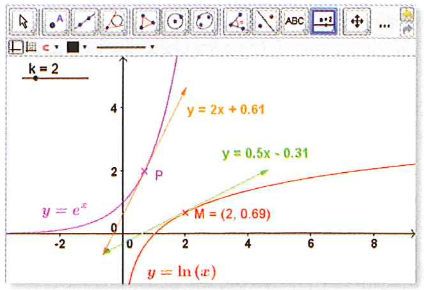


Figure 2

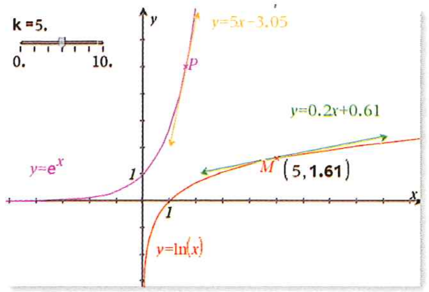


Figure 3

Activité 4 Comparer des croissances exponentielles TICE

Pour comparer la croissance de la population dans le monde, et faire des prévisions, on peut faire une représentation dans deux types de repère, pour l'axe des ordonnées. Les populations sont en million.

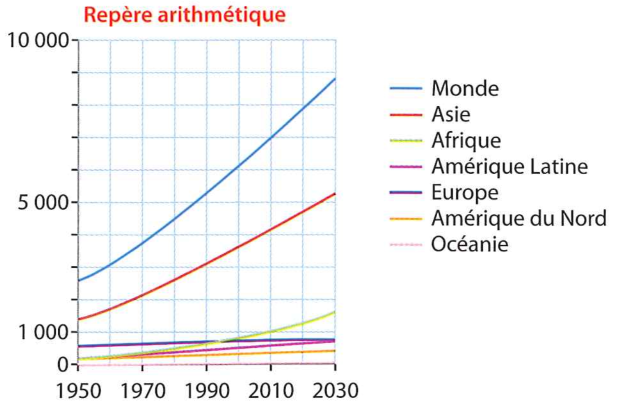


Figure 1

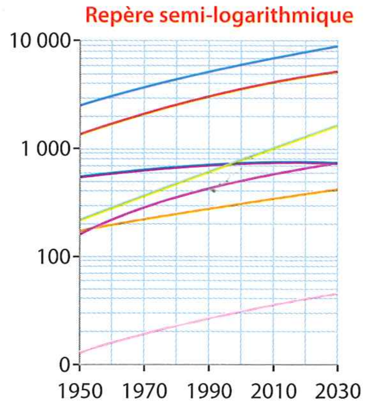


Figure 2

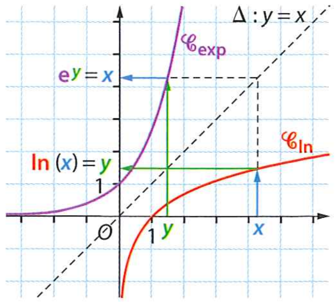
1 a. Quelle information donne la **Figure 2** quant à la croissance de la population de l'Afrique ?
b. Comment pourrait-on décrire la croissance de la population pour l'Asie et pour le monde ?

2 Les prévisions pour 2030 ont été calculées en utilisant le taux de croissance de la population sur la période 2000-2008 : 10,4 % pour le monde ; 10,2 % pour l'Asie ; 20,5 % pour l'Afrique ; 10,5 % pour l'Amérique latine et 11,8 % pour l'Océanie. Lorsque les taux de croissance sont pratiquement identiques, comment cela se traduit-il dans un repère semi-logarithmique ?

1 Logarithme népérien d'un réel strictement positif

a Réel $\ln(x)$, avec $x > 0$

Définition Pour tout réel x **strictement positif**, le réel $\ln(x)$ est l'**unique solution** de l'équation $e^y = x$, d'inconnue y. Autrement dit :
Pour tout réel x, avec $x > 0$: $\quad \ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y$. *(Formule 1)*
Ainsi, la fonction **logarithme népérien**, notée **ln**, est définie sur les réels strictement positifs : $\quad \ln : x \mapsto \ln(x)$, **avec** $x > 0$.



La courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ est la courbe **symétrique** de la courbe $\mathscr{C}_{\exp}$ par rapport à la **droite Δ**.

CONSÉQUENCES IMMÉDIATES

- Comme $e^0 = 1$, alors $\ln(1) = 0$ et comme $e^1 = e$, alors $\ln(e) = 1$.
- Pour **tout réel x strictement positif :** $y = \ln(x) \Leftrightarrow e^y = x$.

Ainsi, $\quad e^{\ln(x)} = x$. $\quad$ *(Formule 2)*

- Pour **tout réel y :** $x = e^y \Leftrightarrow y = \ln(x) = \ln(e^y)$.

Ainsi, $\quad \ln(e^y) = y$. $\quad$ *(Formule 3)*

- **L'équation** $e^x = k$, avec $k > 0$, a pour unique solution $x = \ln(k)$.

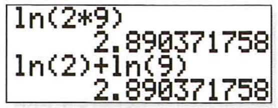
EXEMPLES

- $e^{\ln(2)} = 2$; $\quad \ln(e^3) = 3$; $\quad \ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = \ln(e^{-1}) = -1$.
- On peut écrire $5 = \ln(e^5)$ et comme $5 > 0$, on peut écrire $5 = e^{\ln(5)}$.

L'équation $e^x = 5$ a pour unique solution $x = \ln(5)$.

b Relation fonctionnelle

Théorème La fonction logarithme népérien **transforme un produit** de réels strictement positifs **en somme** de logarithmes :
pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$: $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$. *(Formule 4)*



```
ln(2*9)
          2.890371758
ln(2)+ln(9)
          2.890371758
```

DÉMONSTRATION

Soit x et y deux réels strictement positifs. Alors il existe deux réels a et b tels que $x = e^a$ et $y = e^b$. On peut écrire $a = \ln(x)$ et $b = \ln(y)$.

$$\ln(x \times y) = \ln(e^a \times e^b) = \ln(e^{a+b})$$

car la fonction exponentielle transforme une somme en produit.

D'où : $\quad \ln(x \times y) = \ln(e^{a+b}) = a + b = \ln(x) + \ln(y)$.

CONSÉQUENCES

Pour $x > 0$ et $y > 0$: $\quad \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x) \qquad \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

et pour tout entier relatif n : $\quad \ln(x^n) = n \times \ln(x)$.

Par prolongement continu sur $\mathbb{R}$, on admet que, pour tout réel x et $q > 0$:

$$\ln(q^x) = x \times \ln(q) \Leftrightarrow q^x = e^{x\ln(q)}.$$

Voir exercice 28 page 116 pour les démonstrations

EXEMPLES

- $1 + \ln(3) = \ln(e) + \ln(3) = \ln(e \times 3) = \ln(3e)$.
- $\ln(2) - \ln(3) + 2\ln(5) = \ln(2) + \ln\left(\dfrac{1}{3}\right) + \ln(5^2) = \ln\left(2 \times \dfrac{1}{3} \times 5^2\right) = \ln\left(\dfrac{50}{3}\right)$.
- $20 \times 0{,}41^x = e^{\ln(20)} \times e^{x\ln(0{,}41)} = e^{\ln(20) + x\ln(0{,}41)} \approx e^{3-0{,}9x}$.

```
ln 20
                2.995732274
ln 0.41
              -0.8915981193
```

Utiliser les formules sur ln

Exercice corrigé

Énoncé

1 Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

a. $2 - e^{-x+1} = 0$.

b. $4\ln(x) + 3 = 0$.

c. $(e^x - 9)(\ln(x) + 1) = 0$.

d. $e^{2x} - 3e^x \geqslant 0$.

2 a. Écrire sous la forme d'une somme de logarithmes :

$$A = \ln\left(\frac{3 \times 5^2}{27}\right).$$

b. Écrire à l'aide d'un seul logarithme :

$$B = 3\ln(10) + \ln(0{,}08) - 5\ln(2).$$

Points méthode

① Dans une équation ou inéquation comportant une seule exponentielle, ou un seul $\ln(x)$, on l'isole pour se ramener à :

$e^{(X)} = k$, avec $k > 0 \Leftrightarrow X = \ln(k)$

ou $\ln(x) = a$, $a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = e^a$.

Notation Si ln ne porte que sur le réel x ou un nombre, on peut écrire sans parenthèses :
$\ln(x) = \ln x$ ou $\ln(2) = \ln 2$.

② Si ln porte sur **un produit** ou **un quotient** de nombres réels, on peut écrire sous forme de **somme**.
Pour écrire **une somme de logarithmes** sous forme d'**un seul logarithme**, on applique dans l'ordre :
① $n\ln(a) = \ln(a^n)$;
② $-\ln(b) = \ln\left(\dfrac{1}{b}\right)$;
③ $\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \times b)$.

Solution

1 a. Pour résoudre $2 - e^{-x+1} = 0$, on isole l'exponentielle :
$e^{-x+1} = 2 \Leftrightarrow -x + 1 = \ln(2) \Leftrightarrow -x = -1 + \ln(2) \Leftrightarrow x = 1 - \ln(2)$.

b. Pour résoudre $4\ln(x) + 3 = 0$, on isole $\ln(x)$:

$$4\ln(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x = e^{-0{,}75}.$$

c. $(e^x - 9)(\ln(x) + 1)$ est un produit égal à 0. Donc :
- soit $e^x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \ln(9)$. On peut aussi écrire : $x = \ln(3^2) = 2\ln 3$.
- soit $\ln(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

D'où l'ensemble solution $S = \left\{2\ln 3 ; \dfrac{1}{e}\right\}$.

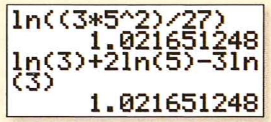
d. Pour résoudre $e^{2x} - 3e^x \geqslant 0$, on factorise : $e^x(e^x - 3) \geqslant 0$.
Or e^x est toujours strictement positive, donc on résout :
$e^x - 3 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 3 \Leftrightarrow x \geqslant \ln(3)$. D'où $S = [\ln 3 ; +\infty[$.

2 a. On a $A = \ln\left(\dfrac{3 \times 5^2}{27}\right)$, logarithme d'un **quotient**, avec un **produit** au numérateur :

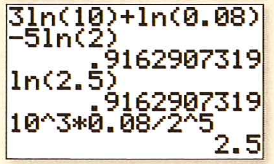
$$\begin{aligned} A &= \ln(3 \times 5^2) - \ln(27) \\ &= \ln(3) + \ln(5^2) - \ln(3^3) \\ &= \ln(3) + 2\ln(5) - 3\ln(3) = 2\ln(5) - 2\ln(3). \end{aligned}$$

b. On a $B = 3\ln(10) + \ln(0{,}08) - 5\ln(2)$, somme de logarithmes :

$$\begin{aligned} B &= \ln(10^3) + \ln(0{,}08) - \ln(2^5) \\ &= \ln(10^3) + \ln(0{,}08) + \ln\left(\frac{1}{2^5}\right) \\ &= \ln\left(\frac{10^3 \times 0{,}08}{2^5}\right) = \ln\left(\frac{1000 \times 0{,}08}{32}\right) = \ln\left(\frac{5}{2}\right) = \ln(2{,}5). \end{aligned}$$



```
ln((3*5^2)/27)
       1.021651248
ln(3)+2ln(5)-3ln
(3)
       1.021651248
```



```
3ln(10)+ln(0.08)
-5ln(2)
      .9162907319
ln(2.5)
      .9162907319
10^3*0.08/2^5
               2.5
```

Exercices d'application

Voir exercices 21 à 31

1 Résoudre les équations suivantes :

a. $e^x - 4 = 0$; $\quad$ **b.** $2e^x - 1 = 0$;

c. $e^{x+1} = 2$; $\quad$ **d.** $4e^{-x} - 1 = 0$.

2 Résoudre les équations suivantes :

a. $\ln(x) - 2 = 0$; $\quad$ **b.** $0{,}5\ln(x) = 1$;

c. $4\ln(x) + 1 = 0$; $\quad$ **d.** $\ln(x)(3 - \ln(x)) = 0$.

3 Écrire sous la forme d'une somme de logarithmes :

$A = \ln\left(\dfrac{2 \times 3}{5}\right)$; $\qquad B = \ln(2^3 \times 5^2)$.

4 Écrire à l'aide d'un seul logarithme :

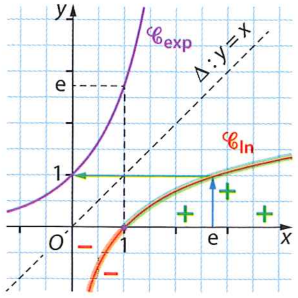
$A = \ln(3) + \ln(2) + \ln(e)$. $\quad B = 2\ln(3) - \ln(5) + 3\ln(2)$.

2 Étude de la fonction ln : $x \mapsto \ln(x)$

a Dérivée et sens de variation

Théorème admis La fonction ln est dérivable sur l'intervalle] 0 ; +∞ [et sa dérivée est la fonction inverse sur] 0 ; +∞ [.
Autrement dit : pour tout réel **x strictement positif**, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Remarque L'Activité 2 permet d'approcher point par point la dérivée de la fonction ln, par lecture du coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$.



CONSÉQUENCES

- Sur] 0 ; +∞ [, l'inverse de x est strictement positif, donc la fonction dérivée de ln est strictement positive. Par conséquent, **la fonction ln est strictement croissante** sur] 0 ; +∞ [.
- Si $x > 1$, alors $\ln(x)$ est positif ; si $0 < x < 1$, alors $\ln(x)$ est négatif.

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	‖	+	1	+	
$\ln(x)$	‖	– ↗	0	↗ +	

- Comme la fonction ln est dérivable, la fonction **ln est continue** : pour **tout réel k**, l'équation $\ln(x) = k$ admet, dans l'intervalle] 0 ; +∞ [, une unique solution $x = e^k$.
- Pour que tous réels tels que $A > 0$ et $B > 0$, $\ln(A) \geqslant \ln(B) \Leftrightarrow A \geqslant B$.

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur] 0 ; +∞ [par $f(x) = 2x - 3\ln(x)$.
Alors f est dérivable sur] 0 ; +∞ [et sa dérivée a pour expression :

$$f'(x) = 2 - 3 \times \frac{1}{x} = \frac{2x-3}{x}.$$

b Propriétés de la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ représentant la fonction ln

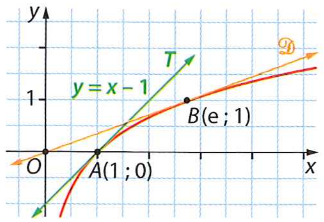
- Le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point $A(1\,;0)$ est $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$. Donc la tangente T a pour équation $y = x - 1$.
- Le coefficient directeur de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point B d'abscisse e est $\frac{1}{e}$. L'ordonnée de B est $\ln(e) = 1$.

Donc la tangente $\mathscr{D}$ a pour équation $y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{e}x$.

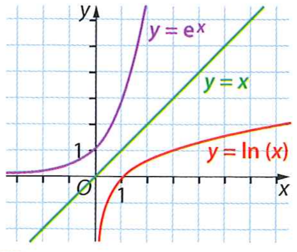
La tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ au point d'abscisse e passe par l'origine.

- La position relative de la droite Δ, d'équation $y = x$, et des courbes $\mathscr{C}_{\exp}$ et $\mathscr{C}_{\ln}$, est vue dans l'exercice résolu page 111.
- Comme la fonction inverse est décroissante sur] 0 ; +∞ [, alors la dérivée de la fonction ln est décroissante, donc la croissance de la fonction ln est « ralentie ».

En conséquence, la fonction **ln est concave** sur] 0 ; +∞ [.



Remarque Plus x devient grand, plus son inverse est proche de zéro, ce qui signifie que la croissance de la fonction ln devient très faible.



Propriétés

- Pour tout réel x de] 0 ; +∞ [, on a $\ln(x) < x < e^x$.
- la fonction ln est concave sur] 0 ; +∞ [.

Étudier les variations d'une fonction avec ln

Exercice corrigé

Énoncé

Soit les fonctions f et g définies sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par : $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = x$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et Δ la droite représentant la fonction g.

1 À l'aide de la calculatrice, conjecturer la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction ln avec la droite Δ d'équation $y = x$.

2 Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$d(x) = f(x) - g(x) = \ln(x) - x.$$

Calculer $d'(x)$ et étudier son signe sur] 0 ; +∞ [.
Dresser le tableau de variations de la différence d sur l'intervalle] 0 ; +∞ [.

3 Démontrer la conjecture émise à la question **1** sur la position relative des deux courbes.

Points méthode

① La **calculatrice** permet d'avoir **une idée** de la position relative de deux courbes, mais ce n'est **pas une démonstration**.

② Le signe d'une **expression avec $\ln(x)$** nécessite souvent l'étude d'une fonction : les variations de cette fonction, la recherche d'**extremum**, ou l'emploi de la **propriété des valeurs intermédiaires** (Voir chapitre 2 page 46) permettent d'en connaître le signe.

③ Si la différence $d(x)$ est positive, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de Δ.
Si la différence est négative, la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de Δ.

Solution

1 À l'aide de la calculatrice, dans la fenêtre $X \in [0\,;6]$, on conjecture que la droite Δ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}$.

2 On étudie la différence sur] 0 ; +∞ [:

$$d(x) = f(x) - g(x) = \ln(x) - x.$$

Sa dérivée est définie sur] 0 ; +∞ [par :

$$d'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

Comme $x > 0$, alors $d'(x)$ est du signe de $1 - x$.
D'où le signe de $d'(x)$ et le tableau de variations de d.
$d(1) = \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$.

x	0		1		$+\infty$
$d'(x)$	‖	+	0	–	
$d(x)$	‖	↗	–1	↘	

3 La fonction d admet un maximum.
Ce maximum vaut $d(1) = -1$, négatif, donc $d(x)$ est négatif sur] 0 ; +∞ [.
Cela démontre que la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction ln est en dessous de la droite Δ d'équation $y = x$ sur] 0 ; +∞ [.

Exercices d'application

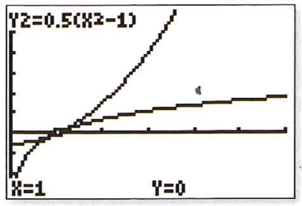
Voir exercices 54 à 58

5 On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle] 0 ; +∞ [par :

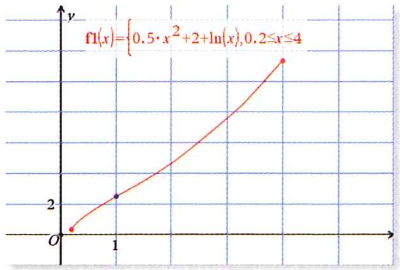
$$f(x) = \ln(x) \qquad \text{et} \qquad g(x) = 0{,}5(x^2 - 1).$$

a. Calculer $f(1)$ et $g(1)$.
Interpréter le résultat.

b. Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction ln avec la courbe $\mathscr{P}$ de la fonction g.



6 Le coût total de production pour x milliers d'objets est donné par $f(x) = 0{,}5\,x^2 + 2 + \ln(x)$ sur [0,2 ; 4].
$f(x)$ est en millier d'euros.



a. Calculer $f'(x)$, puis $f''(x)$, dérivée de la dérivée.
b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f admet un point d'inflexion.

3 Équations avec exponentielle

a Recherche de la base de l'exponentielle

Propriété Soit k **un nombre strictement positif** connu et n **un entier naturel non nul**.

Dans $]0\,;+\infty[$, l'équation $x^n = k$ possède une unique solution $x = k^{1/n}$.

Le nombre $k^{1/n}$ est la **racine n-ième de k**.

Note Cette équation a été vue au chapitre 3 page 72.

Remarques La racine carrée de k, avec $k > 0$, s'écrit :

$$\sqrt{k} = k^{1/2} = k^{0,5}.$$

On utilise aussi la notation $\sqrt[n]{k}$ pour la racine n-ième de k.

CAS PARTICULIER

Soit (u_n) une suite géométrique à raison q positive dont on connaît deux termes u_0 et u_n. Alors $u_n = u_0 \times q^n$. D'où : $q^n = \dfrac{u_n}{u_0} \Leftrightarrow q = \left(\dfrac{u_n}{u_0}\right)^{1/n}$.

EXEMPLE

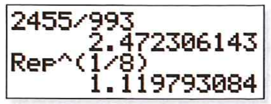
La consommation d'électricité par habitant en Chine est passée de 993 kWh en 2000 à 2 455 kWh en 2008. On suppose que, chaque année, la consommation a été multipliée par le même nombre.

Soit q le coefficient multiplicateur annuel de cette consommation. Alors :

$$2\,455 = 993 \times q^8 \Leftrightarrow q^8 = \frac{2\,455}{993} \approx 2{,}4723 \Leftrightarrow q = \left(\frac{2\,455}{993}\right)^{1/8} \approx 1{,}1198.$$

Or $(1{,}1198 - 1) \times 100 = 11{,}98$; soit une augmentation moyenne de la consommation d'électricité en Chine d'environ 12 % par an.

Remarque Sur la calculatrice, ne pas oublier de mettre l'exposant $\dfrac{1}{n}$ entre parenthèses.



```
2455/993
          2.472306143
Rep^(1/8)
          1.119793084
```

APPLICATION

Si CM est le **coefficient multiplicateur global** sur n années, le **taux moyen** d'évolution annuel t est tel que :

$$(1+t)^n = \text{CM} \Leftrightarrow 1 + t = \text{CM}^{1/n} \Leftrightarrow t = \text{CM}^{1/n} - 1.$$

b Recherche de l'exposant

Propriété Soit k un nombre strictement positif connu.

L'équation $e^X = k$ possède une unique solution $X = \ln(k)$.

Or on peut écrire $q^x = e^{x \times \ln(q)}$, avec $q > 0$ et $q \neq 1$.

Donc l'équation $q^x = k$ s'écrit $e^{x \times \ln(q)} = k$.

Ainsi, dans $\mathbb{R}$, l'équation $q^x = k \Leftrightarrow x \times \ln(q) = \ln(k) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(k)}{\ln(q)}$.

Note Ces résultats ne sont pas à connaître par cœur et doivent être retrouvés et justifiés dans chaque application, comme le montre la résolution dans l'exemple ci-dessous.

EXEMPLE

Une production est fonction de l'investissement x en millier d'euros. La quantité produite $f(x)$, en tonne, est modélisée par la fonction f telle que : $f(x) = 10 \times 1{,}03^x - 14$.

La production n'est réelle qu'à partir d'un investissement x tel que $f(x) > 0$.

On est amené à résoudre l'inéquation : $10 \times 1{,}03^x - 14 > 0$.

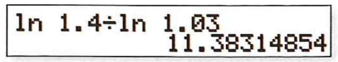
On isole l'exponentielle où l'inconnue est en exposant : $1{,}03^x > 1{,}4$.

On applique la fonction ln, strictement croissante : $\ln(1{,}03^x) > \ln(1{,}4)$.

On utilise la propriété $\ln(q^x) = x \times \ln(q)$, d'où : $x\ln(1{,}03) > \ln(1{,}4)$.

On divise par $\ln(1{,}03)$ **strictement positif**, d'où : $x > \dfrac{\ln(1,4)}{\ln(1,03)} \approx 11{,}383$.

Ainsi, il est nécessaire d'investir 11,4 milliers d'euros pour produire.



```
ln 1.4÷ln 1.03
          11.38314854
```

Déterminer un seuil

Exercice corrigé

Énoncé

Un procédé de fabrication industrielle d'un enduit nécessite l'incorporation, toutes les heures, d'un adjuvant. Au début du procédé, à $t = 0$, on incorpore 4 litres de cet adjuvant.

Puis, toutes les heures, il ne reste que la moitié de la quantité d'adjuvant et on incorpore à nouveau 4 L d'adjuvant dans le mélange.

Ainsi, au bout de n heures, après avoir ajouté les 4 derniers litres, on admet que la quantité S_n d'adjuvant présente dans le mélange, en L, est donnée par :

$$S_n = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \times \frac{1}{2} + 4$$
$$= 4 \times \left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

1 Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$S_n = 8 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

2 Déterminer la limite de la suite (S_n). Interpréter le résultat.

3 Déterminer à partir de quel nombre d'heures la quantité d'adjuvant dépasse 7,9 L.

Points méthode

① Bien faire attention au nombre de fois où la quantité est multipliée par $\dfrac{1}{2}$.

On met en valeur la **somme des termes d'une suite géométrique**.

Voir chapitre 1 page 14

② Se souvenir que : lorsque la raison $q \in]0\,;1[$, la limite de la suite géométrique (q^n) est égale à 0.

Si $0 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

③ Lorsque l'inconnue est en exposant :
- on isole l'exponentielle,
- on applique la fonction ln strictement croissante pour « descendre » l'exposant.

Attention Lorsque $q \in]0\,;1[$, alors $\ln(q)$ **est négatif**.

Solution

1 En mettant 4 en facteur dans S_n donné ci-dessus, on reconnaît la **somme de $n+1$ termes** d'une **suite géométrique** de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

D'où : $S_n = 4 \times \left(\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = 4 \times 2 \times \left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 8 - 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$,

car $1 - q = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ et $8 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} = 8 \times \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 4 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

2 Comme $\dfrac{1}{2} \in]0, 1[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$.

Donc, en multipliant par -4 et en ajoutant 8, on obtient : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 8$.

À long terme, la quantité totale d'adjuvant est de 8 L.

3 On cherche un entier n tel que :

$$S_n > 7{,}9 \Leftrightarrow 8 - 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n > 7{,}9 \Leftrightarrow -4\left(\frac{1}{2}\right)^n > 7{,}9 - 8$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5^n < \frac{0{,}1}{4}$$, en divisant par **-4 négatif**.

On applique la fonction ln et $\ln(q^n) = n \times \ln(q)$:

$$S_n > 7{,}9 \Leftrightarrow \ln(0{,}5^n) < \ln(0{,}025) \Leftrightarrow n \times \ln(0{,}5) < \ln(0{,}025).$$

On divise par **$\ln(0{,}5)$ négatif**, car **$0{,}5 \in]0\,;1[$** et on obtient :

$$n > \frac{\ln(0{,}025)}{\ln(0{,}5)} \approx 5{,}3 \text{ avec } n \text{ entier.}$$

Donc au bout de 6 heures, la quantité d'adjuvant dans l'enduit dépasse 7,9 L.

Exercices d'application

Voir exercices 76 à 80

7 De 311 pour 1 000 en 1990, le taux de mortalité au Niger est passé à 143 ‰ en 2010.
Déterminer le taux d'évolution moyen annuel. Si l'évolution se poursuit, quel sera le taux de mortalité en 2018 ?
Arrondir les résultats à 0,1 pour mille près.

8 En 2000, la population du Niger était de 10,9 millions d'habitants. Depuis 2000, elle augmente de 3,5 % par an. Si ce taux se maintient, déterminer l'année à partir de laquelle la population du Niger dépassera 20 millions d'habitants.

Faire le point

Capacités | Mise en œuvre

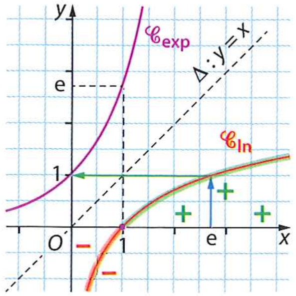
Connaître la fonction logarithme népérien ln et son lien avec la fonction exponentielle.

La fonction ln est définie sur l'ensemble] 0 ; +∞ [des réels strictement positifs :

$$\ln(x) = y \Leftrightarrow x = e^y .$$

Dans un repère orthonormé, les deux courbes $\mathscr{C}_{\ln}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

- Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln(x)} = x$.



Connaître la relation fonctionnelle de la fonction ln et ses conséquences.

La fonction logarithme népérien **transforme un produit** de réels strictement positifs **en somme** de logarithmes :

- Pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$: $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$;

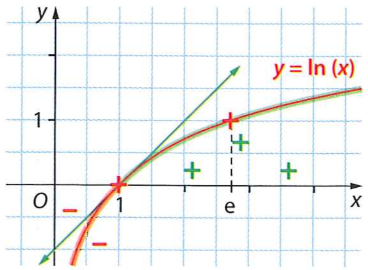
$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) ; \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) .$$

- Pour tout entier relatif n : $\ln(x^n) = n \times \ln(x)$.
- Pour tout réel x et $q > 0$: $\ln(q^x) = x \times \ln(q) \Leftrightarrow q^x = e^{x\ln(q)}$.

Connaître la dérivée de la fonction ln et son sens de variation.

La fonction ln est dérivable sur] 0 ; +∞ [et sa dérivée est la fonction inverse.
La fonction ln est croissante sur] 0 ; +∞ [.

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x) = \frac{1}{x}$	‖	+	1	+	
$\ln(x)$	‖	–	0	+	↗



Connaître la forme et les propriétés de la courbe de la fonction ln.

- La courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ traverse l'axe des abscisses en $x = 1$.
Elle est située en dessous de l'axe des abscisses sur] 0 ; 1 [et au-dessus de l'axe des abscisses sur] 1 ; +∞ [.
- La tangente à la courbe $\mathscr{C}_{\ln}$ en 1 a pour équation $y = x - 1$.
- La fonction ln est concave sur] 0 ; +∞ [.

Savoir résoudre l'équation : $e^x = k$, $k > 0$.

Soit k un nombre strictement positif.
Dans ℝ, l'équation $e^x = k$ admet une unique solution $x = \ln(k)$.

Savoir résoudre l'équation $x^n = k$, $k > 0$ et l'appliquer à la recherche d'un taux moyen d'évolution t.

Soit k un nombre strictement positif et n un entier naturel.
Dans] 0 ; +∞ [, l'équation $x^n = k$ admet une unique solution $x = k^{1/n}$.
Ce nombre est la racine n-ième de k.
Si CM est le coefficient multiplicateur global sur n années, $x = \text{CM}^{1/n} - 1$.

Savoir résoudre l'équation $q^x = k$ en détaillant les étapes.

Soit $q > 0$. Alors, en appliquant les propriétés de la fonction ln :

$$q^x = k \Leftrightarrow \ln(q^x) = \ln(k) \Leftrightarrow x \times \ln(q) = \ln(k) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(k)}{\ln(q)} .$$

Faire le point

QCM

Voir corrigés en fin de manuel

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.

9 Pour tout réel a, on a :
a. $e^{\ln(a)} = a$. **b.** $\ln(e^a) = a$. **c.** $(\ln e)^a = a$.

10 Pour tous réels x et y strictement positifs, $\ln\left(\frac{e^x}{y}\right)$ est égal à :
a. $\frac{x}{y}$. **b.** $x - \ln(y)$. **c.** $1 - \ln\left(\frac{y}{x}\right)$.

11 L'inéquation $3e^x - 2e^{2x} \geqslant 0$ a pour ensemble solution :
a.] 0 ; ln(1,5)] . **b.**] −∞ ; ln(1,5)] . **c.** [ln(1,5) ; +∞ [.

12 La dérivée de la fonction f définie sur] 0 ; +∞ [par $f(x) = 3 + x - \frac{\ln x}{x}$ s'exprime par :
a. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. **b.** $f'(x) = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$. **c.** $f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

13 Soit la fonction $f : x \mapsto (\ln x)^2$ définie sur] 0 ; +∞ [.
a. Sa dérivée s'exprime par $f'(x) = 2\ln x$. **b.** La fonction f admet un maximum en 1. **c.** La fonction f admet un minimum en 1.

14 L'équation $(\ln x)^2 + 2\ln x = 0$ a pour solutions :
a. 1 et e^2. **b.** 1 et e^{-2}. **c.** e et e^{-2}.

15 La fonction de coût total d'une production de x centaines d'objets est donnée, en millier d'euros, par :
$f(x) = 0{,}5\,x^2 - 3x + 5 + 4\ln(x)$, où $x \in [\,0{,}5 ; 8\,]$.
Le coût moyen d'un objet quand on a produit x centaines d'objets est exprimé :
a. en millier d'euros. **b.** en dizaine d'euros par objet. **c.** en dizaine de centimes par objet.

16 Le coût marginal est assimilé à la dérivée du coût total.
Pour la fonction de coût total précédente, le coût marginal est :
a. $f'(x) = x - 3 + \frac{1}{x}$. **b.** toujours croissant. **c.** admet un minimum en 2.

17 L'indice des prix pour les appareils audiovisuels en France est passé de 80,30 en fin 2001 à 21,91 en fin 2011.
Cet indice a baissé en moyenne de :
a. environ 12 % par an. **b.** environ 37 % par an. **c.** environ 7,3 % par an.

18 L'inéquation $12{,}5 \times 0{,}95^n \leqslant 7$ a pour ensemble solution les entiers de l'intervalle :
a. [0 ; 11] . **b.** [11 ; +∞ [. **c.** [12 ; +∞ [.

1 Logarithme népérien d'un réel strictement positif

19 QCM

Donner la seule bonne réponse.

1 L'égalité $\ln(e^x)=x$:
a. n'est vraie que pour $x>0$.
b. est vraie pour tout réel x.
c. n'est jamais vraie.
d. n'est vraie que pour $x \geqslant 1$.

2 L'égalité $e^{\ln(x)}=x$ est vraie pour tout réel x appartenant à :
a. $[0\,;+\infty[$. b. $\mathbb{R}$. c. $]0\,;+\infty[$. d. $[-1\,;+\infty[$.

3 Le nombre -3 est solution de l'équation :
a. $\ln(x)=-\ln(3)$. b. $\ln(e^x)=-3$.
c. $e^{\ln(x)}=-3$. d. $e^x=-3$.

20 Vrai ou faux ?

1 Pour tout réel $a>0$, $\ln(3a)-\ln(a)=\ln(3)$.

2 $\dfrac{\ln(e^2)}{\ln(16)}=2-\ln(16)$.

3 $\ln(e^2+e)=1+\ln(e+1)$.

4 Pour tout réel x, $\ln(x^2+x)=\ln(x)+\ln(x+1)$.

Pour les exercices 21 et 22

Résolution d'équations avec exp

Résoudre les équations suivantes.
Donner les solutions exactes.

21 a. $e^x=2$. b. $e^x+2=3$.

22 a. $e^{-0{,}03x}=0{,}25$. b. $(e^x-1)(3e^x-4)=0$.

Pour les exercices 23 à 25

Résolution d'équations avec ln

Résoudre les équations données.

23 a. $\ln(x)+1=0$. b. $\ln(x)=2$.

24 a. $2\ln(x)-1=0$. b. $(x+2)\ln(x)=0$.

25 a. $\ln(x)=2\ln(3)$. b. $\ln(x^2+x+1)=0$.

Pour les exercices 26 et 27

Tableaux de signes avec exp

Dresser le tableau de signes de la fonction f définie sur l'intervalle donné.

26 a. $f(x)=3e^x-4$ sur $[-1\,;3]$.
b. $f(x)=(1-x)(e^x-4)$ sur $[0\,;5]$.

27 a. $f(x)=(1-2e^x)(e^x-2)$ sur $[-2\,;2]$.
b. $f(x)=e^{2x}-5e^x$ sur $[0\,;2]$.

Conseil Penser à factoriser par e^x.

28 Preuves de cours

On rappelle que pour tout $a>0$ et $b>0$, on a :

$$\ln(a\times b)=\ln(a)+\ln(b).$$

Soit x et y des réels strictement positifs.

1 En utilisant $x\times\dfrac{1}{x}=1$, montrer que :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x).$$

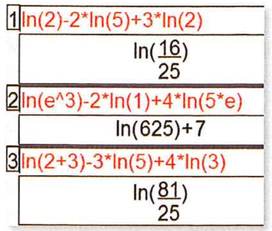
2 En utilisant $\dfrac{x}{y}=x\times\dfrac{1}{y}$, montrer que :

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y).$$

29 Justifier des résultats

1 Justifier que :
a. $\ln(25e)=2\ln(5)+1$.
b. $\ln(e^2)+4\ln(1)=2$.
c. $\ln(e^{-1})+\ln(e^3)=2$.

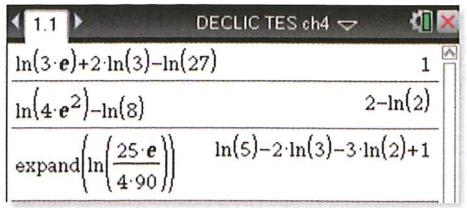
2 Justifier les résultats obtenus ci-contre à l'aide du logiciel *Xcas*.



```
1 ln(2)-2*ln(5)+3*ln(2)
                 ln(16/25)
2 ln(e^3)-2*ln(1)+4*ln(5*e)
                 ln(625)+7
3 ln(2+3)-3*ln(5)+4*ln(3)
                 ln(81/25)
```

30 Transformer une écriture

Justifier les résultats obtenus à l'aide de TI-Nspire™ :



$\ln(3\cdot e)+2\cdot\ln(3)-\ln(27)$	1
$\ln(4\cdot e^2)-\ln(8)$	$2-\ln(2)$
$\text{expand}\left(\ln\left(\dfrac{25\cdot e}{4\cdot 90}\right)\right)$	$\ln(5)-2\cdot\ln(3)-3\cdot\ln(2)+1$

31 Écrire à l'aide d'un seul logarithme

$A=2\ln(10)-3\ln(5)+\ln(2)$.
$B=7\ln(4)-3\ln(2)-4\ln(8)$.
$C=\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)-4\ln(2)+\ln(16)$.
$D=1+3\ln(2)$.

32 Logarithme d'une racine carrée

1 Soit un réel x strictement positif.
En utilisant $\sqrt{x}\times\sqrt{x}=x$, montrer que :

$$\ln(\sqrt{x})=\frac{1}{2}\ln(x).$$

2 Écrire sans racine carrée :
$E=3\ln(\sqrt{2})-\ln\left(\sqrt{8}\right)$; $F=\ln(\sqrt{e})-3\ln\left(e^4\right)$;

33 Calculs d'images

1 Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x\ln(x)$.
Calculer $f(e)$, $f(e^2)$, $f(e^3)$ et $f\left(\sqrt{e}\right)$.

2 De même pour la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x)=2x-\ln(x).$$

34 Étude d'une fonction exponentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

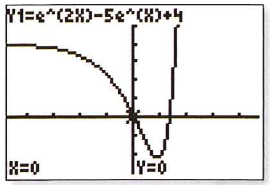
$$f(x)=e^{2x}-5e^x+4.$$

1 Montrer que, pour tout réel x :

$$f'(x)=e^x(2e^x-5).$$

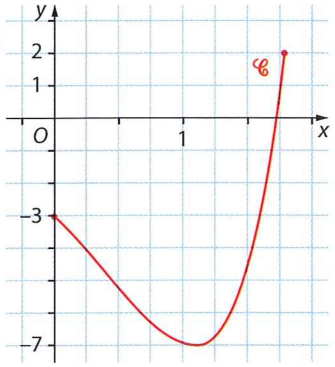
2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2e^x-5\geqslant 0$.

3 En déduire le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.



35 Variations et équations

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\ln(6)]$ par :
$f(x)=e^{2x}-6e^x+2$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f, ci-contre.



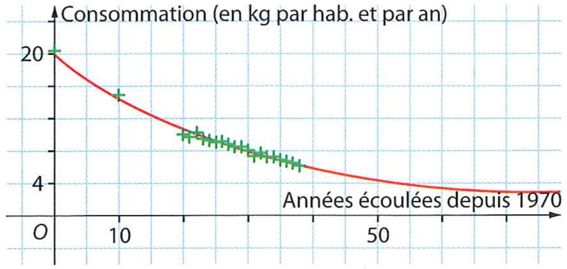
1 a. Calculer $f'(x)$. Factoriser le résultat par e^x.
b. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\,;\ln(6)]$.

2 Préciser les images par f de $\ln(3)$ et $\ln(6)$.
Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;\ln(6)]$.

3 Soit k un réel. Déterminer, selon la valeur de k, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=k$ dans l'intervalle $[0\,;\ln(6)]$.

36 Modèle exponentiel de la consommation de sucre

En France, depuis 1970, la consommation de sucre en moyenne par habitant, en kg par an, peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :
$f(x)=20\,e^{-0{,}03x}$, où x est le rang de l'année $1970+x$.



Source : INSEE.

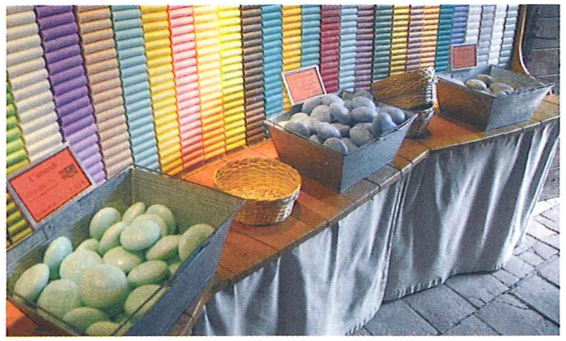
1 Calculer $f(50)$. En donner une interprétation.

2 Justifier le sens de variation de cette fonction f.

3 a. Résoudre l'équation $f(x)=5$.
b. En utilisant le sens de variation de la fonction f, résoudre une inéquation $f(x)\leqslant 5$.
c. En déduire l'année où la consommation moyenne de sucre deviendra inférieure à 5 kg par personne et par an.

37 Offre, demande et prix d'équilibre

Avant de lancer un nouveau savon, une entreprise produisant des savons réalise une étude de marché auprès de ses revendeurs et de leurs clients pour connaître l'offre et la demande, suivant le prix unitaire x de ce savon, compris entre 1 € et 7 €.



L'offre $f(x)$ est la quantité de savon, en millier, que les revendeurs pensent proposer au prix de x euros.
On estime que $f(x)=10\,e^{0{,}65x}$, où $x\in[1\,;7]$.
La demande $g(x)$ est la quantité de savon, en millier, que leurs clients sont prêts à acheter au prix de x euros.
On estime que $g(x)=600\,e^{-0{,}35x}$, où $x\in[1\,;7]$.

1 Déterminer le prix unitaire, arrondi au centime d'euro près, qui génère :
a. une offre de 200 mille savons ;
b. une demande de 200 000 savons.

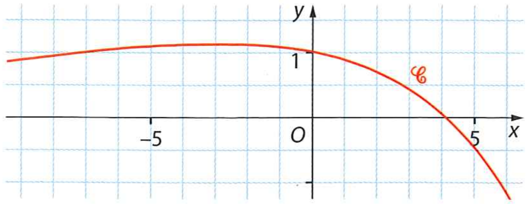
2 On appelle **prix d'équilibre du marché** le prix pour lequel l'offre est égale à la demande.
a. Déterminer le prix d'équilibre.
Donner le résultat arrondi au centime d'euro près.
b. Si on propose et vend le savon au prix d'équilibre, déterminer la quantité offerte et demandée.
Arrondir le résultat à mille savons près.

38 Différence de deux exponentielles

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3\,e^{0,1x} - 2\,e^{0,2x}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.



1 Montrer que résoudre l'équation $f(x) = 0$ équivaut à résoudre $e^{0,1x} = 1,5$. Déterminer la solution.

2 **a.** Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.

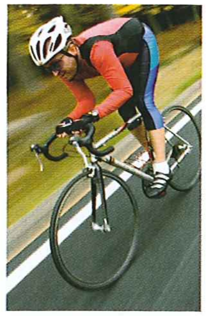
b. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet comme unique solution $x_0 = 10\ln(0,75)$.

c. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.
En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

3 Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4 **Question ouverte**
Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion. On précisera ses coordonnées exactes.

39 Vitesse d'un cycliste



Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue.
On suppose que sa vitesse $v(t)$ à l'instant t, où t est en seconde et $v(t)$ en m/s, est égale à :

$$v(t) = 30 - 30\,e^{-0,1t}, \text{ où } t \geqslant 0.$$

1 Étudier le sens de variation de la fonction v sur l'intervalle $[\,0\,;+\infty\,[$. Interpréter le résultat.

2 L'**accélération** d'un mouvement est la dérivée de la vitesse. Justifier que l'accélération v' est décroissante et positive sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

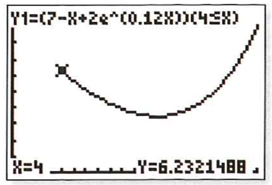
3 On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée à partir de $t = 10\ln(3)$.
Déterminer, à la seconde près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

40 Coût moyen exponentiel

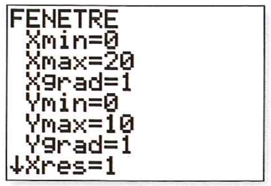
Une entreprise produit, chaque jour, entre 4 et 20 tonnes de sel pour l'industrie.
On admet que, lorsque x tonnes de sel sont produites, le coût moyen de la production, en centaine d'euros par tonne de sel, est :

$$f(x) = 7 - x + 2\,e^{0,12x}, \text{ avec } 4 \leqslant x \leqslant 20.$$

La courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f est obtenue ci-dessous dans la fenêtre indiquée.



```
Y1=(7-X+2e^(0.12X))(4≤X)
X=4 ........Y=6.2321488
```



```
FENETRE
 Xmin=0
 Xmax=20
 Xgrad=1
 Ymin=0
 Ymax=10
 Ygrad=1
↓Xres=1
```

1 **a.** Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.

b. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ dans $[\,4\,;20\,]$.
Donner la valeur exacte de la solution x_0, puis sa valeur arrondie à 10^{-1} près.

c. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[\,4\,;20\,]$.

2 **a.** Dresser le tableau de variations de f sur $[\,4\,;20\,]$.

b. Déterminer la quantité de sel à produire, arrondie à 0,1 tonne près, pour que le coût moyen de production d'une tonne de sel soit minimal. Déterminer alors ce coût moyen, arrondi à 0,1 euro par tonne près.

3 **a.** Justifier que l'équation $f(x) = 7$ admet une unique solution α dans $[\,4\,;20\,]$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie de α à 0,001 près.

c. Déterminer la masse de sel, au kg près, qu'il faut produire pour que le coût moyen de production d'une tonne de sel soit de 700 euros.

41 Fonction de satisfaction

Un parc d'attraction fait une étude de marché sur un nouveau manège à sensations. On mesure le niveau de satisfaction des usagers par la **fonction de satisfaction** f définie sur $[\,0\,;10\,]$ par $f(x) = (0,4 - 0,2x)\,e^{0,5x} + 2,5x^2$, où x est la durée, en minute, de l'attraction.

⊕ Voir exercice 38 page 54

On définit la **fonction envie** v comme étant la dérivée f' de la fonction de satisfaction. Ainsi, $v = f'$.

1 **a.** Calculer $v(x)$ et montrer que, pour tout réel x dans $[\,0\,;10\,]$, on peut écrire :

$$v(x) = x \times (5 - 0,1\,e^{0,5x}).$$

b. Résoudre l'inéquation $5 - 0,1\,e^{0,5x} \geqslant 0$ dans $[\,0\,;10\,]$.

c. On dit qu'**il y a envie** lorsque v est positive. Sinon, on dit qu'**il y a rejet**. Sur quel intervalle y a-t-il envie ?

2 **a.** Dresser le tableau de variations de la fonction de satisfaction f sur l'intervalle $[\,0\,;10\,]$.

b. En déduire la durée pour laquelle le niveau de satisfaction est maximal.
On donnera le résultat arrondi à 0,1 minute près.

c. Peut-on atteindre un niveau de satisfaction de 100 ? Justifier.

2 Étude de la fonction ln : $x \mapsto \ln(x)$

42 QCM

Pour chaque question, donner la bonne réponse.

1 L'ensemble solution de $\ln(x) \leqslant 0$ est :
a. $]-\infty\,;0\,]$. **b.** $]-\infty\,;1\,]$. **c.** $]\,0\,;1\,]$.

2 L'ensemble solution de $\ln(x) + 2 \geqslant 0$ est :
a. $[-e^2\,;+\infty\,[$. **b.** $[\,e^2\,;+\infty\,[$. **c.** $\left[\dfrac{1}{e^2}\,;+\infty\right[$.

3 L'ensemble solution de $2\ln(x) - 1 < 0$ est :
a. $\left]0\,;\sqrt{e}\right[$. **b.** $]\,0\,;e^2\,[$. **c.** $\left]0\,;\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$.

43 Vrai ou faux ?

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier par un calcul.

1 Si $f(x) = 3x \times \ln(x)$, alors $f'(x) = 3$.

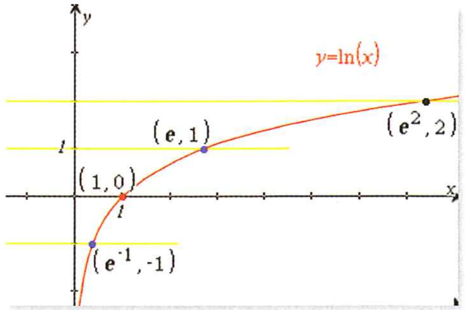
2 Si $f(x) = x \times (1 - \ln(x))$, alors $f'(x) = -\ln(x)$.

3 Si $f(x) = \dfrac{3\ln(x)}{x}$, alors $f'(x) = \dfrac{3(1 - \ln(x))}{x^2}$.

4 Si $f(x) = (\ln(x))^2 - \ln(x)$, alors $f'(x) = \dfrac{2\ln(x) - 1}{x}$.

44 Signe de ln(x)

La courbe de la fonction ln est construite sur un logiciel dynamique, en précisant quelques points à ordonnées entières.



En utilisant ce graphique, dresser le tableau de signes de chacune des expressions suivantes :
$f(x) = \ln(x)$; $g(x) = \ln(x) - 1$; $h(x) = \ln(x) - 2$.

Pour les exercices 45 à 47

Résolution d'inéquations

Résoudre les inéquations données.
On pourra reprendre les équations en page 109.

45 **a.** $\ln(x) + 2 \geqslant 0$. **b.** $\ln(x) - 1 < 0$.

46 **a.** $2\ln(x) + 1 \leqslant 0$. **b.** $2\ln(x) + 1 \geqslant 0$.

47 **a.** $\ln x + 4 \geqslant 0$. **b.** $\ln x(2 - \ln x) \geqslant 0$.

Pour les exercices 48 à 53

Calculs de dérivées

Dériver les fonctions données sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

48 **a.** $f(x) = \ln(x) + x$. **b.** $g(x) = x \times \ln(x) + 3$.

49 **a.** $f(x) = 3x^2 - 4\ln(x)$.
b. $g(x) = (\ln(x) + 1)(\ln(x) - 2)$.

50 **a.** $f(t) = (\ln(t))^2 - 3\ln(t) + 1$.
b. $g(x) = x^2\ln(x)$.

51 **a.** $f(q) = \dfrac{\ln(q) + 1}{q}$. **b.** $g(x) = \dfrac{5(\ln(x) + 2)}{x}$.

52 **a.** $f(x) = x + 3 - 4\ln x$.
b. $g(x) = (2x - 1)(\ln x + 1)$.

53 **a.** $f(x) = 0,5(\ln x)^2 - x$.
b. $g(x) = (2\ln x + 1)(1 - \ln x)$.

Pour les exercices 54 à 58

Étude des variations

Dresser le tableau des variations de la fonction f, définie sur l'intervalle donné, après avoir calculé la dérivée et étudié le signe de la dérivée.
On précisera les valeurs aux bornes de l'intervalle, exactes, puis arrondies à 3 chiffres.

54 $f(x) = 2x - \ln(x)$ sur $[\,1\,;9\,]$.

55 $f(x) = \ln(x) + \dfrac{2}{x}$ sur $[\,1\,;5\,]$.

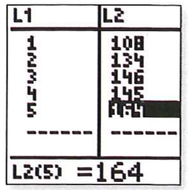
56 $f(x) = x^3 - 3\ln(x)$ sur $\left[\dfrac{1}{10}\,;2\right]$.

Rappel $x^3 - a^3$ est du signe de $x - a$.

57 $f(x) = x \times \ln(x) - x$ sur $\left[\dfrac{1}{100}\,;10\right]$.

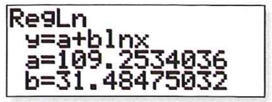
58 $f(x) = 2x \times \ln(x)$ sur $\left[\dfrac{1}{2e}\,;e^2\right]$.

59 Étudier un modèle logarithmique



```
L1       L2
 1       108
 2       134
 3       146
 4       145
 5       164
 ------  ------
L2(5) =164
```

Les seniors (65 ans et plus) sont de plus en plus actifs en France depuis quelques années.
Entre 2006 et 2010, le nombre de seniors actifs, en millier, est entré dans la liste 2 ci-contre.
On considère le rang x de l'année $2005+x$ et $f(x)$ le nombre de seniors actifs, en millier.



```
RegLn
 y=a+blnx
 a=109.2534036
 b=31.48475032
```

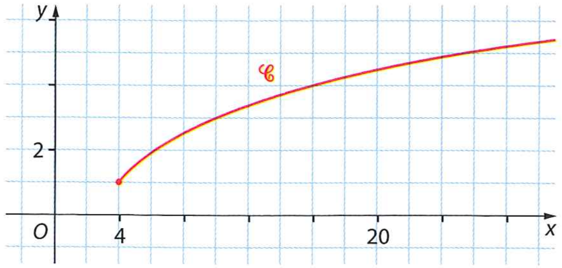
Les fonctionnalités de la calculatrice donnent un modèle logarithmique, sous forme d'une fonction définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par : $f(x)=a+b\ln(x)$.
Indiquer la fonction obtenue à l'aide de la calculatrice, où a et b sont arrondis à 0,1 près.
Déterminer le sens de variation et faire une prévision pour l'année 2015.

60 Étudier une consommation

Dans le cadre d'études sur la gestion des ressources naturelles dans un pays en voie de développement, on s'intéresse à la quantité de bois de chauffe consommée quotidiennement pendant la saison sèche.
On modélise cette quantité de bois, en kg, consommée quotidiennement pour chauffer une pièce de x m^2 par la fonction f définie sur $[4\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=2{,}15\ln(x)-1{,}98\,.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.



1 **a.** Étudier les variations de la fonction f sur $[4\,;+\infty[$.
Interpréter économiquement le résultat.
b. Étudier la concavité de la fonction. Interpréter.
2 **a.** Résoudre l'équation $f(x)=3$ pour $x\geqslant 4$.
Préciser la valeur exacte de la solution, puis en donner un encadrement à 0,1 près.
b. En déduire la surface de la pièce où la consommation quotidienne de bois de chauffe est de 3 kg.
Vérifier sur le graphique.
3 Déterminer algébriquement la surface maximale de la pièce, à 0,1 m^2 près, pour que la consommation ne dépasse pas 5 kg de bois par jour.

61 Autre modèle pour la consommation de sucre

Comme la consommation de sucre en France présente une décroissance ralentie (voir exercice **36** page 117), on peut penser à la modéliser par :
$f(x)=a-b\ln(x)$, où a et b sont des nombres positifs.
1 Soit la fonction f définie sur $[5\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=29{,}7-6{,}4\ln(x)\,.$$

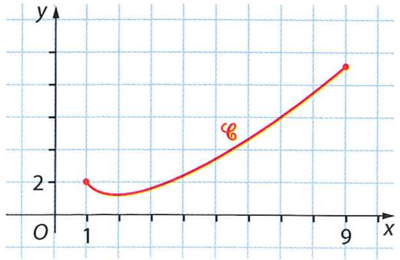
a. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f.
b. Calculer la dérivée seconde $f''(x)$.
Justifier que le modèle est bien une fonction à décroissance ralentie. **Voir chapitre 2 page 49**
2 Résoudre l'équation $f(x)=5$. *Donner la valeur approchée du résultat à l'unité près, par excès.*
3 La consommation moyenne de sucre est modélisée par $f(x)$, où x est le rang de l'année $1970+x$.
$f(x)$ est en kilo par habitant et par an.
a. Interpréter le résultat trouvé en **2**.
b. Justifier que ce modèle n'est plus valable mathématiquement en 2074.

62 Étudier la convexité d'une fonction

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;9]$ par :

$$f(x)=2x-4\ln(x)\,.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.



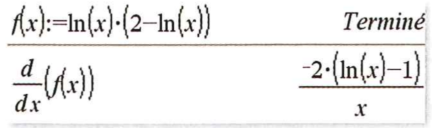
1 En utilisant le graphique, conjecturer la convexité de la fonction f sur $[1\,;9]$.
2 **a.** Calculer $f'(x)$, étudier le signe de $f'(x)$.
b. En déduire les variations de f sur $[1\,;9]$.
On précisera les valeurs exactes de la fonction aux bornes de l'ensemble de définition.
3 **a.** Justifier que pour tout réel x de $[1\,;9]$, la dérivée seconde de f en x est : $f''(x)=\dfrac{4}{x^2}$.
b. La fonction f est-elle convexe ou concave sur l'intervalle $[1\,;9]$?
4 **a.** On désigne par T la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse e.
Déterminer l'équation réduite de la droite T.
b. En utilisant un résultat précédent, préciser la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite T.

63 Étude d'une fonction-produit

On considère la fonction f définie sur $[0{,}5\,;8]$ par :

$$f(x)=(\ln x)\,(2-\ln x)\,.$$

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
1 On a obtenu l'expression de sa dérivée, par calcul formel :



$f(x):=\ln(x)\cdot(2-\ln(x))$	*Terminé*
$\dfrac{d}{dx}(f(x))$	$\dfrac{^-2\cdot(\ln(x)-1)}{x}$

a. Justifier par calcul le résultat obtenu.
b. Résoudre l'inéquation $\ln x-1\geqslant 0$.
c. En déduire le tableau de signes de $f'(x)$, puis le tableau de variations de f sur $[0{,}5\,;8]$.
d. Donner les valeurs aux bornes, arrondies à 10^{-2} près.
2 Résoudre l'équation $f(x)=0$ dans $[0{,}5\,;8]$.
On donnera la valeur exacte de chaque solution.
En donner une interprétation graphique.
3 Déterminer l'équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.

64 Fonction définie sur $[\mathrm{e}^{-1}\,;\mathrm{e}]$

La fonction f est définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}}\,;\mathrm{e}\right]$ par :

$$f(x)=x^2\ln x\,.$$

1 Montrer que, pour tout réel x de I, on a :

$$f'(x)=x(2\ln x+1)\,.$$

2 **a.** Résoudre dans I l'inéquation $2\ln x+1\geqslant 0$.
b. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur I.
3 **a.** Calculer les valeurs exactes de :

$$f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right);\quad f\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)\quad \text{et}\quad f(\mathrm{e})\,.$$

b. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

65 Convexité

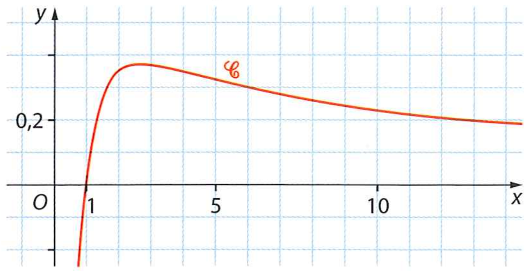
On considère la fonction f définie sur $[1\,;12]$ par :

$$f(x)=4-x+3\ln(x)\,.$$

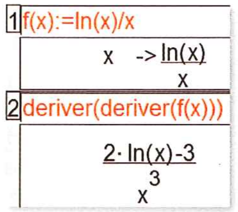
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
1 **a.** Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.
b. Étudier le signe de $f'(x)$.
2 Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;12]$. Préciser les valeurs arrondies des extrema à 0,1 près.
3 **a.** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ traverse une seule fois l'axe des abscisses sur $[1\,;12]$.
b. En déduire le plus petit intervalle $[a\,;b]$ de bornes entières, tel que la courbe $\mathscr{C}$ est située au-dessus de l'axe des abscisses sur $[a\,;b]$.
4 **a.** Calculer la dérivée seconde $f''(x)$.
b. Montrer que $f''(x)$ garde un signe constant.
c. En déduire la convexité de la fonction f.

66 Point d'inflexion

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.



1 **a.** Calculer $f'(x)$.
Justifier que $f'(x)$ a le même signe que $1-\ln x$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.
2 **a.** La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle une tangente horizontale ? Si oui, en quel point ?
b. Par lecture graphique la courbe $\mathscr{C}$ a-t-elle un point d'inflexion ?
3 On a obtenu ci-contre l'expression de la dérivée seconde $f''(x)$. En utilisant le résultat obtenu, admis, justifier la réponse faite en **2** **b.**



```
1 f(x):=ln(x)/x
        x  -> ln(x)
                 x
2 deriver(deriver(f(x)))
          2· ln(x)-3
              3
             x
```

67 Position relative

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\ln x-x+1\,.$$

1 Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction ln au point d'abscisse 1.
2 Étudier les variations de la fonction f.
Montrer que la fonction f admet un maximum.
En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
3 En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

68 Position relative

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2+2x-1-4\ln x$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
1 **a.** Montrer que, sur $]0\,;+\infty[$, on peut écrire :

$$f'(x)=\frac{2x^2+2x-4}{x}\,.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
En déduire le tableau de variations de f sur $]0\,;+\infty[$.
c. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.
2 **a.** Étudier la convexité de f sur $]0\,;+\infty[$.
b. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.
Préciser la position relative des courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

3 Équations avec exponentielle

69 Vrai ou faux ?

1 Le gouvernement d'un pays augmente la taxe sur le tabac de 20 % en cinq ans. L'augmentation annuelle est d'environ 4 %, à 0,1 point de % près.

2 Entre 2005 et 2011, le prix du gaz a augmenté de 65 %. Cela correspond à une augmentation annuelle d'environ 10,8 %.

3 La consommation moyenne en vin AOC en France est passée de 26,1 L par personne en 2000 à 22,7 L par personne en 2008. Cela correspond à une diminution annuelle d'environ 1,7 %.

70 Résolution d'équations

Résoudre dans $[0\,;+\infty[$.

a. $x^{10}=2$. **b.** $(1+x)^4=1{,}5$.

c. $x^3=0{,}5$. **d.** $(1-x)^7=0{,}4$.

On donnera les solutions exactes, puis arrondies à 0,001 près.

71 Taux moyen d'augmentation

1 La consommation d'eau minérale en bouteille en France est passée de 133,7 L par personne en 1998 à 151,1 L par personne en 2008.

a. Calculer le coefficient multiplicateur global sur ces 10 années, avec 4 chiffres après la virgule.

b. Justifier que le taux d'évolution annuel moyen t vérifie :

$$(1+t)^{10}=\frac{151{,}1}{133{,}7}.$$

c. Déterminer t en pourcentage. *Arrondir à 0,1 près.*

d. Si ce taux se maintient après 2008, estimer la consommation en eau minérale en 2015.

2 Mêmes questions pour la consommation de soins médicaux en France, passée de 64,7 milliards d'euros en 1998, à 176 milliards en 2008.

72 Taux moyen de diminution

La consommation de pain en France est passée de 61,7 kg par an et par habitant en 1990 à 51,7 kg en 2008.

1 **a.** Calculer la variation absolue et la variation relative sur ces 18 ans.

b. Déterminer le taux moyen annuel de diminution de la consommation de pain entre 1990 et 2008.

2 **a.** Par interpolation, estimer la consommation de pain en 2003, si ce taux de diminution était resté constant.

b. En réalité, la consommation de pain en 2003 était de 57,6 kg par personne. Le résultat obtenu en **2** **a.** a-t-il moins de 5 % d'erreur par rapport à la valeur réelle ?

73 Taux équivalents

Soit un capital placé à intérêts composés au taux annuel t.

Le taux mensuel équivalent t' est tel que :

$$(1+t')^{12}=1+t',\ \text{c'est-à-dire}\ 1+t'=(1+t)^{1/12}.$$

1 **a.** Calculer le taux mensuel équivalent à un taux annuel de 4,5 %. *Donner le résultat arrondi à 10^{-3} % près.*

b. En fin 2010, le taux légal d'usure pour un prêt à la consommation inférieur à 1 524 € est de 20,64 % par an. Calculer le taux mensuel équivalent.

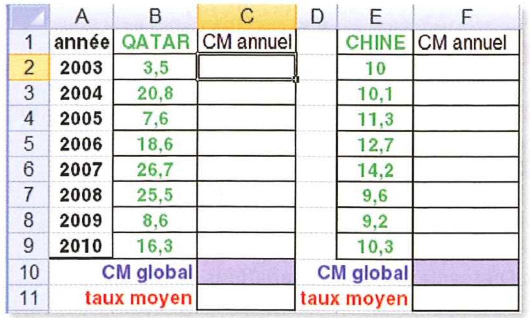
2 En comptabilité, on considère qu'une année dure 360 jours. Le taux maximal pour un découvert en banque est de 19,15 % en 2011. Calculer le taux équivalent journalier pour ce taux de découvert.

3 Déterminer le taux annuel équivalent à un taux d'intérêts semestriel de 10 %.

74 Taux de croissance du PIB TICE

De 2003 à 2010, le Qatar et la Chine ont connu une forte croissance de leur PIB, en particulier en 2007.

Le tableau suivant indique le taux de croissance annuel, en %, dans ces deux pays sur ces huit années :



	A	B	C	D	E	F
1	année	QATAR	CM annuel		CHINE	CM annuel
2	2003	3,5			10	
3	2004	20,8			10,1	
4	2005	7,6			11,3	
5	2006	18,6			12,7	
6	2007	26,7			14,2	
7	2008	25,5			9,6	
8	2009	8,6			9,2	
9	2010	16,3			10,3	
10		CM global			CM global	
11		taux moyen			taux moyen	

1 **a.** Indiquer la formule à écrire en C2 pour obtenir le coefficient multiplicateur du PIB sur 2003 au Qatar.

b. Par recopie vers le bas, préciser la valeur en C9.

2 Parmi les formules suivantes, indiquer celle à saisir en C10 pour calculer le coefficient multiplicateur global et donner le résultat.

a. =SOMME(B2:B9) **b.** =PRODUIT(C2:C9)

c. =SOMME(C2:C9) **d.** =PRODUIT(B2:B9)

3 Parmi les formules suivantes, indiquer celle à saisir en C11 pour calculer le taux moyen.

a. =(C10 – 1)*100^(1/8) **b.** =C10^(1/8)-1*100

c. =(C10^(1/8)-1)*100 **d.** =(C9/C2)^(1/8)*100

4 **a.** Calculer le taux de croissance annuel moyen du PIB au Qatar, puis en Chine. Comparer.

b. En 2003, le montant du PIB du Qatar était de 23,5 milliards de dollars et celui de la Chine de 1 641 milliards de dollars. Calculer le montant du PIB en 2010 dans ces deux pays.

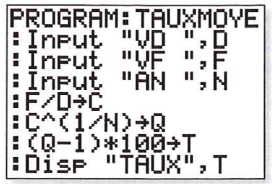
75 Calcul du taux moyen ALGO

On désire calculer le taux d'évolution moyen annuel entre deux dates à l'aide d'un algorithme.

Par exemple, les émissions de CO_2 par habitant en Chine sont passées de 2,88 tonnes en 2002 à 4,96 tonnes en 2007.

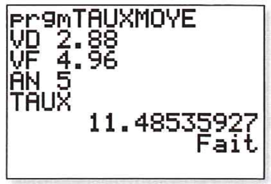
On donne le programme :

- **Sur TI™ :**



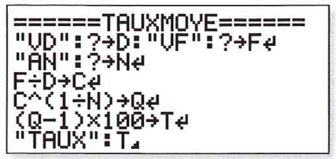
```
PROGRAM:TAUXMOYE
:Input "VD ",D
:Input "VF ",F
:Input "AN ",N
:F/D→C
:C^(1/N)→Q
:(Q-1)*100→T
:Disp "TAUX",T
```

- **Et son utilisation :**



```
prgmTAUXMOYE
VD 2.88
VF 4.96
AN 5
TAUX
         11.48535927
                Fait
```

- **Sur Casio :**



```
======TAUXMOYE======
"VD":?→D:"VF":?→F↵
"AN":?→N↵
F÷D→C↵
C^(1÷N)→Q↵
(Q-1)×100→T↵
"TAUX":T◢
```

a. Indiquer ce que représente les variables C, Q et T dans ce programme.

b. Quel est le taux de croissance annuel des émissions de CO_2 en Chine entre 2002 et 2007 ?

c. Comparer à l'Arabie Saoudite, avec 14,48 tonnes en 2003 pour atteindre 15,77 tonnes en 2007.

76 Résolution d'inéquations dans ℝ

Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes :

a. $3\times1{,}5^x\geqslant 12\,000$. **b.** $1-0{,}5^x\geqslant 0{,}999$.

On donnera si nécessaire une valeur arrondie avec 3 chiffres significatifs du seuil.

77 Résolution d'inéquations dans ℕ

Dans chaque cas, déterminer le plus petit entier n vérifiant l'inéquation donnée.

a. $0{,}8^n\leqslant 0{,}0001$. **b.** $10\times1{,}1^n\geqslant 5\,000$.

c. $1-0{,}4^n\geqslant 0{,}999$. **d.** $50\times2^n\geqslant 10^6$.

78 Recherche de seuil ALGO

On désire résoudre l'inéquation $q^n>k$ ou $q^n<k$, où k et q sont strictement positifs et n est un entier.

Sur TI™ :

```
PROGRAM:SEUIL
:Prompt Q,K
:ln(K)/ln(Q)→M
:ent(M)+1→N
:If Q>1
:Then
:Disp "SEUIL",N
:Else
:Disp "SEUIL,SEN
S INVERSE",N
```

Pour info

ent(M) donne l'entier immédiatement inférieur ou égal à M.

1 Résoudre dans ℕ les deux inéquations « à la main ».

a. $1{,}04^n>2$. **b.** $0{,}99^n<0{,}1$.

2 **a.** Faut-il faire un second algorithme pour les inéquations où $q\in\,]0\,;1[$? Justifier.

b. Résoudre les inéquations en **1** à l'aide de ce programme.

c. Déterminer l'année à partir de laquelle un capital de 3 000 €, placé en 2000 à intérêts composés au taux annuel de 4 %, dépasse 5 000 €.

79 Réaliser des prévisions

La capacité mondiale de production d'énergie éolienne était de 194,4 GW en 2010. Entre 2009 et 2010, cette capacité a augmenté de 22,5 % (Source : GWEC). On suppose que cette augmentation va se poursuivre de la même façon dans les années à venir.

1 Calculer la capacité mondiale en 2009 et celle prévue en 2011, suivant cette hypothèse.

2 On note u_n la capacité mondiale en $2010+n$, en GW. Donc $u_0=194{,}4$.

a. Préciser la nature de la suite (u_n) et sa raison.

b. En déduire u_n en fonction de n.

3 **a.** Déterminer le plus petit entier p tel que :

$$1{,}225^p>\frac{500}{194{,}4}.$$

b. En déduire à partir de quelle année, on peut prévoir que la capacité mondiale de production d'énergie éolienne dépassera 500 GW.

4 En Chine, la capacité de production d'énergie éolienne installée par an est passée de 25,8 GW en 2009 à 42,3 GW en 2010. On suppose que le taux d'évolution se maintient dans les années à venir. On note v_n la capacité installée en Chine en $2010+n$, en GW.

a. Montrer que $v_n=42{,}3\times1{,}64^n$.

b. Montrer que, pour tout entier n, résoudre l'inéquation $v_n>u_n$ revient à résoudre l'inéquation :

$$\frac{42{,}3}{194{,}4}\left(\frac{1{,}64}{1{,}225}\right)^n>1.$$

c. Résoudre cette inéquation. En donner une interprétation concrète si les évolutions entre 2009 et 2010 dans le monde et en Chine se maintiennent dans les années à venir.

d. **Question ouverte**

Que penser de ces deux modèles ?

80 Seuil en probabilité

Soit un entier naturel n non nul. On lance n fois un dé bien équilibré, les lancers étant supposés indépendants deux à deux.

On note P_n la probabilité d'obtenir pour la première fois le nombre 4 au n-ième lancer.

1 Quelle est la nature de la suite (P_n) ? Justifier.

2 Calculer la limite de la suite (P_n). Interpréter.

3 Déterminer le plus petit entier n tel que $\mathrm{P}_n<0{,}0001$.

Accompagnement personnalisé

Dans l'énoncé	Comment faire ou rédiger ?
Résoudre de façon exacte une équation ou inéquation avec e^x.	Dans le chapitre 3, certaines équations avec e^x ont été résolues de façon approchée. Pour résoudre de façon exacte, on **isole l'exponentielle** quand cela est possible et on **applique la fonction ln**, strictement croissante.
Saisir une expression avec ln sur logiciels ou calculatrice.	Lorsque la fonction ln porte sur un seul nombre, on peut écrire sans parenthèses : $\ln(x) = \ln x$. **Note** Sur tous les logiciels, les **parenthèses sont obligatoires.** Les calculatrices TI™ écrivent « ln(… » : ne pas oublier de fermer la parenthèse.
Étudier le signe d'une expression $f(x)$ avec $\ln x$ ou $\ln(x)$.	• Si l'expression $f(x)$ ne présente qu'une seule fois la variable x, donc **un seul $\ln(x)$**, on résout $f(x) \geqslant 0$ en isolant $\ln(x)$, puis on **applique la fonction exp**, strictement croissante. • Si x apparaît plusieurs fois, on peut rarement résoudre de façon exacte l'équation $f(x) = 0$. La résolution est alors guidée : on étudie les **variations de la fonction *f*** pour rechercher un **extremum** et appliquer la **propriété des valeurs intermédiaires.** **Voir chapitre 2 page 46**
Résoudre une équation ou une inéquation dont l'inconnue est en exposant.	Lorsque l'inconnue est en exposant : • on isole l'exponentielle, $q^x = k$, avec k et q strictement positifs et $q \neq 1$; • on applique la fonction ln strictement croissante pour « descendre » l'exposant. $q^x = k \Leftrightarrow x \times \ln(q) = \ln(k) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(k)}{\ln(q)}$. **Attention** Pour les inéquations, $\ln(q)$ **est négatif** lorsque $q \in \left]0\,;1\right[$.
Rechercher un taux moyen d'évolution.	Si CM est le **coefficient multiplicateur global** sur *n* années, le **taux moyen** d'évolution annuel *t* est tel que : $(1+t)^n = \mathrm{CM} \Leftrightarrow 1 + t = \mathrm{CM}^{1/n} \Leftrightarrow t = \mathrm{CM}^{1/n} - 1$.

Exercice guidé

81 Une entreprise de sous-traitance fabrique des pièces pour l'industrie automobile. Sa production pour ce type de pièces varie entre 1 000 et 5 000 pièces par semaine, selon la demande. On suppose que toutes les pièces produites sont vendues. Le bénéfice unitaire, en euro, en fonction du nombre de pièces produites par semaine, est modélisé par la fonction *f* définie sur [1 ; 5] par : $f(x) = \dfrac{2\ln x + 1}{x}$,

avec *x* exprimé en millier de pièces et $f(x)$ exprimé en euro.

1 a. Montrer que, sur [1 ; 5], $f'(x) = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^2}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction *f* sur [1 ; 5]. On donnera les valeurs exactes aux bornes de l'intervalle de définition.

2 a. Pour quelle production, à 10 pièces près, le bénéfice unitaire est-il maximum ?

b. Quel est le bénéfice unitaire correspondant, à 0,01 € près ?

c. Calculer alors le bénéfice total réalisé.

3 Question ouverte

Pour quelle(s) production(s), arrondie(s) à l'unité près, obtient-on un bénéfice unitaire égal à 1,05 € ?

Aide

Lorsque l'on étudie une situation concrète, **faire très attention aux unités** et à la précision demandée pour les résultats.

1 D'après la forme de $f(x)$, utiliser la dérivée d'un quotient et le fait que **la dérivée de la fonction ln est la fonction inverse.**

Pour étudier le signe de la dérivée, préciser pourquoi il suffit d'étudier le signe de $1 - 2\ln x$ et donc de résoudre l'inéquation $1 - 2\ln x \geqslant 0$.

Respecter **l'intervalle de définition** donné.

2 Pour la recherche d'extremum, interpréter le tableau de variations obtenu.

Le bénéfice total est le produit du bénéfice unitaire par la quantité exprimée en unité.

3 On demande de résoudre l'équation $f(x) = 1{,}05$.

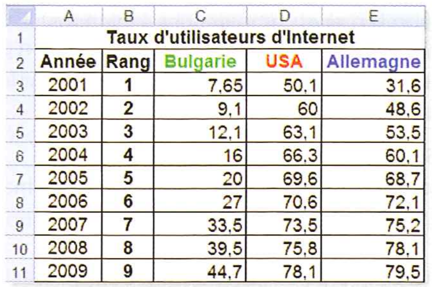
Or on ne peut pas résoudre de façon exacte. On doit utiliser la propriété des valeurs intermédiaires.

Accompagnement personnalisé

Revoir les outils de base

Savoir représenter une série chronologique sur tableur

82 Une série chronologique est donnée sur une feuille de calcul d'un tableur. On veut représenter le taux d'utilisateurs d'Internet par rapport à la population mondiale dans différents pays. Les taux sont en % .



	A	B	C	D	E
1	Taux d'utilisateurs d'Internet				
2	Année	Rang	Bulgarie	USA	Allemagne
3	2001	1	7,65	50,1	31,6
4	2002	2	9,1	60	48,6
5	2003	3	12,1	63,1	53,5
6	2004	4	16	66,3	60,1
7	2005	5	20	69,6	68,7
8	2006	6	27	70,6	72,1
9	2007	7	33,5	73,5	75,2
10	2008	8	39,5	75,8	78,1
11	2009	9	44,7	78,1	79,5

Source : Banque Mondiale.

a. Quelle formule écrire en cellule B3 et recopier vers le bas, pour obtenir le rang de l'année ?

b. Sélectionner la plage de cellules B2:E11 pour obtenir les trois nuages de points.

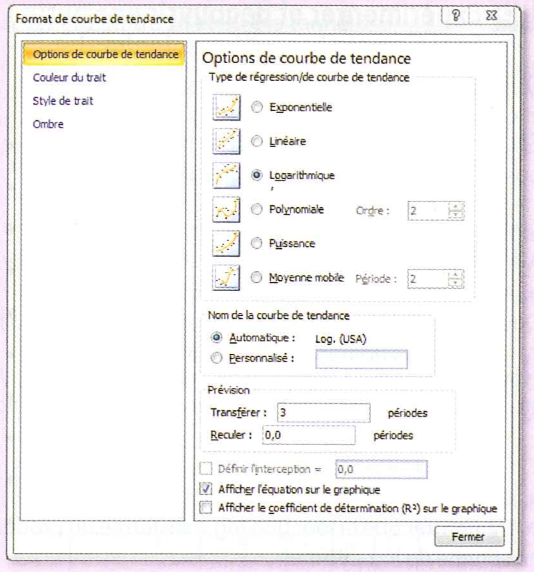
c. Par clic droit sur le nuage de points de la Bulgarie, ajouter une courbe de tendance.

Quel type de régression paraît adapté pour la Bulgarie ?

d. Quel type de régression choisir pour les USA ? pour l'Allemagne ?

Aide

On peut choisir une courbe de tendance (ou type de régression) linéaire ($y = \mathrm{A}x + \mathrm{B}$) ; exponentielle ($y = \mathrm{A}e^{\mathrm{B}x}$) ; logarithmique ($y = \mathrm{A}\ln(x) + \mathrm{B}$) ou polynômiale. Et faire afficher l'équation.



Options de courbe de tendance

Type de régression/de courbe de tendance

○ Exponentielle
○ Linéaire
● Logarithmique
○ Polynomiale Ordre : 2
○ Puissance
○ Moyenne mobile Période : 2

Nom de la courbe de tendance

● Automatique : Log. (USA)
○ Personnalisé :

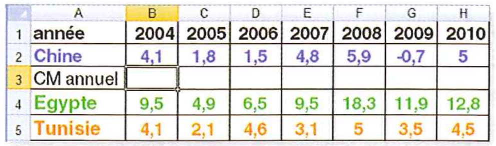
Prévision

Transférer : 3 périodes
Reculer : 0,0 périodes

☐ Définir l'interception = 0,0
☑ Afficher l'équation sur le graphique
☐ Afficher le coefficient de détermination (R²) sur le graphique

Savoir calculer un taux d'évolution global

83 Le taux d'inflation annuel, en %, dans quelques pays de 2004 à 2010 est donné ci-dessous :



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	année	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
2	Chine	4,1	1,8	1,5	4,8	5,9	-0,7	5
3	CM annuel							
4	Egypte	9,5	4,9	6,5	9,5	18,3	11,9	12,8
5	Tunisie	4,1	2,1	4,6	3,1	5	3,5	4,5

Source : Indexmundi.com

Calculer le taux d'évolution global de l'inflation en Chine, en Égypte, puis en Tunisie de 2004 à 2010.

Aide

Sur tableur, pour calculer le coefficient multiplicateur annuel pour la Chine, on saisit en B3 la formule =B2/100+1 , que l'on recopie vers la droite.

En cellule I3 , on peut utiliser =PRODUIT(B3:H3) et obtenir le taux d'évolution global en cellule J3 par =(I3−1)*100 .

Pour aller plus loin

84 Autre écriture de la fonction $x \mapsto q^x$

On rappelle une écriture vue en page 108 :

pour tout réel x, $q^x = e^{x\ln(q)}$, où $q > 0$.

1 On considère la fonction *f* telle que :

pour tout réel x, $f(x) = e^{x\ln(2)}$.

a. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de *f*.

b. Écrire $f(x)$ et sa dérivée en utilisant la forme q^x et préciser la base q.

c. Retrouver le sens de variation de la fonction *f* à partir de sa dérivée.

d. Reprendre les questions précédentes pour la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$g(x) = e^{x\ln(0{,}8)}$.

2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{x\ln(q)}$.
En utilisant la dérivée de f, étudier le sens de variation de la fonction $x:\mapsto q^x$ suivant les valeurs de q, avec $q>0$.

3 Soit h la fonction définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$h(x)=121{,}5\times 0{,}86^x.$$

a. Déterminer les réels a et b tels que $h(x)=e^{ax+b}$.
Arrondir a et b à 0,01 près.

b. Calculer la dérivée sous cette forme.

85 Expérimenter et découvrir une autre fonction : le logarithme décimal

1 Repérer la touche **log** de la calculatrice et calculer $\log(1)$, $\log(10)$, $\log(100)$, puis $\log(10^9)$.

2 On rappelle que l'**écriture scientifique** d'un nombre positif est $d\times 10^n$, où d est un nombre décimal de $[\,1\,;10\,[$ et n un entier relatif.

a. Écrire ces nombres sous forme scientifique :
$A=12{,}45$; $B=0{,}01245$; $C=124\,500$.

b. Appliquer la touche **log** à ces nombres.
Quelle semble être la relation entre $\log(d\times 10^n)$ et $\log(d)$?

c. Choisir deux nombres strictement positifs A et B.
Comparer $\log(A)+\log(B)$ et $\log(A\times B)$.

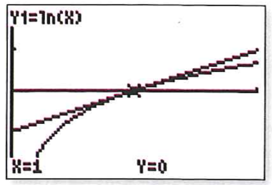
3 La fonction log est définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$\log(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

a. Calculer $\log(10^n)$, pour tout n entier relatif.

b. Démontrer que la fonction log transforme un produit en somme de logarithmes.

86 Approcher



On considère la fonction ln, sa représentation graphique $\mathscr{C}$ et la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 1.

1 **a.** Montrer que la tangente T a pour équation $y=x-1$.

b. Calculer $\ln(x)$ et $x-1$ pour : $x=0{,}8$; $x=0{,}9$; $x=1{,}1$ puis $x=1{,}2$.

2 Pour tout réel x proche de 1, dans $[\,0{,}75\,;1{,}3\,]$, on pose $f(x)=x-1-\ln(x)$.

a. Étudier les variations de la fonction f. Dresser le tableau de variations de f sur $[\,0{,}75\,;1{,}3\,]$, en précisantles valeurs aux bornes de l'intervalle, arrondies à 0,001 près.

b. Montrer que, pour tout réel x entre 0,75 et 1,3, la différence entre $\ln(x)$ et $x-1$ reste inférieure à 0,04.

3 On admet que, pour $x\approx 1$, alors $\ln(x)\approx x-1$.

a. En Ariège, en 2008, le nombre d'habitants était de 150 200. La population augmente chaque année de 1,3 %. En supposant que cette évolution se poursuit, exprimer la population $P(x)$ en $2008+x$.
Montrer que cette population peut s'écrire :

$$P(x)\approx 150\,200\,e^{0{,}013x}.$$

b. Pour la Loire-Atlantique, on modélise la population de l'année $2005+x$, en million, par :

$$L(x)=1{,}256\,e^{0{,}006x}.$$

Par lecture, donner le taux de variation annuel.
Vérifier par le calcul de $\dfrac{L(x+1)-L(x)}{L(x)}$.

87 Le repère semi-log

Pour représenter et comparer des évolutions exponentielles de la forme $y=A\times B^x$, où A et B sont des réels strictement positifs, on utilise souvent le repère semi-log.

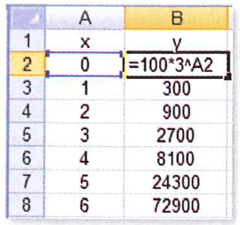
1 **a.** Soit $y=100\times 3^x$.
En appliquant la fonction log (logarithme décimal) vue à l'exercice **85**, montrer que :

$$\log(y)\approx 2+0{,}48x.$$

b. Montrer que, pour A et B strictement positifs :

$$y\approx A\times B^x \iff \log(y)\approx\log(A)+x\times\log(B).$$

2 On a tabulé cette expression à l'aide d'un tableur.

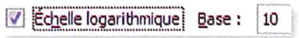


	A	B
1	x	y
2	0	=100*3^A2
3	1	300
4	2	900
5	3	2700
6	4	8100
7	5	24300
8	6	72900

a. Représenter cette évolution comme en **figure 1** ci-dessous.

⊖ Voir exercice 82

b. On clique droit sur l'axe des ordonnées et on coche



☑ Échelle logarithmique Base : 10

pour obtenir la **figure 2**.
Quelle propriété présente le nuage de points obtenu ?

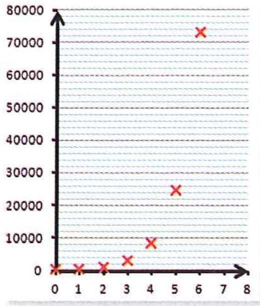


Figure 1

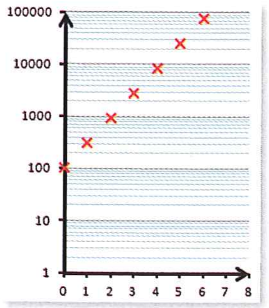


Figure 2

3 On veut comparer trois évolutions, à l'aide d'un repère semi-log :

$$f(x)=100\times 3^x\,;\qquad g(x)=1\,000\times 3^x$$
$$\text{et}\qquad h(x)=1\,000\times 2^x.$$

a. Pour chacune, exprimer le logarithme décimal en fonction de x, en arrondissant à 0,01 près, si nécessaire.

b. Justifier que les représentations de f et g sont parallèles dans un repère semi-log.

c. Les représentations de f et h vont-elle se couper sur l'intervalle $[\,0\,;6\,]$? Argumenter.

---

88 QCM

Pour chaque cas, donner la seule bonne réponse.

1 $\ln(e^3)-\ln\left(\dfrac{1}{e^2}\right)+2\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ est égal à :

a. 2. **b.** $\sqrt{e}$. **c.** 4.

2 L'équation $\ln(x^2)=0$ a pour solution(s) dans $\mathbb{R}$:

a. 0. **b.** e. **c.** -1 et 1.

3 La valeur arrondie à l'unité près de $\ln(2^{10\,000})$ est :

a. 6 931. **b.** 693. **c.** 69 315.

4 La fonction f est définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$f(x)=x(\ln x-1).$$

Alors l'expression de sa dérivée $f'(x)$ est :

a. $\ln x$. **b.** $\dfrac{1}{x}-1$. **c.** $\ln x-1$.

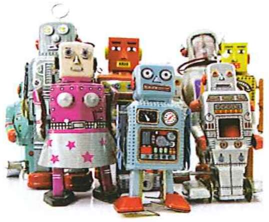
5 La fonction g est définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$g(x)=x+\ln(x).$$

Alors, la tangente à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 1 admet pour équation réduite :

a. $y=2x$. **b.** $y=2x+1$. **c.** $y=2x-1$.

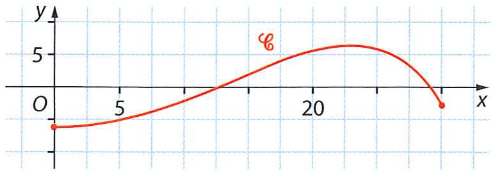
89 Exponentielle et plage de bénéfice



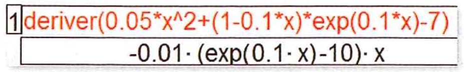
Une entreprise fabrique et vend des jouets, au maximum 3 000 par semaine.
On estime que le bénéfice hebdomadaire $f(x)$ réalisé, en millier d'euros, lors de la production et la vente de x dizaines de jouets est modélisé par :

$$f(x)=0{,}05x^2+(1-0{,}1x)\,e^{0{,}1x}-7,\ \text{où}\ 0\leqslant x\leqslant 30.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.



1 **a.** On a obtenu par calcul formel l'expression de la dérivée de f :



```
1 deriver(0.05*x^2+(1-0.1*x)*exp(0.1*x)-7)
  -0.01·(exp(0.1·x)-10)·x
```

Écrire l'expression $f'(x)$ obtenue en utilisant l'écriture $e^{0{,}1x}$. En calculant $f'(x)$, justifier le résultat obtenu.

b. Résoudre de façon exacte l'équation $e^{0{,}1x}=10$, puis l'inéquation $e^{0{,}1x}-10\geqslant 0$.

c. En déduire le tableau de variations de f sur $[\,0\,;30\,]$.

2 Déterminer la quantité de jouets à produire et à vendre pour réaliser un bénéfice maximum à l'unité près.
Préciser la valeur du bénéfice maximum à 10 € près.

3 **a.** Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$, pour $x\in[\,0\,;30\,]$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer des valeurs approchées à l'unité près des **points morts de la production**, c'est-à-dire les quantités associées à un bénéfice nul.

c. Quelle est la **plage de bénéfice** ?

90 Offre, demande et prix d'équilibre

Une entreprise vend du sable à maçonner dont le prix est compris entre 10 et 80 € la tonne.

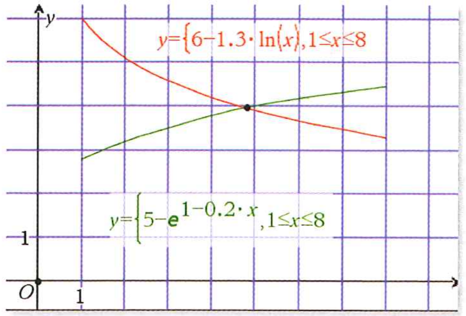
La **demande** $f(x)$ est la quantité de sable, en millier de tonnes, que les consommateurs sont prêts à acheter au prix de x dizaines d'euros la tonne.
On admet que :

$$f(x)=6-1{,}3\ln(x),\ \text{où}\ 1\leqslant x\leqslant 8.$$

L'**offre** $g(x)$ est la quantité de sable, en millier de tonnes, que les producteurs sont prêts à vendre au prix de x dizaines d'euros la tonne.
On admet que :

$$g(x)=5-e^{1-0{,}2x},\ \text{où}\ 1\leqslant x\leqslant 8.$$

On donne ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g sur l'intervalle $[\,1\,;8\,]$:



1 **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[\,1\,;8\,]$.

b. Résoudre l'inéquation $f(x)\leqslant 3{,}5$.
En déduire le prix à partir duquel la demande est inférieure ou égale à 3 500 tonnes, à 0,1 € près.

2 On appelle **prix d'équilibre du produit** le prix pour lequel l'offre et la demande sont égales.
On pose :

$$d(x)=f(x)-g(x)\ \text{pour}\ 1\leqslant x\leqslant 8.$$

a. Justifier que la fonction d est strictement décroissante sur l'intervalle $[\,1\,;8\,]$.

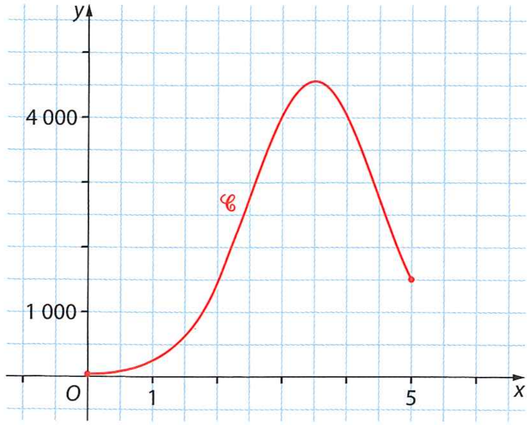
b. Montrer que l'équation $d(x)=0$ admet une unique solution x_0 sur $[\,1\,;8\,]$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie de x_0 à 0,01 près.

c. En déduire la valeur arrondie du prix d'équilibre, à l'euro près, et la demande correspondant au prix d'équilibre, à la dizaine de tonnes près.

91 Exponentielle et abonnement

Les ventes d'un journal dépendent en grande partie du nombre de ses abonnés.

Au cours des cinq dernières années, le nombre d'abonnés a suivi la courbe ci-dessous, où x est le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2007 :



1 Répondre aux questions suivantes avec la précision permise par le graphique.

a. Quel est le nombre d'abonnés au 1er janvier 2009 ?

b. Quel est le nombre maximal d'abonnés à ce journal ? Préciser le mois au cours duquel ce maximum a été atteint.

c. Sur quelle période le nombre d'abonnés a-t-il été croissant, la croissance étant accélérée ?

Expliquer comment se fait cette lecture.

2 La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessus est la représentation, sur $[0\,;5]$ seulement, de la fonction f définie sur $[0\,;10]$ par :

$$f(x)=10\,\mathrm{e}^{-0,5x^2+3,5x}.$$

a. Déterminer la dérivée de la fonction f.

En déduire que $f'(x)$ a le même signe que $3,5-x$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

Retrouver la réponse à l'une des questions posées en **1**.

3 On admet que la dérivée seconde est égale à :

$$f''(x)=(10x^2-70x+112,5)\,\mathrm{e}^{-0,5x^2+3,5x}.$$

a. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $10x^2-70x+112,5=0$.

b. En déduire le signe de $f''(x)$ sur $[0\,;5]$.

Retrouver la réponse à l'une des questions posées en **1**.

4 *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

a. Résoudre sur $[0\,;10]$ l'équation $f(x)=200$.

On pourra utiliser la valeur arrondie $\ln(20)\approx 3$.

b. On suppose que le modèle est valable après 2012. Les ventes de ce journal ne sont plus rentables si le nombre d'abonnés passe en dessous de 200.

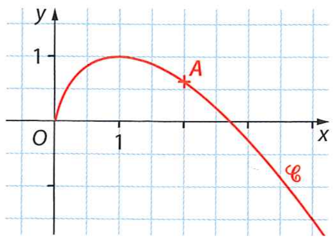
En quelle année ce journal devra-t-il cesser de paraître ?

92 Construire une tangente

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x(1-\ln x).$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative et A le point de la courbe $\mathscr{C}$ d'abscisse 2.



1 **a.** Montrer que, pour tout réel $x>0$, on a :

$$f'(x)=-\ln x.$$

b. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2 **a.** Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(\mathrm{e}\,;0)$.

b. Tracer le plus précisément possible la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé, d'unité 2 cm sur chaque axe, et placer le point A.

3 **a.** Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

b. Déterminer les coordonnées du point A', intersection de la droite $\mathscr{D}$ avec l'axe des ordonnées.

En déduire une construction « simple » de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A.

93 Fonction ln et bénéfice

Une entreprise fabrique et vend à des particuliers des panneaux photovoltaïques. Elle en produit chaque mois entre 50 et 2 500.

On admet que si elle fabrique et vend x centaines de panneaux solaires, le bénéfice mensuel de l'entreprise, en millier d'euros, est égal à :

$$f(x)=18\ln(x)-x^2+16x-15,\quad \text{où } 0,5\leqslant x\leqslant 25.$$

1 **a.** Montrer que pour tout réel x de $[0,5\,;25]$:

$$f'(x)=\frac{-2x^2+16x+18}{x}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0,5\,;25]$.

En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,5\,;25]$.

2 **a.** Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet deux solutions sur $[0,5\,;25]$ dont une entière.

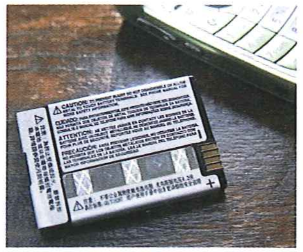
Déterminer la valeur approchée par défaut de la solution non entière α, à 10^{-2} près.

b. En déduire le tableau de signes du bénéfice $f(x)$ sur l'intervalle $[0,5\,;25]$.

3 **a.** Quels sont le nombre minimal et le nombre maximal de panneaux que l'entreprise doit produire et vendre pour être bénéficiaire ?

b. L'entreprise pourra-t-elle réaliser un bénéfice mensuel de 100 000 € ?

94 Étude d'un coût moyen



Une entreprise fabrique, chaque jour, entre 100 et 1 400 exemplaires d'un certain type de pièce pour téléphone mobile.

On admet que, lorsque x centaines d'exemplaires de cette pièce sont fabriqués, le coût moyen de fabrication d'une pièce, en euro, est :

$$f(x)=\frac{x+1-\ln(x)}{x},\quad \text{où } 1\leqslant x\leqslant 14.$$

1 **a.** Montrer que, pour tout réel x de $[1\,;14]$:

$$f'(x)=\frac{\ln(x)-2}{x^2}.$$

b. Résoudre l'inéquation $\ln(x)-2\geqslant 0$.

En déduire le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[1\,;14]$.

2 **a.** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;14]$.

On arrondira les valeurs aux bornes à 0,01 près.

b. En déduire la quantité de pièces à fabriquer, à l'unité près, pour que le coût moyen soit minimal.

Préciser ce coût moyen minimal.

Donner la valeur arrondie au centime d'euro près.

3 **a.** Résoudre, dans $[1\,;14]$, l'équation $f(x)=1$.

b. En déduire la quantité q de pièces à fabriquer, en centaine, pour que le coût moyen de fabrication d'une pièce soit un euro.

Arrondir à 10^{-2} centaine près.

c. Justifier que, pour toute quantité comprise entre 272 et 1 400 pièces, le coût moyen reste inférieur à 1 euro la pièce.

95 Signe de la dérivée

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=(x-\mathrm{e})(\ln(x)-1)\qquad\text{et}\qquad g(x)=\ln(x)-\frac{\mathrm{e}}{x}.$$

1 **a.** Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b. Calculer $g(\mathrm{e})$.

En déduire le tableau de signes de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

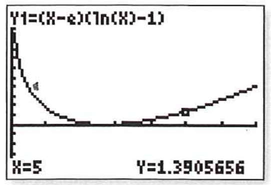
2 **a.** Montrer que, pour tout réel $x>0$:

$$f'(x)=g(x).$$

b. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

3 Résoudre l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Interpréter le résultat.



```
Y1=(X-e)(ln(X)-1)
X=5                Y=1.3905656
```

96 Coût total et croissance

Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament sous forme liquide. Sa capacité journalière de production est comprise entre 25 et 800 litres.

Le coût de fabrication, en millier d'euros, lorsque x centaines de litres de médicament sont produits, est donné par :

$$f(x)=x^2-5x+30+8\ln(x),\quad \text{pour } x\in[0,25\,;8].$$

1 **a.** Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.

b. Démontrer que la dérivée f' est strictement positive sur l'intervalle $[0,25\,;8]$.

2 On considère la fonction g définie sur $[0,25\,;8]$ par :

$$g(x)=2x-5+\frac{8}{x}.$$

a. Calculer $g'(x)$. Étudier le signe de $g'(x)$.

b. En déduire les variations de la fonction g sur $[0,25\,;8]$.

3 Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

En utilisant les résultats établis dans les questions **1** et **2**, justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion. On précisera l'abscisse α de ce point.

4 On assimile le coût marginal de production à la dérivée du coût total.

Le coût moyen est le quotient du coût total par la quantité.

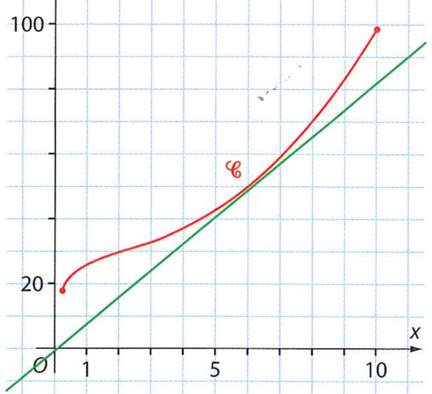
a. Justifier que le coût moyen s'exprime en dizaine d'euros par litre.

b. On rappelle que le coût marginal est dans les mêmes unités que le coût moyen.

Calculer le coût marginal et le coût moyen pour une production de 200 L.

c. Préciser la convexité du coût total suivant la production x. Que se passe-t-il pour une production de 200 L ? L'interpréter en termes de rythme de croissance.

5 La courbe $\mathscr{C}$ est représentée ci-dessous, ainsi que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=8,3x$.



a. Retrouver la valeur α sur ce graphique.

b. En utilisant ce graphique, expliquer pourquoi ce laboratoire ne peut vendre ce médicament en dessous de 83 euros le litre.

97 Coût et bénéfice

Un promoteur immobilier souhaite construire entre 4 et 30 villas, vendue 300 000 € chacune.
On estime que le coût de production, en million d'euros, pour n villas est donné par :

$$C(n) = 0{,}4n + 2{,}5 - 1{,}6\ln(n)\text{, où } 4 \leqslant n \leqslant 30\text{.}$$

PARTIE A Étude des coûts

Soit la fonction f définie sur $[\,4\,;30\,]$ par :

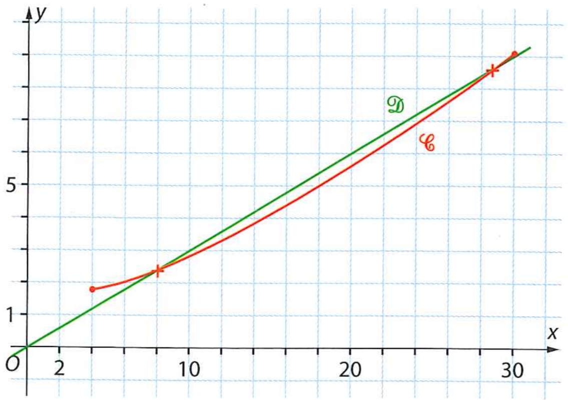
$$f(x) = 0{,}4x + 2{,}5 - 1{,}6\ln(x)\text{,}$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1 **a.** Calculer $f'(x)$ et en étudier le signe sur $[\,4\,;30\,]$.
b. Étudier les variations de f sur $[\,4\,;30\,]$.
Interpréter économiquement les variations de f.

2 Montrer que f' est croissante sur $[\,4\,;30\,]$.
Que peut-on en déduire pour le coût marginal ?

PARTIE B Conjectures graphiques



On a tracé la courbe $\mathscr{C}$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 0{,}3x$.

1 Déterminer graphiquement le nombre minimal de villas qu'il faut construire pour réaliser un bénéfice.

2 La tangente à $\mathscr{C}$ peut-elle être parallèle à la droite $\mathscr{D}$? Si oui, estimer en quelle valeur de x.

PARTIE C Étude de bénéfice

1 Montrer que le bénéfice réalisé pour la construction et la vente de n villas, en million d'euros, est donné, pour $4 \leqslant n \leqslant 30$, par :

$$B(n) = -0{,}1n - 2{,}5 + 1{,}6\ln(n)\text{.}$$

2 **a.** Dresser le tableau des variations de la fonction g définie sur $[\,4\,;30\,]$ par :

$$g(x) = -0{,}1x - 2{,}5 + 1{,}6\ln(n)\text{.}$$

b. Justifier que l'équation $g(x) = 0$ admet des solutions x_1 et x_2 sur l'intervalle $[\,4\,;30\,]$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer des valeurs arrondies de x_1 et x_2 à 0,1 près.

3 Dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur $[\,4\,;30\,]$.

4 En déduire :
a. la valeur du bénéfice maximal, à 10 000 € près ;
b. la plage de bénéfice. *On donnera des bornes entières.*

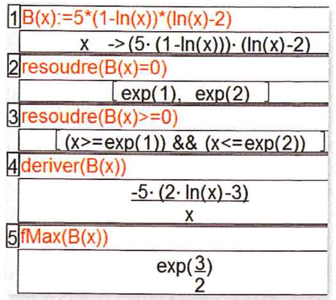
98 Résultats avec calcul formel

Une entreprise fabrique et revend entre 1 000 et 10 000 jouets par semaine. Le bénéfice réalisé, en millier d'euros, lorsqu'elle fabrique et vend x milliers de jouets, est égal à :

$$B(x) = 5(1 - \ln x)(\ln x - 2)\text{,}$$

où x appartient à l'intervalle $[\,1\,;10\,]$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de B. On a réalisé les recherches ci-dessous à l'aide du logiciel *Xcas*.

PARTIE A Interprétation des résultats



```
1 B(x):=5*(1-ln(x))*(ln(x)-2)
        x   ->(5·(1-ln(x)))·(ln(x)-2)
2 resoudre(B(x)=0)
          [exp(1),  exp(2) ]
3 resoudre(B(x)>=0)
     [(x>=exp(1)) && (x<=exp(2))]
4 deriver(B(x))
           -5·(2·ln(x)-3)
                 x
5 fMax(B(x))
             exp(3)
                 2
```

1 Interpréter graphiquement les résultats des lignes 2 et 3 de la copie d'écran donnée.

2 En utilisant les lignes 4 et 5 de la copie d'écran, dresser le tableau de variations de B sur $[\,1\,;10\,]$.

3 Pour quelle production le bénéfice est-il maximal ?
Donner la valeur exacte, puis un arrondi à 10 jouets.

PARTIE B Justification des résultats

1 Justifier les résultats obtenus à la ligne 2 de la copie d'écran ci-dessus.

2 **a.** Résoudre, dans $]\,0\,;+\infty\,[$, les inéquations :

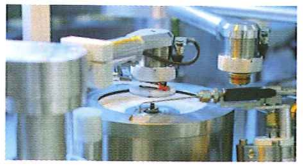
$$1 - \ln x \geqslant 0 \quad\text{et}\quad \ln x - 2 \geqslant 0\text{.}$$

b. En déduire le tableau de signes de $B(x)$.
Quelle ligne de la copie d'écran démontre-t-on ainsi par ce tableau de signes ?

3 **a.** Calculer $B'(x)$ et vérifier le résultat obtenu à la ligne 4 de la copie d'écran.
b. En déduire les variations de B sur $[\,1\,;10\,]$.
On précisera la valeur exacte du maximum de B et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.
c. Déterminer, à un jouet près, les quantités à produire pour ne pas travailler à perte.

4 **a.** Donner le nombre de solutions sur $[\,1\,;10\,]$ de l'équation $B(x) = 1$, puis donner une valeur approchée à 0,001 près de chaque solution, à l'aide de la calculatrice.
b. Cette entreprise veut réaliser un bénéfice supérieur ou égal à 1 000 €. Combien de jouets doit-elle fabriquer ? Justifier la réponse.

99 Variation du bénéfice marginal



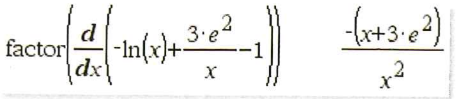
Une entreprise produit et vend entre 1 et 25 milliers de DVD par semaine. Le bénéfice réalisé, en centaine d'euros, par la production et la vente de x milliers de DVD, pour $x \in [\,1\,;25\,]$, est égal à :

$$f(x) = 2 + (3e^2 - x) \times \ln(x)\text{.}$$

1 On assimile le bénéfice marginal à la dérivée $f'(x)$, en dixième d'euro par DVD.
a. Montrer que, pour tout x de $[\,1\,;25\,]$:

$$f'(x) = -\ln(x) + \frac{3e^2}{x} - 1\text{.}$$

b. À l'aide d'un calcul formel, on a obtenu l'expression ci-dessous de la dérivée seconde $f''(x)$:



$$\text{factor}\left(\frac{d}{dx}\left(-\ln(x)+\frac{3\cdot e^2}{x}-1\right)\right) \qquad \frac{-\left(x+3\cdot e^2\right)}{x^2}$$

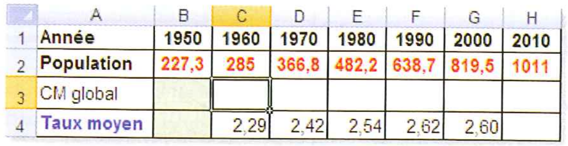
En utilisant ce résultat, étudier le sens de variation de la dérivée f'.
c. Justifier que la fonction f est concave sur $[\,1\,;25\,]$ et interpréter économiquement ce résultat.
d. Calculer $f'(e^2)$.
En déduire le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[\,1\,;25\,]$.

2 **a.** Calculer la valeur exacte de $f(e^2)$.
b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[\,1\,;25\,]$.
On donnera les valeurs aux bornes arrondies à 0,1 près.
c. En déduire le nombre de DVD à produire pour que le bénéfice soit maximal.
Arrondir à 100 DVD près, ainsi que la valeur, à 10 euros près, de ce bénéfice.

3 **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution, notée α, sur $[\,1\,;25\,]$.
À la calculatrice, donner la valeur approchée de α à 0,1 près par défaut.
b. Dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $[\,1\,;25\,]$.
c. En déduire le nombre maximal de DVD à fabriquer pour que l'entreprise réalise des bénéfices.

100 Retour sur une croissance de population

Parmi les populations des cinq continents, celle de l'Afrique a la croissance la plus forte (voir Activité 1 page 12 et Activité 4 page 107).
La feuille de calcul donne la population en million, depuis 1950, pour quelques années :



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Année**	**1950**	**1960**	**1970**	**1980**	**1990**	**2000**	**2010**
2	**Population**	227,3	285	366,8	482,2	638,7	819,5	1011
3	CM global							
4	**Taux moyen**		2,29	2,42	2,54	2,62	2,60	

1 **a.** Indiquer la formule à saisir en cellule C3 et recopier vers la droite pour calculer le coefficient multiplicateur global de la population de l'Afrique par rapport à l'année 1950.
b. Calculer le taux de croissance moyen annuel de la population de l'Afrique entre 1950 et 2010.
On notera avec précision les calculs faits.

2 Pour les années à venir, un démographe estime que la population de l'Afrique peut être modélisée par la fonction f telle que : $f(x) = 1\,011 \times 1{,}026^x$,
où x est le rang de l'année $2010 + x$, et $f(x)$ en million.
a. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant 2\,022$. *On donnera le résultat exact, puis arrondi par excès à l'unité près.*
b. Interpréter le résultat obtenu.

101 Retour sur les suites

Chaque mois, un investisseur injecte du capital pour dynamiser une entreprise.
De 30 000 € au départ, le capital injecté diminue chaque mois de 10 %.
On note u_n le capital injecté au n-ième mois de diminution, en euro.

1 **a.** Justifier que, pour tout entier n :

$$u_n = 30\,000 \times 0{,}9^n\text{.}$$

b. Déterminer la limite de ce capital injecté.
c. Déterminer le mois où le capital injecté devient inférieur à 10 000 €.

2 Cet investisseur doit déclarer en frais le montant de l'investissement total, somme des capitaux injectés.
a. Exprimer, en fonction de n, la somme :

$$1 + 0{,}9 + 0{,}9^2 + \ldots + 0{,}9^n\text{.}$$

b. Montrer que l'investissement total au bout de n mois, capital de départ inclus, s'exprime en fonction de n par :

$$S_n = 300\,000 - 270\,000 \times 0{,}9^n\text{.}$$

c. Déterminer la limite de l'investissement total.
d. Résoudre dans $\mathbb{N}$ l'inéquation :

$$300\,000 - 270\,000 \times 0{,}9^n \geqslant 250\,000\text{.}$$

Interpréter le résultat obtenu.

102 Suite arithmético-géométrique

Dans une bibliothèque, on recense 15 000 ouvrages fin 2010. À la fin de chaque année, on constate que 5 % des livres sont perdus et on achète 1 000 nouveaux ouvrages.
Pour tout entier n, on note u_n le nombre de livres de la bibliothèque à la fin de l'année $2010 + n$.

1 **a.** Calculer le nombre d'ouvrages de la bibliothèque fin 2011 et fin 2012.
b. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2 On pose $v_n = 20\,000 - u_n$.
a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.
b. En déduire que pour tout entier n :

$$u_n = 20\,000 - 5\,000 \times 0{,}95^n\text{.}$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3 Déterminer en quelle année le nombre d'ouvrages de la bibliothèque dépassera 19 000.

Réinvestir...

103 ... en sciences TICE

Pourquoi choisir une croissance exponentielle ?

PARTIE A Énergie produite d'origine éolienne

On donne ci-dessous la puissance éolienne produite, en France, en GWh, entre 2000 et 2010 :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Énergie produite (en GWh)	70	131	245	363	577	963	2 169	4 140	5 653	7 800	9 600

Source : Planetoscope.

1 Dans une feuille de calcul de tableur :

a. Entrer les rangs en colonne A et l'énergie produite en colonne B.

b. Sélectionner la plage de données et représenter graphiquement la série (utiliser *Nuage de points*).

c. Modifier la **mise en forme de l'axe** des ordonnées par clic droit,

et cocher *Échelle logarithmique* : ☑ Échelle logarithmique Base : 10

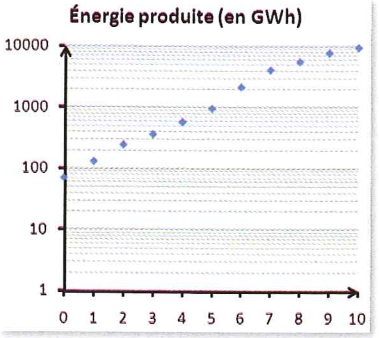
En ajoutant le quadrillage secondaire, obtenir le graphique ci-contre.
Constater que les points obtenus sont presque alignés.

d. Ajouter une *courbe de tendance* (de type exponentielle), en affichant son équation.

En déduire que la quantité d'énergie produite d'origine éolienne, en GWh, peut être modélisée par : $f(x)=80\,\mathrm{e}^{0{,}5142x}$,
où x est le nombre d'années écoulées depuis 2000.

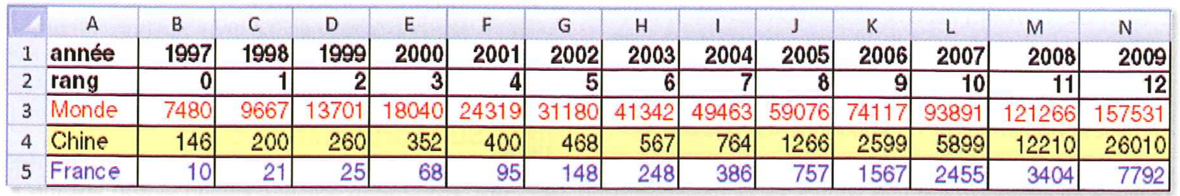
2 En utilisant le modèle, estimer en quelle année l'énergie produite d'origine éolienne dépassera 170 000 GWh.

3 Calculer le coefficient multiplicateur $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$.
Interpréter économiquement.



PARTIE B Comparaison des puissances éoliennes installées depuis 1997

Depuis 1997, l'installation d'éoliennes a explosé partout dans le monde.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	**année**	**1997**	**1998**	**1999**	**2000**	**2001**	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**
2	**rang**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
3	Monde	7480	9667	13701	18040	24319	31180	41342	49463	59076	74117	93891	121266	157531
4	Chine	146	200	260	352	400	468	567	764	1266	2599	5899	12210	26010
5	France	10	21	25	68	95	148	248	386	757	1567	2455	3404	7792

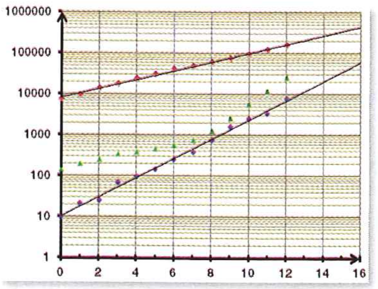
On a représenté sur papier semi-log la puissance installée dans le monde, en Chine et en France en MW (mégawatt).

1 La variable x désigne le nombre d'années depuis 1997.
La courbe de tendance pour le monde a pour équation : $y=8\,300\,\mathrm{e}^{0{,}2478x}$.
Faire une prévision pour 2013. Vérifier sur le graphique.

2 La courbe de tendance pour la France a pour équation : $y=10{,}5\,\mathrm{e}^{0{,}54x}$.
Faire une prévision pour 2013.

3 **a.** Peut-on modéliser l'évolution pour la Chine par une croissance exponentielle ?
Si oui, sur quelle plage ?

b. Calculer `=N4/J4^(1/4)` . Que permet ce calcul ?
En déduire que la puissance installée en Chine, en MW, depuis 2005 peut être modélisée par $k(x)=1\,266\,\mathrm{e}^{0{,}756(x-8)}$ en $1997+x$.
Faire une prévision pour 2013. Que penser de ce modèle ?



Réinvestir...

104 ... en modélisation TICE

Modéliser une croissance « lente » ?

PARTIE A La population allemande

On étudie ci-dessous l'évolution de la population de l'Allemagne sur une période plus étendue.
À partir de 1990, il s'agit de la population de l'Allemagne réunifiée.

Années	1958	1963	1968	1973	1993	1998	2003	2008
Nombre d'années écoulées depuis 1950	8	13	18	23	43	48	53	58
Population allemande (en million)	71,5	74,4	77	78,8	81	82,1	82,5	82,2

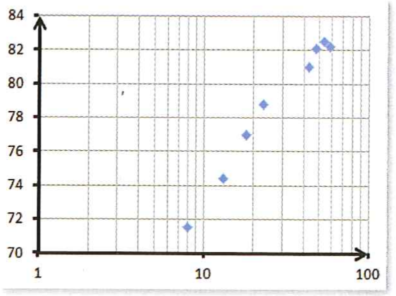
Source : INSEE.

1 **a.** À l'aide d'un tableur, représenter l'évolution de la population allemande, en million, avec en abscisses, le nombre d'années écoulées depuis 1950. Mettre l'axe des abscisses en échelle logarithmique.
Que constate-t-on ?

b. Expliquer que l'on peut approcher la population allemande, en million, par : $f(x)=5{,}5\ln(x)+60{,}6$,
où x est le nombre d'années écoulées depuis 1950.

2 Estimer la population de l'Allemagne en 2015.

3 Selon le modèle, à partir de quelle année la population allemande devrait dépasser 90 millions de personnes ?



PARTIE B Le taux d'emploi des seniors

Selon un rapport de l'INSEE : « Le taux d'emploi des personnes âgées de 55 à 64 ans est considéré comme un levier privilégié pour limiter l'exclusion de ces personnes du marché du travail et maîtriser les dépenses de retraites. »
En 2008, la France s'est fixée comme objectif d'atteindre un taux d'emploi des seniors de 50 % en 2010.
Le tableau ci-dessous indique le taux d'emploi des seniors (en %) en France, entre 2000 et 2009 :

Années	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Nombre d'années écoulées depuis 1999	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux d'emploi des seniors (en %)	29,9	31,9	34,7	37	37,8	38,5	38,1	38,2	38,3	38,9

Source : INSEE, Eurostat.

1 Modéliser l'évolution du taux d'emploi des seniors, en argumentant le choix fait.

2 Selon le modèle, déterminer à partir de quelle année la France aura atteint son objectif.

105 ... en musique

Intensité et niveau sonore

Le niveau sonore $L(I)$, en décibel (dB), d'un son d'intensité acoustique I, en W/m^2, est donné par :

$$L(I)=10\log\left(\frac{I}{I_0}\right),$$

où I_0 est la plus faible intensité perceptible par l'oreille humaine : $I_0=10^{-12}$ W/m^2.

Rappel
- log désigne le logarithme décimal :
  pour tout réel $x>0$, $\log(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$.
- Pour tout $a>0$ et $b>0$:
  $\log(a\times b)=\log(a)+\log(b)$.

Voir AP 85 page 126

1 Quel est le niveau sonore L_0 lorsque $I=I_0$?

2 **a.** Lors du décollage de la fusée Ariane, on a observé une intensité acoustique égale à $I_0\times10^{17}$ W/m^2.
Quel est le niveau sonore correspondant ?

b. Le niveau sonore d'un marteau-piqueur est de 110 dB.
Quelle est l'intensité acoustique associée ?

3 Une enceinte de chaîne Hi-fi génère en un point un niveau sonore de 30 dB.

a. Quel est l'intensité acoustique associée ?

b. On ajoute à son côté une deuxième enceinte.
On admet que les intensités acoustiques s'ajoutent.
Quel est le niveau sonore obtenu par les deux enceintes ?

4 Un son passe de 20 dB à 50 dB. Par combien a été multipliée l'intensité acoustique correspondante ?