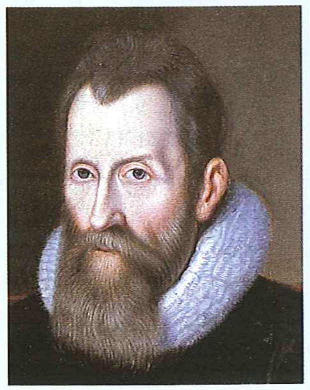
CHAPITRE 4

Fonction logarithme népérien

Maths et musique

Une trompette peut, à elle seule, produire un son d'un volume élevé. Mais quelle est notre perception du son produit par une fanfare composée d'une centaine de cuivres ?

On peut montrer que la différence perçue lorsqu'on passe d'un seul instrument à une fanfare de 100 instruments est égale à seulement six fois la différence perçue en passant d'un à deux instruments. L'oreille n'est pas directement sensible à la puissance sonore, mais aux rapports entre les puissances ou, pour le dire autrement, au logarithme de la puissance sonore.



John Napier
1550-1617

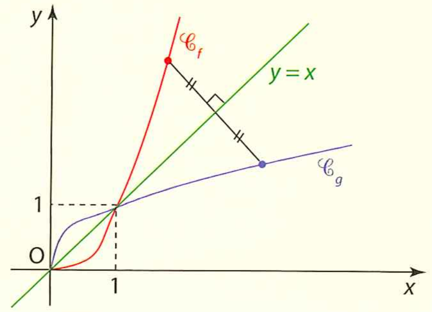
→ Chercheurs d'hier p. 118

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Fonction racine carrée et fonction carré

• On pose, pour $x \geqslant 0$, $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$, et on note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé.



• Pour $x \geqslant 0$, on a : $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x$. Les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

• On dit que, pour $x \geqslant 0$, les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ sont **réciproques** l'une de l'autre.

1 Expliquez comment, à partir des points de l'une des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, on peut obtenir les points de l'autre courbe.

2 Expliquez pourquoi les deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en un point de la droite d'équation $y = x$, autre que l'origine O.
Précisez les coordonnées de ce point.

Propriété fondamentale de la fonction exponentielle

• L'image d'une somme par la fonction exponentielle est le produit des images. Plus précisément, pour tout x et pour tout y de $\mathbb{R}$:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y.$$

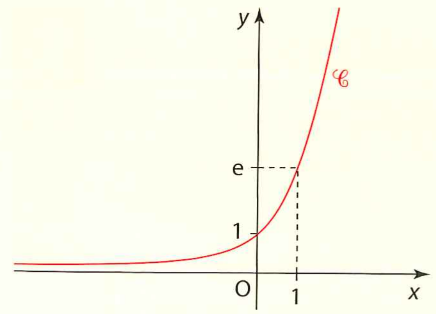
3 Soit a un réel quelconque, on pose $f(x) = e^{ax}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de la fonction f ?

2. Démontrez que, pour tout x et tout y de $\mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$.

4 On pose, pour tout réel x, $h(x) = x^2$. La propriété suivante est-elle vraie pour tout x et tout y de $\mathbb{R}$: $h(x + y) = h(x) \cdot h(y)$?

Courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$



5 On pose $f(x) = e^{-x}$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.
Quel lien y a-t-il entre $\mathscr{C}_f$ et la courbe d'équation $y = e^x$?

→ Voir les corrigés p. 361

Activité FONCTION RÉCIPROQUE DE L'EXPONENTIELLE

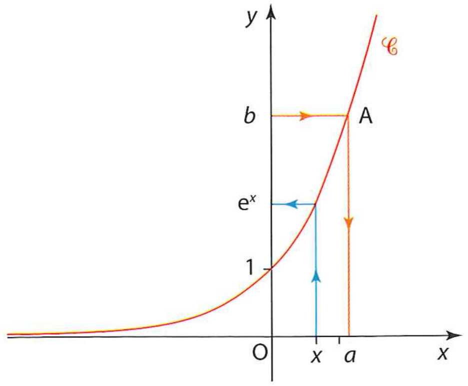
1 De quoi s'agit-il ?

Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé.

Tout nombre réel x a une image unique e^x dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$ (chemin bleu).

On pose le problème suivant : est-il possible d'utiliser la même courbe pour faire le chemin en sens inverse ? Plus précisément, est-il possible d'associer à chaque nombre b de $]0\,;+\infty[$ un unique nombre a tel que $e^a = b$?

Graphiquement on voit que cela est possible. En effet si b est un nombre strictement positif quelconque, la droite d'équation $y = b$ coupe la courbe $\mathscr{C}$ en un seul point A (chemin orange sur la figure).



1. Par ce procédé, quel est le nombre associé à b dans chacun des cas suivants ?

a) $b = e$.

b) $b = 1$.

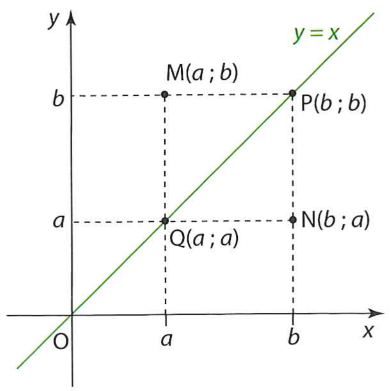
2. Par ce procédé, expliquez pourquoi si b est supérieur à 1 alors le nombre a associé à b est positif et si b est inférieur à 1 alors le nombre a associé est négatif.

Le nombre a associé à b, c'est-à-dire tel que $e^a = b$ est noté **ln *b***. (On lit *logarithme népérien* de b)

La fonction ln ainsi définie est appelée **fonction réciproque de la fonction exponentielle.**

2 Deux courbes symétriques

1. En repère orthonormé, démontrez que les points $M(a\,;b)$ et $N(b\,;a)$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Aide

Expliquez pourquoi le quadrilatère MPNQ construit sur la figure ci-contre est un carré.

2. Déduisez-en que, en repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction ln est la courbe symétrique de la courbe représentative de la fonction exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$.

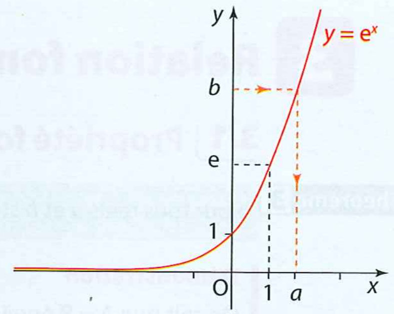
3. Construisez en utilisant ce procédé la courbe représentative de la fonction ln.

1 À partir de la fonction exponentielle

1.1 Définition

Définition 1

À tout nombre $b > 0$ correspond un unique nombre réel a tel que $e^a = b$; a est appelé **logarithme népérien de *b*** et est noté **ln *b***.



Théorème 1 Pour tout réel $b > 0$, pour tout réel a, on a donc $\boldsymbol{a = \ln b \Leftrightarrow e^a = b}$.

Attention. $\ln b$ n'est défini que pour $b > 0$.

1.2 Propriétés immédiates

Les propriétés suivantes sont des conséquences immédiates de la définition :

- $\ln e = 1$;
- $\ln 1 = 0$;
- si $b > 1$, alors $\ln b > 0$;
- si $0 < b < 1$, alors $\ln b < 0$;
- pour tout réel $b > 0$, $e^{\ln b} = b$;
- pour tout réel a, $\ln(e^a) = a$.

Exemple. On sait que pour tout $x > -1$, $\ln(x+1) = 3$ équivaut à $x + 1 = e^3$, c'est-à-dire $x = e^3 - 1$.

2 Deux propriétés utiles

Théorème 2

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$\boldsymbol{\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b}$ (1)

$\boldsymbol{\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b}$ (2)

Démonstration

D'après le théorème 5 du chapitre 3 p. 78 :

$A = B$ équivaut à $e^A = e^B$;

$A < B$ équivaut à $e^A < e^B$.

$\ln a = \ln b$ équivaut à $e^{\ln a} = e^{\ln b}$, c'est-à-dire $a = b$ et $\ln a < \ln b$ équivaut à $e^{\ln a} < e^{\ln b}$, c'est-à-dire $a < b$.

Exemples

- Pour tout $x \neq 0$, $\ln x^2 = \ln 4$ équivaut à $x^2 = 4$, c'est-à-dire à $x = 2$ ou $x = -2$;
- $\ln 3{,}1 < \ln \pi$ car $3{,}1 < \pi$.

3 Relation fonctionnelle

3.1 Propriété fondamentale

Théorème 3 Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Démonstration

On sait que A = B équivaut à $e^A = e^B$. Pour $a > 0$ et $b > 0$, posons $A = \ln ab$ et $B = \ln a + \ln b$.

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$ équivaut à $e^{\ln(ab)} = e^{(\ln a + \ln b)}$.

Or $e^{\ln(ab)} = ab$ et $e^{(\ln a + \ln b)} = e^{\ln a} \times e^{\ln b}$.

On a donc : $e^A = e^B = a \cdot b$.

D'où A = B.

3.2 Logarithme du produit de plusieurs nombres

Théorème 4 Pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_p$ strictement positifs :

$$\ln(a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_p) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ldots + \ln a_p.$$

Démonstration

D'après la propriété fondamentale : $\ln(a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_p) = \ln a_1 + \ln(a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_p)$
$= \ln a_1 + \ln a_2 + \ln(a_3 \times \ldots \times a_p)$.

En continuant ainsi on obtient le résultat annoncé.

Exemple. $\ln 6 + \ln 5 + \ln \frac{1}{30} = \ln\left(6 \times 5 \times \frac{1}{30}\right) = \ln 1 = 0$.

4 Conséquences

4.1 Logarithme d'un quotient, d'un inverse

Théorème 5

1. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

2. Pour tout réel $b > 0$, $\ln \frac{1}{b} = -\ln b$.

Démonstration

1. On peut écrire $a = \frac{a}{b} \times b$. D'après la propriété fondamentale, on a $\ln a = \ln \frac{a}{b} + \ln b$; d'où le résultat.

2. En particulier lorsque $a = 1$, on obtient $\ln \frac{1}{b} = \ln 1 - \ln b = -\ln b$.

4.2 Logarithme de a^p (p entier relatif)

Théorème 6 Pour tout entier relatif p, pour tout réel a strictement positif :

$$\ln(a^p) = p \ln a.$$

Démonstration

- Si $p \geqslant 1$, $a^p = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{p \text{ fois}}$.

Donc d'après le théorème 4 :

$\ln(a^p) = \underbrace{\ln a + \ln a + \ldots + \ln a}_{p \text{ fois}} = p \ln a$.

- Si $p \leqslant -1$, $\ln(a^p) = \ln \frac{1}{a^{-p}} = -\ln(a^{-p})$.

Or $-p \geqslant 1$ donc $\ln(a^{-p}) = -p \ln a$; d'où $\ln(a^p) = p \ln a$.

- Si $p = 0$, $\ln(a^p) = \ln a^0 = \ln 1 = 0$ et $p \ln a = 0 \ln a = 0$.

4.3 Logarithme de $\sqrt{a}$

Théorème 7 Pour tout réel $a > 0$, $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$.

Démonstration

Pour $a > 0$ on sait que $a = (\sqrt{a})(\sqrt{a})$. Donc d'après la propriété fondamentale,
$\ln a = \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{a} = 2 \ln \sqrt{a}$. D'où le résultat.

Exemples

- $\ln 12 - \ln 6 + \ln \frac{3}{2} = \ln \frac{12}{6} + \ln 3 - \ln 2 = \ln 3$.
- $\ln 4^{-3} + 5 \ln 2 = -3 \ln 4 + 5 \ln 2$. Or $\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2$.

D'où $\ln 4^{-3} + 5 \ln 2 = -\ln 2$.

- $\ln \sqrt{3} + \frac{1}{2} \ln \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln 5$.

5 Étude de la fonction ln

5.1 Dérivée de la fonction ln

Théorème 8 La fonction ln est **dérivable** sur $]0 ; +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Nous admettrons ce théorème.

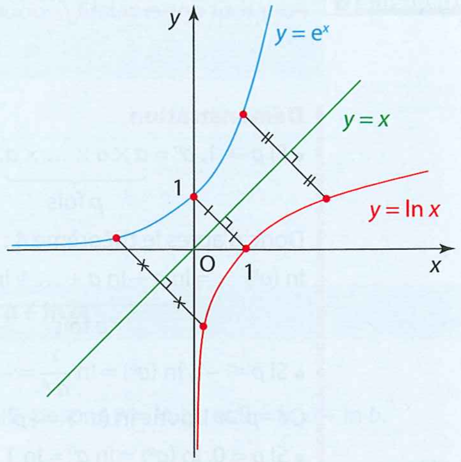
Conséquence. La fonction ln est donc strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

En effet, pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $(\ln)'(x) = \frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x} > 0$.

Remarque. Cette propriété a été établie directement théorème 2 p. 101.

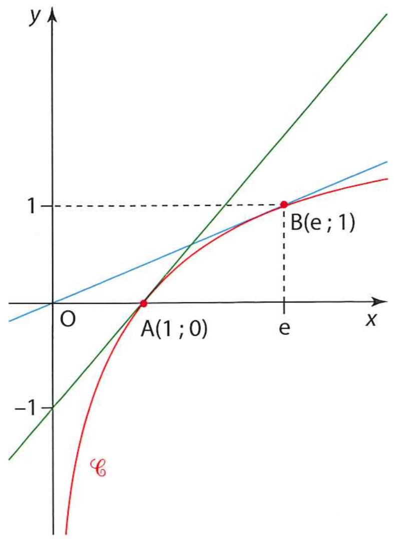
5.2 | Courbe représentative de la fonction ln

Théorème 9 En repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$ sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$.



5.3 | Quelques points remarquables

Notons $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction ln.



- Le point A de coordonnées (1 ; 0) est sur $\mathscr{C}$. En effet, $\ln 1 = 0$. Le coefficient directeur de la tangente en A est égal à $\ln'(1)$ avec $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.
- Le point B de coordonnées (e ; 1) est sur $\mathscr{C}$. En effet, $\ln e = 1$.
- Le coefficient directeur de la tangente au point B(e; 1) est égal à $\ln'(e)$ c'est-à-dire $\frac{1}{e}$. Cette droite admet donc pour équation $y = \frac{1}{e}(x - e) + 1$ c'est-à-dire $y = \frac{x}{e}$. Cette droite passe donc par l'origine du repère.

Rappel. La tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$ au point a a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

OBJECTIF 1 Transformer des écritures où figurent des logarithmes

Pour tous réels a et b strictement positifs, pour tout entier relatif p :

- $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ (1)
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ (2)
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$ (3)
- $\ln(a^p) = p \ln a$ (4)
- $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$ (5)
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ (6)
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$ (7)

EXERCICE RÉSOLU A

1. Résolvez l'équation : $\ln(3 - x) + \ln 2 = 2 \ln(x + 1)$.

2. Résolvez l'inéquation : $\ln(3 - x) + \ln 2 \geqslant 2 \ln(x + 1)$.

Méthode

1. Pour résoudre une équation dans laquelle figurent des logarithmes :
- on trouve l'ensemble de définition E de l'équation ;
- on se ramène en général à une équation de type $\ln u(x) = \ln v(x)$;
- on résout dans E l'équation $u(x) = v(x)$.

On utilise les propriétés (1) et (4), puis (6).
Attention ! Seuls les réels appartenant à E sont solutions de l'équation initiale.

2. Pour résoudre une inéquation dans laquelle figurent des logarithmes :
- on trouve l'ensemble de définition E de l'inéquation ;
- on se ramène en général à une inéquation de type $\ln u(x) \leqslant \ln v(x)$;
- on résout dans E l'inéquation $u(x) \leqslant v(x)$.

On utilise les propriétés (1) et (4), puis (7).
Attention ! Il faut chercher l'ensemble de définition de l'équation ou de l'inéquation **avant** de la transformer. En effet, après transformation, cet ensemble peut changer.
Remarquez qu'ici l'ensemble de définition de la nouvelle inéquation $\ln[2(3 - x)] \geqslant \ln[(x + 1)^2]$ est $]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 3[$ (différent de E) et que l'ensemble S_1 de ses solutions est $[-5 ; -1[\cup]-1 ; 1]$ (différent de S').

Solution

1. On doit avoir $3 - x > 0$, c'est-à-dire $x < 3$ et $x + 1 > 0$, c'est-à-dire $x > -1$, donc l'ensemble de définition E est l'intervalle $]-1 ; 3[$.
L'équation s'écrit dans E :
$\ln[2(3 - x)] = \ln[(x + 1)^2]$.
Or, pour tout x de E, $\ln 2(3 - x) = \ln[(x + 1)^2]$ équivaut à $2(3 - x) = (x + 1)^2$, c'est-à-dire : $x^2 + 4x - 5 = 0$.
Résolvons $x^2 + 4x - 5 = 0$. $\Delta = 36$: les racines sont 1 et –5. Mais $-5 \notin$ E.
L'ensemble S des solutions est donc **S = {1}**.

2. L'ensemble de définition est aussi E = $]-1 ; 3[$.
L'inéquation s'écrit $\ln[2(3 - x)] \geqslant \ln[(x + 1)^2]$.
Or, pour tout x de E, $\ln[2(3 - x)] \geqslant \ln[(x + 1)^2]$ équivaut à $2(3 - x) \geqslant (x + 1)^2$.
Commençons par résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2(3 - x) \geqslant (x + 1)^2$, c'est-à-dire $x^2 + 4x - 5 \leqslant 0$.
Les racines du trinôme sont 1 et –5.
Ici le coefficient de x^2 est égal à 1, donc positif : les solutions de l'inéquation sont les réels de l'intervalle $[-5 ; 1]$.
Seuls les réels de cet intervalle qui appartiennent aussi à E sont solutions de l'inéquation initiale.
L'ensemble S' des solutions est donc **S' =]–1 ; 1]**.

Mise en pratique

1 Résolvez l'équation :
$\ln(2 - x) + \ln 3 = 2 \ln(x - 1)$.

2 Résolvez l'équation $\ln(x^2) = 2 \ln(x + 1)$.

3 Résolvez l'inéquation $\ln(2 - x) \geqslant \ln(5 + x)$.

4 Résolvez l'inéquation $\ln(x + 1) + \ln x \leqslant \ln 2$.

OBJECTIF 2 Résoudre sur $]0\,;+\infty[$ une équation de la forme $x^n = k$, $k \in\ ]0\,;+\infty[$, $n \in \mathbb{N}$

Pour n entier relatif, pour tout réel $a > 0$, pour tout réel $b > 0$:
- $\ln(a^n) = n \ln a$ (1)
- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ (2)

Pour tout réel $a > 0$, pour tout réel b :
- $e^b = a \Leftrightarrow b = \ln a$ (3)

EXERCICE RÉSOLU B

1. Résolvez dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $x^5 = 100$.

2. Résolvez dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $x^{10} = 200$.

Méthode

1. On utilise la propriété $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; puis la propriété $\ln(a^n) = n \ln a$.

On utilise la propriété $e^b = a \Leftrightarrow b = \ln a$.

Ici $b = \dfrac{\ln 100}{5}$ et $a = x$.

On peut contrôler que $(2{,}51)^5 \approx 100$.

2. On procède comme pour la question **1.**

Solution

1. Pour tout $x > 0$, $x^5 = 100$ équivaut à $\ln(x^5) = \ln 100$, c'est-à-dire $5 \ln x = \ln 100$, c'est-à-dire $\ln x = \dfrac{\ln 100}{5}$, c'est-à-dire $x = e^{\frac{\ln 100}{5}}$.
Donc l'équation admet une solution unique :
$$x = e^{\frac{\ln 100}{5}}, \text{ c'est-à-dire } x \approx 2{,}51.$$

2. Pour tout $x > 0$, $x^{10} = 200$ équivaut à $\ln(x^{10}) = \ln 200$, c'est-à-dire $10 \ln x = \ln 200$, c'est-à-dire $\ln x = \dfrac{\ln 200}{10}$, c'est-à-dire $x = e^{\frac{\ln 200}{10}}$.
Donc l'équation admet une solution unique :
$$x = e^{\frac{\ln 200}{10}} \approx 1{,}7.$$

Mise en pratique

Pour les exercices 5 à 9

Résolvez dans $]0\,;+\infty[$ les équations :

5 $x^7 = 20$.

6 $3x^7 = 5$.

7 $2x^{-6} = 3$.

8 $(1 + x)^3 = 3$.

9 $(0{,}2 + x)^{12} = 1$.

10 **1.** Résolvez dans $]0\,;+\infty[$ l'équation $x^4 = 81$ en utilisant la méthode précédente.

2. Retrouvez ce résultat directement.

Pour se tester

Exercices interactifs

11 Questions sur le cours

1. Pour tout $x > 0$, la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto$ …… .

2. Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$, $\ln ab =$ …… + …… .

3. Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$, $\ln \dfrac{a}{b} =$ …… .

4. Pour tout $a > 0$, $\ln \sqrt{a} =$ …… ln …… .

5. Pour tout $a > 0$ et pour n entier relatif, $\ln(a^n) =$ …… ln …… .

12 Vrai ou faux

1. Pour tout réel a, pour tout réel b strictement positif, $e^a = b$ équivaut à $a = \ln b$.

2. Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(a - b) = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

3. $\ln 3^4 = 3 \ln 4$.

4. $\ln 8 + 3 \ln 2 - \ln 4 = \ln 16$.

5. $\ln \dfrac{1}{1\,000} = -3 \ln 10$.

6. $\ln \sqrt{16} = \dfrac{1}{2} \ln 4$.

13 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. Si f est définie par $f(x) = 2x + \ln(x^2)$, alors son ensemble de définition est :
a) $\mathbb{R}$ b) $]0\,;+\infty[$ c) $]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$.

2. Si f est définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x + \dfrac{\ln x}{x}$, alors sa dérivée $f'(x)$ est :
a) $2 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ b) $2 + \dfrac{x - \ln x}{x^2}$ c) $2 + \dfrac{1 - \ln x}{x}$.

3. L'inéquation $\ln x < -\ln 3$ a pour ensemble solution :
a) $]0\,;+\infty[$ b) $]3\,;+\infty[$ c) $\left]0\,;\dfrac{1}{3}\right[$.

4. L'expression simplifiée de $\ln 2 + \ln \dfrac{1}{2} - \ln(e^{-2})$ est égale à :
a) -2 b) 2 c) e.

14 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. Identifiez les relations correctes :
a) $\dfrac{\ln(e^{-2})}{\ln(e^{-1})} = \ln(e^{-1})$ b) $\ln(e^{-2}) + \ln(e^{-1}) = \ln e^{-3}$
c) $\ln e^{-2} - \ln e^{-1} = \ln e^{-1}$.

2. Si $f(x) = \ln(x - 2)$, $g(x) = \ln(1 + x^2)$ et $h(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, alors :
a) f est définie sur $]-\infty\,;2[$ b) $g(0) = 0$ c) $h(e) = e$.

3. L'équation $(x + 2)\ln(x + 2) = 0$.
a) a pour unique solution -2 ;
b) a pour éventuelle solution un nombre strictement supérieur à -2 ;
c) n'admet pas de solution.

4. La fonction $f : x \mapsto x \ln x$:
a) est définie sur $[0\,;+\infty[$
b) a pour fonction dérivée la fonction f' définie par $f'(x) = \ln x + 1$
c) a pour tableau de variation :

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Voir les corrigés p. 361

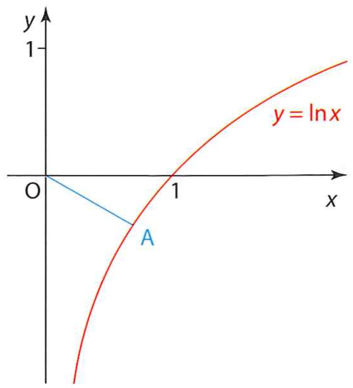
Utiliser Geogebra

→ **Pour résoudre un problème lié à la courbe représentative de la fonction ln**

15 Recherche d'une plus courte distance

On se place dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On se propose de déterminer la plus courte distance de l'origine O du repère à la courbe d'équation $y = \ln x$.

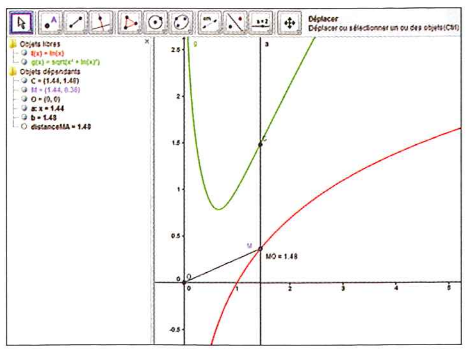
D'après l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \ln x$, on « voit » graphiquement où se trouve approximativement le point de la courbe $\mathscr{C}$ où cette plus courte distance est atteinte. On va préciser cette étude, avec le logiciel GeoGebra puis par le calcul.



A À l'aide du logiciel GeoGebra

1. Faites tracer en rouge la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction $f : x \mapsto \ln x$.

2. Pour chaque point M d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$, on note $d(O; M)$ la distance du point O au point M. On pose $g(x) = d(O; M)$.
Sur le même écran, faites tracer en vert la courbe représentative de g et vérifiez que vous obtenez la figure ci-contre.



3. Dans GeoGebra, définissez un point mobile M sur la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \ln(x)$. Faites tracer la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par M, puis définissez le point C, point d'intersection de cette droite et de la courbe d'équation $y = g(x)$. On peut déplacer le point M sur la courbe $\mathscr{C}$ et le point C se déplace également.
Avec ces notations, on voit que la distance $d(O; M)$ est minimale lorsque le point C est « le plus bas » de la courbe d'équation $y = g(x)$. Donnez alors une valeur approchée de l'ordonnée de C, c'est-à-dire de la distance $d(O; M)$.

B Par le calcul

Notons A le point de la courbe $\mathscr{C}$ où la distance entre la courbe et l'origine est minimale. On conçoit intuitivement que [OA] est perpendiculaire à la tangente en A à la courbe $\mathscr{C}$. Nous admettrons ce résultat.

1. Notons a l'abscisse de A.

a) Quelle est la pente de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A ?

b) Déduisez-en que la pente de la droite (OA) est égale à $-a$.

2. Expliquez pourquoi a est solution de l'équation $-a^2 = \ln a$.

3. On pose $h(x) = x^2 + \ln x$ pour $x > 0$.

a) Étudiez les variations de la fonction h et déduisez-en que l'équation $x^2 + \ln x = 0$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$.

b) Donnez une valeur approchée de cette solution.

c) Comparez ce résultat à celui obtenu dans la partie A.

Utiliser la fonction ln

→ **Pour définir le logarithme décimal**

16 La fonction logarithme décimal

Par définition, la fonction logarithme décimal, notée log, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

A Propriétés de la fonction log

1. Vérifiez que les propriétés suivantes sont vraies :

a) Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$:

- $\log ab = \log a + \log b$;
- $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$.

b) Pour tout entier p et tout réel $a > 0$, $\log (a^p) = p \log a$.

c) Pour tout réel $a > 0$, $\log \sqrt{a} = \frac{1}{2} \log a$.

d) La fonction log est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Remarque
Ces propriétés sont analogues à celles de la fonction ln.

2. Tracez dans un même repère orthonormal (unité graphique : 1 cm) les courbes représentatives des fonctions ln et log pour $x \in]0; 10]$.

B Exemples d'utilisation de la fonction log

1. En sismologie

I_0 désignant une intensité de référence, la magnitude M d'un séisme d'intensité I est mesurée sur l'échelle de Richter par :

$$M = \log\left(\frac{I}{I_0}\right).$$

Quelle a été la magnitude du séisme de 1971 à Los Angeles, pour lequel on a relevé $I = 5{,}01 \times 10^6\, I_0$?

2. En acoustique

L'intensité I (en décibels) d'un son de puissance $\mathscr{P}$ est donnée par :

$$I = 10 \log \frac{\mathscr{P}}{\mathscr{P}_0},$$

où $\mathscr{P}_0$ correspond au seuil d'audibilité au-dessous duquel aucun son n'est perçu.

a) Quelle est l'intensité d'une conversation normale pour laquelle $\mathscr{P} = 10^5\, \mathscr{P}_0$?

b) Le seuil de douleur auditive est fixé à 130 décibels. Exprimez la puissance correspondant à un tel son, sous la forme $k\mathscr{P}_0$.

Entraînement

DE TÊTE

17 Calculez sans calculatrice :

a) $\ln 3 + \ln \frac{1}{3} + \ln e$;

b) $\ln e^4$;

c) $2 \ln 2 - \ln 4$;

d) $\ln e^{-1} + \ln e^3$.

18 Vérifiez sans l'aide de la calculatrice les égalités suivantes :

a) $\ln 3 + 2 \ln 9 = 5 \ln 3$;

b) $\ln 7 + \ln 5 + \ln \frac{1}{35} = 0$;

c) $\ln 25 + 2 \ln 5 - \ln \frac{1}{5} = \ln (5^5)$;

d) $\ln 12 - \ln 6 + \ln 2 = 2 \ln 2$.

19 Vérifiez sans calculatrice que les nombres suivants sont nuls :

a) $\ln 9 + \ln 4 - \ln 36$;

b) $-\ln 2 - \ln \frac{1}{2}$;

c) $\ln \frac{16}{9} - \ln 16 + \ln 9$;

d) $\frac{1}{2} \ln 9 - \ln 3$.

ENSEMBLES DE DÉFINITION

Pour les exercices 20 à 24

Trouvez l'ensemble de définition de chacune des fonctions *f* et *g*.

20 **a)** $f : x \mapsto \ln (-x)$;

b) $g : x \mapsto x \ln (3 - x)$.

21 **a)** $f : x \mapsto \ln (x^2)$;

b) $g : x \mapsto 2 \ln x$.

22 **a)** $f : x \mapsto \ln (x - 3) + \ln (3 + x)$;

b) $g : x \mapsto \ln (x^2 - 9)$.

23 **a)** $f : x \mapsto \frac{1}{2 - x} \ln x$;

b) $g : x \mapsto \ln \frac{x}{x + 3}$.

24 **a)** $f : x \mapsto \ln (x - 3) - \ln (x + 3)$;

b) $g : x \mapsto \ln \frac{x - 3}{x + 3}$.

LOGARITHME ET OPÉRATIONS

25 Vérifiez, sans l'aide de la calculatrice, les égalités proposées :

a) $\ln e^5 - 2 \ln e^2 = 1$;

b) $3 \ln e^{-3} + \frac{1}{2} \ln e^{10} = -4$.

26 Écrivez de manière plus simple les nombres suivants :

$A = \ln (e^{-5}) + 3e^{\ln 5}$;

$B = \frac{1}{2} \ln e^{0,5} - \ln e^{-4}$.

27 Écrivez de manière plus simple les nombres suivants :

$A = e^{\frac{1}{2} \ln 8 + 1}$;

$B = \frac{e^{2 + \ln 2}}{e^{1 - \ln 2}}$;

$C = \frac{e^{2 \ln 3}}{e^{3 \ln 2}}$.

28 Simplifiez les nombres suivants :

$A = \ln \left(\frac{e^5}{e^3}\right)$;

$B = \ln \sqrt{e} - \ln \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.

29 Simplifiez les nombres suivants :

$A = \ln \left(\frac{e^3}{5}\right) + \ln 5$;

$B = 2 \ln 7 - \ln \left(\frac{49}{e^3}\right)$.

30 Simplifiez les nombres suivants :

$A = e^{\ln 3 + 1}$;

$B = e^{-\ln 2 + \ln 3}$.

31 Simplifiez les nombres suivants :

$A = 2 \ln \left(\sqrt{2} + 1\right) + \ln \left(-2\sqrt{2} + 3\right)$;

$B = \ln \sqrt{7} + \ln \left(2\sqrt{7} + \frac{3}{\sqrt{7}}\right)$.

32 Simplifiez les écritures algébriques suivantes :

$A = e^{x - \ln 2x}$; $B = e^{x + \ln x} \times e^{\ln x - x}$;

$C = \frac{e^{\ln x + 1}}{e^{\ln x - 1}}$.

33 Vérifiez les égalités suivantes :

a) $\ln (e^x + 1) - x = \ln (1 + e^{-x})$;

b) $\ln \left(\frac{1 + e^x}{e^x - 1}\right) = \ln \left(\frac{1 + e^{-x}}{1 - e^{-x}}\right)$.

34 Exprimez en fonction de ln 2 les réels suivants :

$A = \ln 16$; $B = \ln \frac{1}{32}$;

$C = \frac{1}{2} \ln 16$; $D = -\ln 8$.

35 Vérifiez les égalités suivantes :

a) $3 \ln 2 + \ln 3 = \ln 24$;

b) $2 \ln \frac{1}{4} + 3 \ln 2 = \ln \frac{1}{2}$;

c) $2 \ln 100 - 3 \ln 10 + \ln 1\,000 = 4 \ln 10$.

36 Écrire les nombres A et B sous la forme ln C, où C est un nombre à déterminer.

$A = 3 \ln 2 - \ln 3 + \ln \frac{1}{2}$;

$B = \frac{1}{2} \ln 8 - 3 \ln 3$.

37 Écrivez les nombres A et B sous la forme ln C, où C est un nombre à déterminer.

$A = \frac{1}{2} \ln 25 - 2 \ln 2$;

$B = \ln 32 + \ln \frac{1}{3} - \ln 2$.

38 Exprimez les réels suivants en fonction de ln 2 et de ln 5.

$A = \ln 1\,000$; $B = \ln 500$;

$C = \ln \frac{8}{25}$; $D = \ln (0,025)$.

39 Comparez les réels *x* et *y* sans utiliser la calculatrice.

a) $x = 3 \ln 2$ et $y = 2 \ln 3$;

b) $x = \ln 5 - \ln 2$ et $y = \ln 12 - \ln 5$.

40 *f* est la fonction définie par :

$$f(x) = 2 \ln x + \ln (1 - x) - \ln 2.$$

a) Précisez l'ensemble de définition de *f*.

b) Écrivez $f(x)$ sous la forme $\ln g(x)$, où *g* est une fonction à déterminer.

41 On sait que $\ln 2 \approx 0,7$ et $\ln 7 \approx 1,9$.

Déduisez-en sans l'aide de la calculatrice des valeurs approchées de :

a) ln 56 ; **b)** ln 3,5 ;

c) ln 24,5.

42 $\ln 3 \approx 1,1$ et $\ln 5 \approx 1,6$.

Déduisez-en sans l'aide de la calculatrice des valeurs approchées de :

a) ln 27 ; **b)** ln 15 ;

c) ln 45.

ÉQUATIONS – SYSTÈMES

Pour les exercices 43 à 49

Résolvez les équations :

43 **a)** $e^{3x - 1} = 3$;

b) $e^{x - 1} = 2$.

44 **a)** $e^{-x} = 2$;

b) $e^{\frac{1}{x}} = 2$.

45 **a)** $e^x = \frac{1}{2}$;

b) $e^{3x} = \frac{1}{2}$.

46 **a)** $e^x(e^x - 2) = 0$;

b) $(e^x + 3)(e^x - 5) = 0$.

47 **a)** $(e^{-x} - 2)\left(e^{-x} - \frac{1}{2}\right) = 0$;

b) $(e^{3x} - 1)^2 = 4$.

48 **a)** $e^{x^2 - 3} = 2$;

b) $e^{x^2 - 3} = -2$.

49 **a)** $e^{2x} - 2e^{-2x} = 1$;

b) $(e^x - 1)^2 = 1$.

Aide On posera $X = e^{2x}$.

50 **a)** Résolvez l'équation : $5x^2 - 13x - 6 = 0$.

b) Résolvez l'équation : $5e^{4x} - 13e^{2x} - 6 = 0$.

Aide On posera $X = e^{2x}$.

Pour les exercices 51 à 59

Précisez l'ensemble de définition de l'équation puis résolvez-la.

51 $\ln (1 + 3x) = \ln (x + 1)$.

52 $\ln (2x + 1) = \ln (x^2 - 1)$.

53 $\ln (x - 3) - 1 = 0$.

54 $\ln x + \ln (x - 1) = 0$.

55 $\ln (4 - x) = 0$.

56 $\ln x - \ln (1 - x) = \ln 2$.

57 $\ln (x - 1) - \ln (2x) = 0$.

58 $\ln (2x + 1) + \ln (x - 3) = \ln (x + 5)$.

59 $\ln (x - 1) + \ln (2 - x) = \ln (6x)$.

60 **1.** Résolvez l'équation $x^2 - 2x - 3 = 0$.

2. a) Les deux racines sont-elles solutions de l'équation $\ln(x-2) + \ln x = \ln 3$?
Sont-elles solutions de l'équation $\ln[x(x-2)] = \ln 3$?

b) Expliquez vos résultats.

61 Résolvez chacune des deux équations.

1. $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$;

2. $\ln(x^2 + 5x + 6) = \ln(x + 11)$.

62 **1.** Résolvez l'équation $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

2. Résolvez l'équation $2(\ln x)^2 + 3\ln x - 2 = 0$.

Aide On posera $X = \ln x$.

63 Résolvez l'équation :

1. $\ln(x^2) = (\ln x)^2$.

2. $e^{2x} - 2e^x = 0$.

Pour les exercices 64 à 66
Résolvez les systèmes proposés :

64 **a)** $\begin{cases} 3X - 3Y = 3 \\ 3X - 2Y = 7 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2e^x - 3e^y = 3 \\ 3e^x - 2e^y = 7 \end{cases}$.

65 **a)** $\begin{cases} 2X = Y + 1 \\ 3X + 3 = 2Y \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 2e^{-x} = e^y + 1 \\ 3e^{-x} + 3 = 2e^y \end{cases}$.

66 $\begin{cases} \ln x + \ln 4 = \ln 3 - \ln y \\ e^x = e^{2-y} \end{cases}$.

INÉQUATIONS

Pour les exercices 67 à 71
Précisez l'ensemble de définition de chaque inéquation, puis résolvez-la :

67 **a)** $\ln x \leqslant 3$; **b)** $e^x > 2$.

68 **a)** $\ln x > e$; **b)** $e^x \leqslant 3$.

69 **a)** $e^{5x} > 3$; **b)** $e^{x-1} < 2$.

70 **a)** $\ln(2x-1) > -1$; **b)** $\ln\left(1 + \dfrac{2}{x}\right) \geqslant \ln 3$.

71 **a)** $\ln x \leqslant \ln(x^2 - 2x)$; **b)** $\dfrac{1}{2} \leqslant e^x \leqslant 2$.

72 **1.** Résolvez l'inéquation $-x^2 - 4x + 5 > 0$.

2. Déduisez-en l'ensemble de définition de l'inéquation $\ln(-x^2 - 4x + 5) + \ln\dfrac{1}{8} > 0$ et résolvez cette inéquation.

73 **1.** Expliquez pourquoi $-1 = \ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$.

2. Résolvez l'inéquation $(\ln x)^2 + \ln x > 0$.

74 **Des bactéries**
Une population de bactéries diminue dans la proportion de 5 % par heure. Au bout de combien d'heures la population sera-t-elle inférieure ou égale à la moitié de la population initiale ?

75 **Populations**

1. Une population diminue de 7 % par an. Au bout de combien d'années cette population sera-t-elle inférieure ou égale au quart de la population initiale ?

2. Une population augmente de 10 % par an. Au bout de combien d'années cette population aura-t-elle doublé ?

76 **Coupage d'un alcool avec de l'eau**
Un récipient contient 100 litres d'un mélange d'alcool et d'eau. On prélève chaque jour un litre du mélange et on rajoute un litre d'eau. Initialement le liquide titrait 90° d'alcool. On cherche au bout de combien de jours le mélange titrera moins de 50° d'alcool.

Note. *« un mélange titre 90° d'alcool » signifie que ce mélange contient 90 % d'alcool.*

1. Si on appelle a le titre avant et a' le titre après l'opération, démontrez que $a' = 0{,}99a$.

2. Démontrez que, au bout de n jours, le titre est égal à $0{,}99^n \times 90$.

3. a) Résolvez l'inéquation $0{,}99^n \times 90 < 50$.

b) Indiquez au bout de combien de jours le mélange titrera moins de 50° d'alcool.

ÉQUATIONS DE LA FORME $x^n = k$

Pour les exercices 77 à 84
Résoudre les équations proposées pour $x \in]0\,;+\infty[$.

77 **a)** $x^{12} = 25$; **b)** $x^{10} = 90$.

78 **a)** $x^{15} = 500$; **b)** $x^{20} = 800$.

79 **a)** $x^7 = 3$; **b)** $x^8 = \dfrac{3}{4}$.

80 **a)** $(2 + x)^3 = 5$; **b)** $\left(1 + \dfrac{x}{100}\right)^{12} = 1{,}1$.

81 **a)** $(0{,}1 + x)^{10} = 2$; **b)** $x^6 = \dfrac{64}{27}$.

82 **a)** $3x^{-3} = 7$; **b)** $\left(\dfrac{x^9}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 3$.

83 **a)** $x^{\sqrt{3}} = 2$; **b)** $x^{\pi} = 3$.

84 **a)** $x^{0,4} = 1{,}2$; **b)** $x^{\frac{1}{6}} = 10$.

AVEC LA CALCULATRICE

85 Trouvez le plus petit entier naturel n tel que :

a) $n \ln 1{,}3 \geqslant 2$;

b) $n \ln 0{,}2 \leqslant -100$.

86 Trouvez le plus petit entier naturel n tel que :

a) $(1{,}05)^n \geqslant 2$;

b) $(0{,}95)^n \leqslant 0{,}2$.

87 Trouvez le plus grand entier naturel n tel que :

a) $2^n < 100\,000$;

b) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \geqslant 10^{-6}$;

c) $(0{,}2)^n \geqslant 10^{-4}$.

ÉTUDE DE FONCTIONS

88 f est la fonction définie sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par :
$$f(x) = \frac{3}{x} + 2\ln x$$
et $\mathscr{C}$ une représentation graphique de f dans un repère.

1. Calculez $f'(x)$ et dressez le tableau de variation de f.

2. Représentez f.

89 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = x\ln x - x + 1.$$

1. Calculez $f'(x)$ et étudiez les variations de f.

2. Calculez $f(1)$ et déduisez-en le signe de $f(x)$.

90 f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = x^2 - 8x + 8 + 6\ln x.$$
Étudiez les variations de f et tracez sa courbe représentative.

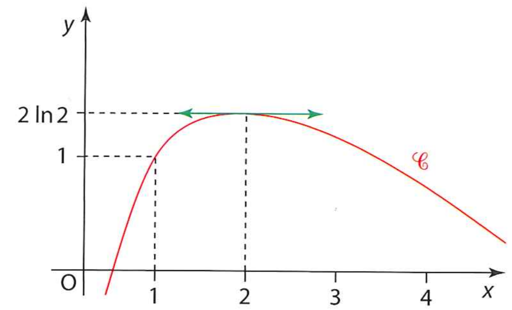
91 g est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$g(x) = \frac{1}{x} + \ln x.$$

1. Calculez $g'(x)$.

2. Dressez le tableau de variation de g.

3. Déduisez-en le signe de $g(x)$.

92 f est une fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = ax + b + c\ln x$$
où a, b et c sont des réels.
À partir des renseignements portés sur la figure ci-dessous, déterminez l'expression de $f(x)$.



93 f est une fonction définie sur $I =]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = ax + b + \frac{1}{x}\ln x$$
où a et b sont deux réels.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
$A(1\,;0)$ est un point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$.

1. Calculez, pour x dans I, $f'(x)$.

2. a) Pourquoi $f'(1) = 3$? Déduisez-en que $a + 1 = 3$.

b) Prouvez que $a + b = 0$.

3. Déduisez-en l'expression de $f(x)$.

94 **Datation au carbone 14**
Tant qu'un organisme est vivant, la quantité de carbone 14 qu'il contient est constante. Après sa mort, cette quantité diminue.
On appelle x la fraction de carbone 14 qui reste dans l'organisme mort et $a(x)$ l'âge correspondant, en années, au carbone 14 restant. On admet que l'on obtient une valeur approchée de $a(x)$ en utilisant la formule :
$$a(x) = -8\,300\ln x.$$

1. Au bout de combien d'années la quantité de carbone 14 a-t-elle diminué de moitié ? De trois quarts ?

2. Représentez graphiquement la fonction :
$$a : x \mapsto -8\,300\ln x.$$
Retrouvez graphiquement les résultats précédents.

Pour dater un ossement, l'archéologue prélève un échantillon dans lequel il mesure la proportion de Carbone 14 grâce à un spectromètre de masse.

95 **1.** g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x + 1$.

a) Calculez $g'(x)$ et dressez le tableau de variation de g.

b) Calculez $g(-1)$ et déduisez-en que pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$.

2. Sur la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = e^x + \ln x$.

a) Démontrez que pour tout x de $]0\,;+\infty[$: $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$.

b) Justifiez alors le tableau de variation suivant :

x	0 $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	↗

96 Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique = 1 cm).

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = ax + \frac{b}{\ln x}.$$

Déterminez les réels a et b pour que la représentation graphique (Γ) de g dans $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ coupe l'axe $(O,\vec{i})$ au point E d'abscisse e et que la tangente à (Γ) en E soit parallèle à la droite (D) d'équation $y = 2x$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{e}{\ln x}.$$

Soit $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a) Calculez la dérivée f' de la fonction f.

b) Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variation sur $]1\,;+\infty[$.

2. Donnez une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse e.

3. Construisez dans $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ les droites (D) et (T) et la courbe $(\mathscr{C})$.

97 Une entreprise fabrique des pièces qu'elle conditionne par centaines. Sa fabrication journalière varie entre 100 pièces et 650 pièces. On suppose que le bénéfice (positif ou négatif), exprimé en milliers d'euros en fonction de la quantité q de pièces fabriquées est donné par :

$$B = -2q^2 + 20q - 18 - 16\ln q$$

avec q exprimé en centaines : $1 \leqslant q \leqslant 6{,}5$.

1. f est la fonction définie sur $[1\,;6{,}5]$ par :

$$f(x) = -2x^2 + 20x - 18 - 16\ln x.$$

a) Étudiez le signe de $f'(x)$.

b) Dressez le tableau de variation de f.

c) Représentez f dans un repère orthonormal.

2. a) Quelle est la quantité de pièces à fabriquer pour obtenir un bénéfice maximal ?

b) Calculez ce bénéfice en euros.

98 **Partie A**

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 4 - 8\ln x.$$

1. Déterminez la dérivée de f.

2. Dressez le tableau de variation de f. Déterminez le signe de f sur $]0\,;+\infty[$.

Partie B

Le cours d'une action cotée en bourse, exprimée en dizaine d'euros, est égal à $f(x)$, où x représente le nombre de mois écoulés à partir du 1er décembre 2011.

1. Un investisseur décide d'acheter 2 500 actions de ce type. En quel mois de l'année 2012 est-il le plus judicieux pour lui d'acheter ?

2. Calculez sa dépense arrondie à l'euro.

99 **Partie A**

On note I l'intervalle $[10\,;50]$. Soit f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = \frac{100}{x}(3 - \ln x).$$

1. Calculez $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f sur I et montrer que $f'(x) = \dfrac{100}{x^2}(\ln x - 4)$.

2. Étudiez le signe de $f'(x)$ sur I.

Déduisez-en le tableau de variation de la fonction f.

3. Calculez $f(e^3)$ et en déduire le signe de f sur I.

Partie B

La société Dumoulin, qui fournit des hangars préfabriqués pour l'industrie, peut en produire jusqu'à 50 par mois. Son bénéfice pour q unités produites (q entier entre 10 et 50), est donné par $B(q) = -50(\ln q - 3)^2 + 30$ en milliers d'euros.

1. Montrez que $B'(q) = f(q)$.

2. En déduire le tableau de variation de la fonction B.

3. Déterminez à l'aide de la calculatrice l'ensemble des valeurs de q qui permettent d'obtenir un bénéfice positif.

4. Déterminez la valeur de q qui permet d'obtenir un bénéfice maximum. Précisez ce bénéfice maximum.

100 **BAC** **Partie A**

f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}.$$

1. Calculez la dérivée de f et étudiez le signe de cette dérivée. Dressez le tableau de variation de f sur $]0\,;5]$.

2. Résolvez l'équation $f(x) = 0$.

3. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]0\,;5]$.

Partie B

Une entreprise qui fabrique des ustensiles de cuisine sait qu'elle peut en produire jusqu'à 5 000 par jour et que son bénéfice exprimé en milliers par $B(q) = 10 \times \dfrac{1 + \ln q}{q}$ où q est le nombre d'unités produites en milliers.

1. Déterminez le nombre minimal d'unités à produire pour que l'entreprise atteigne le seuil de rentabilité.

2. Déterminez le nombre d'unités à produire pour que l'entreprise obtienne un bénéfice maximum, ainsi que la valeur de ce bénéfice en euros.

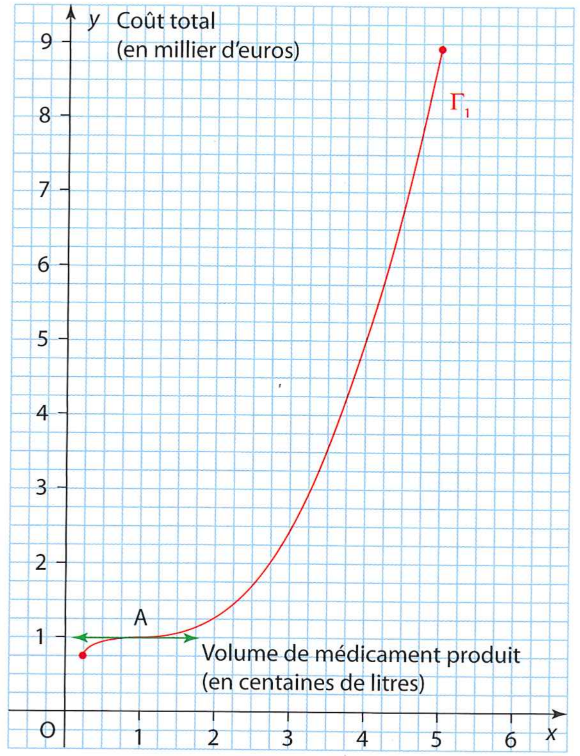
101 **BAC** Un laboratoire pharmaceutique fabrique un médicament qu'il commercialise sous forme liquide. Sa capacité journalière de production est comprise entre 25 et 500 litres, et on suppose que toute la production est commercialisée.

Dans tout l'exercice, les coûts et recettes sont exprimés en milliers d'euros, les quantités en centaines de litres.

Si x désigne la quantité journalière produite, on appelle $C_T(x)$, pour x variant de 0,25 à 5, le coût total de production correspondant.

La courbe Γ_1 fournie ci-après est la représentation graphique de la fonction C_T sur l'intervalle $[0{,}25\,;5]$.

La tangente à Γ_1 au point A(1 ; 1) est horizontale.



Partie A

1. a) On admet que la recette $R(x)$ (en milliers d'euros) résultant de la vente de x centaines de litres de médicament, est définie sur $[0{,}25\,;5]$ par $R(x) = 1{,}5x$.

Quelle est la recette (en euros) pour 200 litres de médicament vendus ?

b) Tracez, sur le graphique précédent, le segment représentant graphiquement la fonction R.

2. Lectures graphiques

*Les questions **a), b), c)** suivantes seront résolues à l'aide de lectures graphiques seulement.*

On fera apparaître les traits de construction sur le graphique précédent.

a) Déterminez des valeurs approximatives des bornes de la « plage de rentabilité », c'est-à-dire de l'intervalle correspondant aux quantités commercialisées dégageant un bénéfice positif.

b) Donnez une valeur approximative du bénéfice en euros réalisé par le laboratoire lorsque 200 litres de médicaments sont commercialisés.

c) Pour quelle quantité de médicament commercialisée le bénéfice paraît-il maximal ?

À combien peut-on évaluer le bénéfice maximal obtenu ?

Partie B

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction coût total C_T est définie sur l'intervalle [0,25 ; 5] par :

$$C_T(x) = x^2 - 2x \ln(x).$$

1. Justifiez que le bénéfice, en milliers d'euros, réalisé par le laboratoire pour x centaines de litres commercialisés, est donné par :

$$B(x) = 1{,}5x - x^2 + 2x \ln(x).$$

Calculez B(2), et comparez au résultat obtenu à la question **2.b)**, de la partie **A**.

2. Montrez que :

$$B'(x) = 2 \ln(x) - 2x + 3{,}5.$$

3. On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction B′, dérivée de la fonction B, sur l'intervalle [0,25 ; 5] :

x	0,25		1		5
$B'(x)$	y_1	↗	1,5	↘	y_2

On précise les encadrements :

$$0{,}22 < y_1 < 0{,}23 \quad \text{et} \quad -3{,}29 < y_2 < -3{,}28.$$

a) Démontrez que l'équation $B'(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle [0,25 ; 5].
Pour la suite de l'exercice, on prendra 2,77 pour valeur approchée de α.

b) Dressez le tableau précisant le signe de $B'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle [0,25 ; 5].
En déduire le tableau de variation de la fonction B sur l'intervalle [0,25 ; 5].

4. a) Pour quelle quantité de médicament commercialisée, le bénéfice est-il maximal ? (On donnera une valeur approchée de cette quantité en litres.)
Donnez alors une valeur approchée en euros de ce bénéfice maximal.

b) Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus graphiquement à la question **2.c)** de la partie **A** ?

102 **BAC** Dans une entreprise, le résultat mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé en vendant x centaines d'objets fabriqués, est modélisé par la fonction B définie et dérivable sur l'intervalle [0,1 ; 10] par :

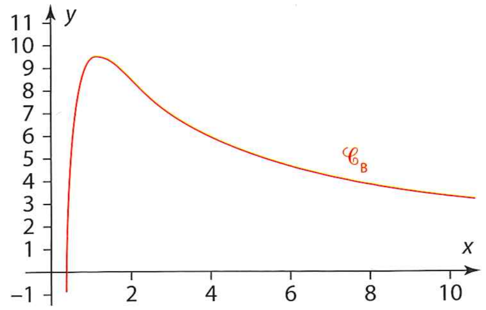
$$B(x) = 10 \times \frac{1 + \ln x}{x}.$$

Si $B(x)$ est positif, il s'agit d'un bénéfice ; s'il est négatif, il s'agit d'une perte.
Coraline utilise un logiciel de calcul formel. À plusieurs reprises, elle entre une commande, et le logiciel renvoie une réponse.
Elle obtient l'écran ci-après :

(Commande)	`B(x):=10*((1+ln(x))/x)`
(Réponse 1)	$x \mapsto 10*\left(\frac{1+\ln x}{x}\right)$
(Commande)	`dériver(B(x),x)`
(Réponse 2)	$\frac{10}{x^2}+\frac{10*(1+\ln(x))*(-1)}{x^2}$
(Commande)	`résoudre(B(x)=0,x)`
(Réponse 3)	`[exp(-1)]`
(Commande)	`résoudre(B(x)>0,x)`
(Réponse 4)	`[x>exp(-1)]`
(Commande)	`maximum(B(x),[0.1;10])`
(Réponse 5)	`10`

1. Traduisez sur le graphique donné ci-après, illustrant la courbe représentative de la fonction B, les réponses 3, 4 et 5 renvoyées par le logiciel de calcul formel.

2. Justifiez la réponse 3 renvoyée par le logiciel de calcul formel. Interprétez cette valeur en terme de résultat mensuel pour l'entreprise.



103 **BAC** **Partie A**

On considère la fonction f, définie sur l'intervalle]0 ; 20] par :

$$f(x) = (3e^2 - x) \ln x + 10.$$

1. Calculez la valeur exacte de $f(e^2)$, puis une valeur approchée à 0,01 près.

2. Montrez que, pour tout x de]0 ; 20],
$f'(x) = -\ln x + \frac{3e^2}{x} - 1$ où f' désigne la dérivée de la fonction f.

3. On admet que la fonction dérivée f' est strictement décroissante sur]0 ; 20] et que son tableau de variation est le suivant :

x	0		e^2		20
$f'(x)$	‖ $+\infty$	→	0	→	$f'(20)$

a) À l'aide du tableau de variation, donnez le signe de $f'(x)$ pour x appartenant à l'intervalle]0 ; 20].

b) Déterminez le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle]0 ; 20] et dressez son tableau de variation sur cet intervalle.

4. a) Montrez que, sur l'intervalle [0,6 ; 0,7], l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution notée α. À la calculatrice, donnez une valeur approchée de α à 0,001 près par excès.

b) Démontrez que $f(x)$ est négatif pour tout $x \in \,]0 ; \alpha[$ et que $f(x)$ est positif pour tout $x \in \,]\alpha ; 20]$.

Partie B

Une entreprise produit et vend chaque semaine x milliers de DVD, x appartenant à]0 ; 20].
Le bénéfice réalisé est égal à $f(x)$ milliers d'euros où f est la fonction étudiée dans la partie **A**.
En utilisant les résultats de la partie **A** :

1. Déterminez le nombre minimal de DVD à fabriquer pour que le bénéfice soit positif.

2. Déterminez le nombre de DVD à produire pour que le bénéfice soit maximal ainsi que la valeur, à 10 euros près, de ce bénéfice maximal.

FONCTIONS $x \mapsto \ln u(x)$

Dans cette rubrique, on admettra le résultat suivant qui dépasse le cadre du programme :
Théorème. Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Pour les exercices 104 à 108
Précisez l'ensemble de définition et calculez la dérivée de la fonction f.

104 $f : x \mapsto x + 3 - \ln(2 - x)$.

105 $f : x \mapsto \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

106 $f : x \mapsto \ln(x^2 - 1)$.

107 $f : x \mapsto \ln(3x - 6) + \sqrt{x}$.

108 $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

109 Pour un constructeur immobilier, le coût de production de n immeubles construits ($0 < n \leqslant 30$), en millions d'euros est donné par :

$$C(n) = 0{,}5n + 2{,}5 - 1{,}5 \ln(n + 2).$$

Chaque immeuble est vendu 400 000 euros.
Pour quel nombre d'immeubles le bénéfice réalisé est-il maximal ? Quel est ce bénéfice ?

POUR LA LOGIQUE

Pour les exercices 110 à 112
Dites si la propriété indiquée est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

110 **1.** $\forall x \in \,]0 ; +\infty[, \ln x = x^2$.
2. $\forall x \in \,]0 ; +\infty[, \ln x \neq x^2$.

111 **1.** $\exists x \in \,]0 ; +\infty[$ tel que $\ln x \neq x^2$.
2. $\exists x \in \,]0 ; +\infty[$ tel que $\ln x = x^2$.

112 $\exists x \in \,]0 ; +\infty[$ tel que $\ln x = x^2 - 1$.

Pour les exercices 113 et 114
On pose $f(x) = \ln x$.
Démontrez que la propriété indiquée est fausse.

113 $\forall a \in \,]0 ; +\infty[, \forall b \in \,]0 ; +\infty[, f(a + b) = f(a) + f(b)$.

114 $\forall x \in \,]0 ; +\infty[, f(x) \neq f'(x)$.

Un peu d'histoire

Chercheurs d'hier

Napier et l'invention des logarithmes

À la fin du XVIe et au début du XVIIe siècle, l'astronome se développe considérablement. L'étude du mouvement des planètes conduit à de longs et pénibles calculs (les fameux calculs astronomiques).

Les banquiers sont eux aussi confrontés à des calculs fastidieux car ils calculent des intérêts dans une économie occidentale dopée par l'exploitation des terres découvertes. Il n'est pas étonnant que les mathématiciens cherchent alors des méthodes simplificatrices de calcul.

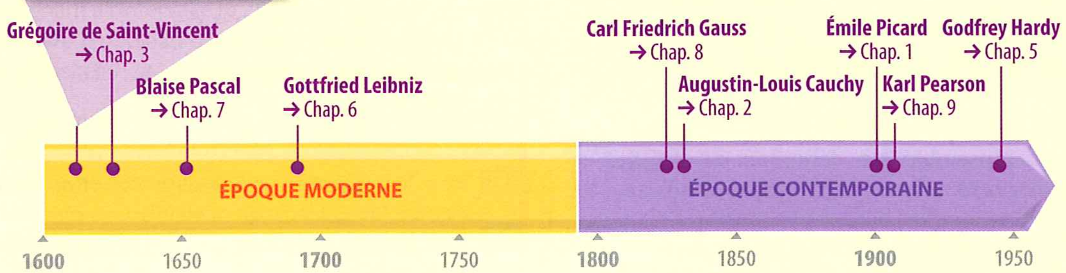
John Napier
1550 - 1617

L'idée est simple : remplacer des multiplications par des additions, mais la réalisation est difficile.

C'est l'Écossais Neper qui inventa un algorithme par lequel une addition remplaçait une multiplication.

John Napier ou Neper n'eut que quelques mois de formation universitaire à l'âge de treize ans, mais voyagea en Europe jusqu'à ses vingt ans. Protestant farouche, et politiquement sectaire, il proposait aussi l'adoption de toutes sortes d'instruments de guerre.

En 1614, il exposa une table numérique assez proche des logarithmes aujourd'hui dits népériens, dont l'explication fut publiée deux ans après sa mort. Il obtint aussi des résultats en trigonométrie sur la sphère.



À la même époque

En France

Le roi de France Henri IV, qui a mis fin aux guerres de religion entre protestants et catholiques, est assassiné par Ravaillac. Marie de Médicis devient régente, le futur Louis XIII étant trop jeune pour régner.

Henri IV
(1553 - 1610)

À la même époque

En peinture

Lyrisme, éloquence et sensualité s'expriment dans l'œuvre de Rubens, notamment dans ses compositions mythologiques aux accès souvent truculents.

Pierre-Paul Rubens
(1577 - 1640)

Sur le Web

http://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=napier
http://xavier.hubaut.info/coursmath/bio/napier.htm

Accompagnement personnalisé

Soutien

115 Simplifier une expression

On se propose de simplifier l'expression du nombre $A = \ln\left(\frac{e^3}{3}\right) + \ln(3e)$.

➜ *D'après l'expression de A, on pense à utiliser les propriétés de la fonction ln : logarithme d'un quotient, d'un produit…*

➜ *On sait que, pour $a > 0$ et $b > 0$, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.*

1. À l'aide de cette relation, transformez ln (3e).

➜ *$\ln\left(\frac{e^3}{3}\right)$ fait penser à la relation relative au logarithme d'un quotient : pour $a > 0$ et $b > 0$,*

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

2. À l'aide de cette relation, transformez $\ln\left(\frac{e^3}{3}\right)$.

➜ *On sait que, pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, $\ln a^n = n \ln a$. De plus, $\ln e = 1$.*

3. Utilisez cette relation pour transformer $\ln(e^3)$.

4. En utilisant ce qui précède, démontrez que $A = 4$.

116 Résoudre une équation

1. Résolvez l'équation $X^2 - 3X + 2 = 0$.

➜ *Il s'agit d'une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a = 1$, $b = -3$, $c = 2$. Vérifiez que le discriminant est égal à 1 et que les solutions sont $X_1 = 1$ et $X_2 = 2$.*

2. On se propose de résoudre l'équation :

$$(\ln x)^2 - 3\ln x + 2 = 0. \quad (E)$$

➜ *On remarque le lien entre cette équation et la précédente : ici « ln x » joue le rôle de X dans la question 1. Mais il convient de préciser l'ensemble de définition de cette équation.*

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction ln ? Déduisez-en que l'ensemble de définition de l'équation est $]0 ; +\infty[$.

b) En utilisant la question 1, démontrez que les solutions de cette équation sont les réels x de $]0 ; +\infty[$ tels que $\ln x = 1$ ou $\ln x = 2$.

➜ *Il convient d'indiquer les nombres x qui sont solutions de l'équation et non leur logarithme. On utilise la relation : $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$.*

c) Déterminez les solutions de l'équation proposée.

d) Une des solutions obtenues est e. Vérifiez directement que e est effectivement solution de (E).

Approfondissement

117 APPRENDRE À CHERCHER

On pose $f(x) = \ln(x^2)$ et $g(x) = 2\ln x$.

On se propose d'étudier les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentant ces deux fonctions.

➜ *Au premier abord, les fonctions f et g semblent identiques, d'après la relation $\ln x^2 = 2\ln x$, mais il convient de ne pas se précipiter vers cette conclusion trop hâtive.*

1. a) Les fonctions f et g ont-elles le même ensemble de définition ?

b) Les fonctions f et g sont-elles égales ?

2. Tracez dans un repère orthonormé la courbe d'équation $y = \ln x$, et déduisez-en l'allure de la courbe $\mathscr{C}_g$ en précisant les points de cette courbe d'abscisse $\frac{1}{e}$, 1 et e.

3. a) Expliquez pourquoi, pour $x > 0$, les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ coïncident.

b) Soit $x < 0$. En remarquant que $\ln(x^2) = \ln\left[(-x)^2\right]$, donnez l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$.

➜ *Retenez bien que, dans les exercices faisant intervenir la fonction ln, il convient de bien tenir compte de l'ensemble de définition des fonctions, en ayant à l'esprit que la fonction ln n'est définie que pour $x > 0$.*

118 Ensembles de définition

Trouvez l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x^2+1)}$;

b) $g : x \mapsto \dfrac{1}{\ln(x^2-1)+1}$;

c) $h : x \mapsto \dfrac{\ln(x-1)}{\ln(x+1)}$.

119 **1.** Résolvez l'équation : $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = 0$.

2. Résolvez l'inéquation : $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) \leqslant 0$.

120 **1.** Résolvez l'équation : $(\ln x)^3 = \ln x$.

2. Résolvez l'inéquation $(\ln x)^3 \leqslant \ln x$.

Le jour du BAC

121 Exercice commenté

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant des conseils.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

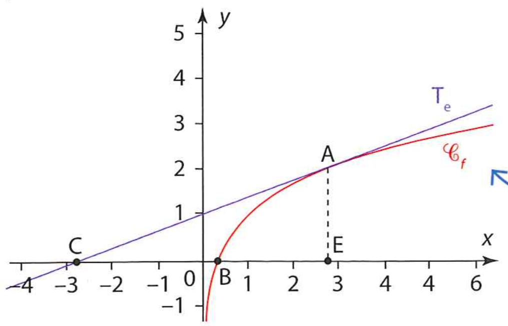
Le point A(e ; 2) appartient à $\mathscr{C}_f$ et on note T_e la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.

Le point C est le point d'intersection de la tangente T_e et de l'axe des abscisses.

Le point E a pour coordonnées (e ; 0).

On admettra que sur $]0\,;+\infty[$, $\mathscr{C}_f$ reste en dessous de T_e.

▸ Analyser l'énoncé
Dans cet exercice, on ne demande pas de construire la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f.



▸ Analyser l'énoncé
On peut remarquer que $\mathscr{C}_f$ peut être obtenue à partir de la courbe représentative de la fonction ln, par translation de vecteur $\vec{j}$ (en notant $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ le repère de référence).

1. a) Le point B est le point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de l'axe des abscisses. Calculez les coordonnées du point B.

b) Démontrez que, pour $x \geqslant \frac{1}{e}$, $f(x) \geqslant 0$.

2. a) Déterminez une équation de T_e.

b) Déduisez-en les coordonnées du point C.

c) Vérifiez que les points E et C sont symétriques par rapport à O, origine du repère.

Conseils

1. a) On écrit $f(x) = 0$, c'est-à-dire $\ln x = -1$, puis on utilise la propriété : $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$.

Commentaire
Sans calcul, on sait que l'ordonnée de B est nulle.

b) On utilise le fait que f est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ car $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$ pour tout x de $]0\,;+\infty[$.

2. a) On utilise la relation donnant une équation de la tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse a.

c) On vérifie que les abscisses de E et C sont opposées.

Commentaire
On vérifie que les résultats trouvés dans cette question sont en accord avec la représentation graphique de f.

→ Voir les corrigés p. 361

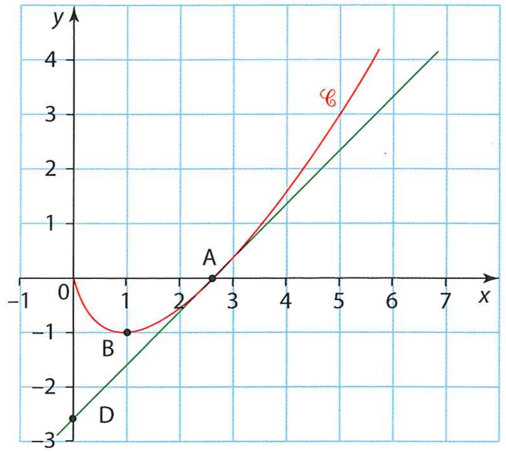
122 BAC A. Lectures graphiques

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente, dans un repère orthonormé, une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

On note f' la fonction dérivée de f.

La courbe $\mathscr{C}$ passe par les points A(e ; 0) et B(1 ; −1).

La courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 1 et la tangente au point d'abscisse e passe par le point D(0 ; −e).



1. Déterminez une équation de la droite (AD).

Aucune justification n'est exigée pour les réponses à la question 2.

2. Par lectures graphiques :

a) Déterminez $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Dressez le tableau de signes de f sur $]0\,;5]$.

c) Dressez le tableau de signes de f' sur $]0\,;5]$.

B. Étude de la fonction

La courbe $\mathscr{C}$ de la partie **A** est la représentation graphique de la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x(\ln x - 1)$.

1. a) Montrez que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a $f'(x) = \ln x$.

b) Étudiez le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ et en déduire le tableau de variation de f sur $]0\,;+\infty[$.

2. Retrouvez par le calcul les résultats de la partie **A**.

123 BAC

On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f définie sur $]0\,;1[\, \cup \,]1\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ et on nomme $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	$-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

1. Justifiez les éléments suivants donnés par ce tableau de variation : signe de $f'(x)$, image de $\frac{1}{e}$ par f.

2. a) Donnez une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point A d'abscisse $\frac{1}{e}$.

b) Déterminez une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse e.

3. Indiquez pour quelles valeurs du réel k l'équation $f(x) = k$:

a) ne possède aucune solution ;

b) possède une solution unique ;

c) possède deux solutions distinctes.

(Aucune justification n'est attendue dans cette question, on pourra s'aider de la représentation graphique de la fonction f obtenue à l'aide de la calculatrice.)

124 BAC

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, trois réponses sont proposées, une seule réponse est exacte. Aucune justification n'est demandée.

Soit f une fonction définie sur $]-\infty\,;0[\, \cup \,]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x + 1 + \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Le tableau de variation de la fonction f est donné ci-dessous.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
f	$-\infty$	↗		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$2\ln 2 + 3$	↗	$+\infty$

1. Dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$, l'équation $f(x) = e^2$ admet :

a) aucune solution ;

b) une unique solution ;

c) deux solutions.

2. La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse ln (1,5) admet un coefficient directeur :

a) strictement positif ;

b) strictement négatif ;

c) nul.

3. $f(-\ln 2)$ est égal à :

a) $-2\ln 2 + 3$;

b) $\ln\left(\frac{1}{4}\right)$;

c) $-2\ln 2 + 1$.