Chapitre 4 : suites numériques

I Vocabulaire et notations

1. Définition :

Une suite numérique est une liste de nombres réels qui sont numérotés par des entiers naturels, en commençant en général par 0 ou 1.

Exemple : On considère la série de nombres suivants :

3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11

La série précédente compte 5 termes.

Le premier terme de cette liste de valeurs est 3

2 - Suites numériques et fonctions :

a) Définition :

une suite numérique est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (ou sur une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

une suite est souvent désignée par une lettre ; par exemple U, V, W

$$U : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & U(n) \end{array}$$

on peut donc calculer $U(0)$, $U(1)$, $U(2)$, mais pas $U(-1,27)$ ni $U(3,12)$ ou encore $U(-2)$ car $-1,27$; $3,12$; -2 ne sont pas des nombres entiers naturels. On ne calcule les images que des nombres positifs, sans virgule.

b) Notation d'une suite

$U(n)$ ou encore U_n est le terme général de la suite U notée encore (U_n)

c) représentation graphique : température dans les capitales de différents pays un jours donné

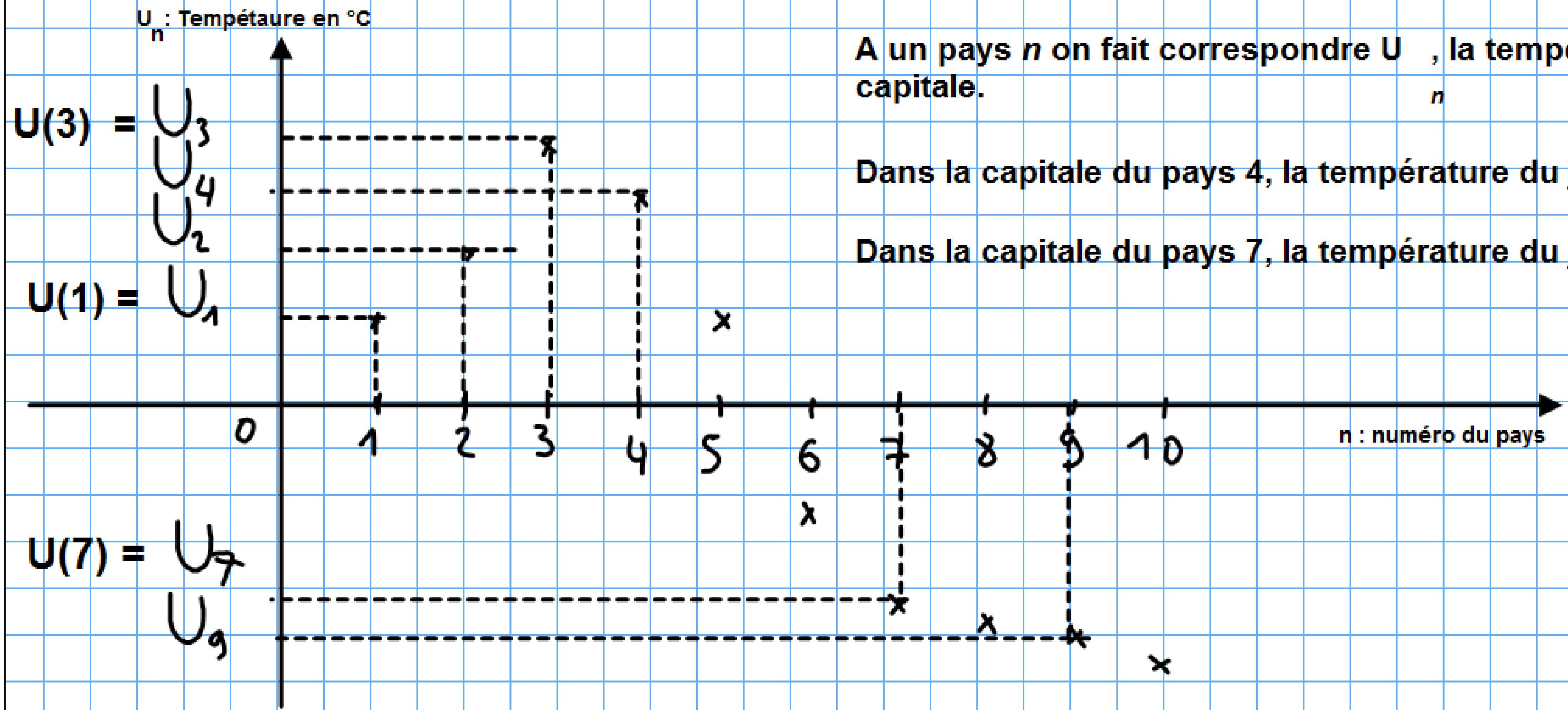
Le graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points.

Les pays sont numérotés 1; 2; 3 ; 4 ;.....; 10

A un pays *n* on fait correspondre U_n, la tempétaure du jour dans sa capitale.

Dans la capitale du pays 4, la température du jour est U_4 = 2,4°C

Dans la capitale du pays 7, la température du jour est U_7 = - 2,2°C



<u>remarque</u> si n est obligatoirement un nombre entier, U_n son image peut tout à fait être un nombre réel (à virgule).

<u>exemple</u> : On considère la suite (U_n) définie par $U(n) = U_n = 3n^2 + n - 1,2$

$U(2) = 3 \times (2)^2 + 2 - 1,2 = 3 \times 4 + 2 - 1,2 = 12,8$

3. Définition d'une suite de façon explicite

On dit qu'une suite est définie de façon explicite lorsque l'on connaît le terme général de la suite, c'est à dire l'expression algébrique de la fonction. On peut donc calculer un terme de la suite en remplaçant par une valeur de n.

Exemple : On considère la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = n^2 - 5$

Dressons le tableau de valeurs de cette suite : cela consiste à donner des valeurs à la variable n, et à calculer les images successives pour chaque valeur de n.

pour $n = 0$ on a $U_0 = 0^2 - 5 = 0 - 5 = -5$

$U_{0,7}$ n'existe pas car $0,7 \notin \mathbb{N}$

$U_1 = 1^2 - 5 = 1 - 5 = -4$

$U_2 = 2^2 - 5 = 4 - 5 = -1$

$U_3 = 3^2 - 5 = 9 - 5 = 4$

$U_4 = 4^2 - 5 = 16 - 5 = 11$

$U_5 = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$

d) Vocabulaire : U_0 ; U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5 sont les 6 premiers termes de la suite (U_n)

0 est le rang du terme U_0.

U_1 est le terme de rang 1

Le terme de rang 5 est U_5.

Le premier terme de la suite est U_0.

U_4 est le 5e terme de la suite.

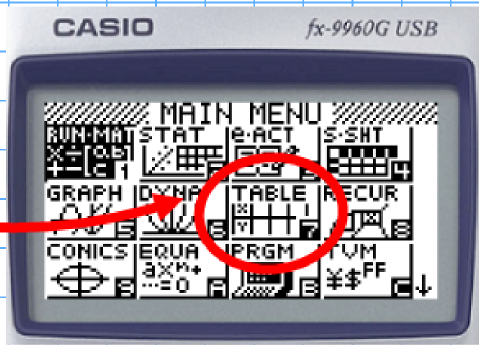
De façon générale, le terme de rang n est U_n.

Remarque : Lorsque la suite est définie de façon explicite, on connaît l'expression de U_n en fonction de n.

Méthode : savoir utiliser sa calculatrice pour générer les différents termes d'une suite $U_n = f(n)$

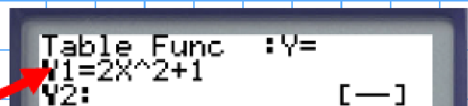
on considère la suite (U_n), $n \in \mathbb{N}$ telle que $U_n = 2n^2 + 1$.

avec la calculatrice en mode TABL ...



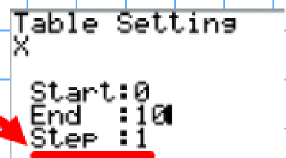
on rentre l'expression algébrique de la fonction associée à la suite (U_n).

Ici $f(x) = 2x^2 + 1$ ...



on paramètre la calculatrice ...

pour qu'elle génère les images de $x = 0$ à $x = 10$, de 1 en 1



n U_n

X	Y1
0	1
1	3
2	9
3	19

4	33
5	51
6	73
7	99

7	99
8	129
9	163
10	201

d'après le tableau de valeurs, on a :

$U_0 = 1$
$U_1 = 3$
$U_2 = 9$
$U_3 = 19$
$\vdots$
$U_8 = 129$

- quel est le terme de rang 7 ? Combien vaut-il ?

Le terme de rang 7 est $U_7 = 99$.

- quel est le 10ᵉ terme ? Combien vaut-il ?

Le 10ᵉ terme est $U_9 = 163$. U_9 est le 10ᵉ terme, mais c'est le terme de rang 9.

5. Définition d'une suite par récurrence :

Une suite est définie par récurrence, lorsque chaque terme se calcule à partir de la connaissance du terme précédent, et que le premier terme est donné.

exemple : Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = v_n - 3 \end{cases}$

Le 1er terme est v_0 ; le 2ème terme est v_1.

Pour obtenir v_1 il faut remplacer n par 0 dans la relation précédente

ainsi $v_1 = v_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

Pour obtenir v_2 il faut remplacer n par 1 ; on a donc

$v_2 = v_1 - 3 = -1 - 3 = -4$; de même $v_3 = v_2 - 3 = -4 - 3 = -7$.

La forme récurrente n'est pas pratique, car pour obtenir v_{28}, il faut calculer tous les termes jusqu'à v_{27} avant de pouvoir écrire que

$$v_{28} = v_{27} - 3.$$

Méthode : compter des intervalles et un nombre de termes.

Exemple :

$$U_7 \longrightarrow U_8 \longrightarrow U_9 \longrightarrow U_{10} \longrightarrow U_{11} \longrightarrow U_{12}$$

on dénombre 5 flèches (5 intervalles) en revanche, la suite de nombres de U_7 à U_{12} compte $5+1=6$ termes

de même de U_{35} à U_{48}, on dénombre $48-35=13$ intervalles, mais il y a $13+1=14$ termes.

Suites particulières : Lorsque le mécanisme est toujours le même entre 2 termes consécutifs d'une suite, on a affaire à une suite particulière : arithmétique ou géométrique.

II Suites arithmétiques

1. Définition

Une suite est dite **arithmétique** lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant <u>toujours</u> la même quantité r appelée **raison** de la suite.

<u>exemple</u> :

$$U_0 \xrightarrow{+7\times 3} U_7$$

$$\underset{2}{U_0} \xrightarrow[+r]{+3} \underset{5}{U_1} \xrightarrow[+r]{+3} \underset{8}{U_2} \xrightarrow[+r]{+3} \underset{11}{U_3} \xrightarrow[+r]{+3} \underset{14}{U_4} \xrightarrow[+r]{+3} \underset{17}{U_5} \xrightarrow[+r]{+3} \underset{20}{U_6} \xrightarrow[+r]{+3} \underset{23}{U_7}$$

Pour passer de U_0 à U_7 combien de fois a-t'on ajouté $+3$? On applique le point méthode : il y a donc $7-0=7$ flèches ; donc de U_0 à U_7 on a ajouté 7 fois $(+3)$: $+3+3+3 \ldots + 3 = +7\times 3$

Le schéma indique que $U_7 = U_0 + 7\times r$

2) Forme récurrente

On définit une suite par récurrence lorsque l'on établit le mécanisme permettant de passer d'un terme quelconque au suivant.

$$U_n \xrightarrow{+r} U_{n+1}$$

Pour une suite arithmétique $\boxed{U_{n+1} = U_n + r}$ pour tout n

Méthode : Pour montrer qu'une suite est arithmétique, il suffit d'établir que la quantité $U_{n+1} - U_n$ est constante : elle ne dépend pas de n. Cette quantité correspond à la raison de la suite

Application : On définit la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5 \end{cases}$

a) Montrer que la suite est arithmétique

b) Calculer U_4

Réponse : pour tout n, $U_{n+1} = U_n + 5$

$U_{n+1} - U_n = 5$: la quantité $U_{n+1} - U_n$ est constante et vaut toujours 5, ce qui prouve que (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $U_0 = 2$.

$$U_0 \xrightarrow{+5} U_1 \xrightarrow{+5} U_2 \xrightarrow{+5} U_3 \xrightarrow{+5} U_4$$
$$\overrightarrow{\quad + 4\times 5 \quad}$$

$U_1 = U_0 + 5 = 2 + 5 = 7$

$U_2 = U_1 + 5 = 7 + 5 = 12$

$U_3 = U_2 + 5 = 12 + 5 = 17$

$U_4 = U_3 + 5 = 17 + 5 = 22$

on remarque que $U_4 = U_0 + 4 \times 5$

3) Sens de variation

Dans une suite arithmétique, si la raison r est strictement positive les termes successifs vont en augmentant : la suite est croissante.

exemple : $U_0 \xrightarrow{+2} U_1 \xrightarrow{+2} U_2 \xrightarrow{+2} U_3 \ \dots\dots \ U_n \xrightarrow{+2} U_{n+1}$

$5 \qquad 7 \qquad 9 \qquad 11 \qquad U_n \qquad U_n + 2$

$U_{n+1} > U_n$ la suite est croissante.

- Si la raison est nulle, la suite est constante
- Si la raison est négative, la suite est décroissante

exemple :

$$U_0 \xrightarrow{-2} U_1 \xrightarrow{-2} U_2 \xrightarrow{-2} U_3 \xrightarrow{-2} \dots U_n \xrightarrow{-2} U_{n+1}$$

$$20 \quad 18 \quad 16 \quad 14 \quad U_n \quad U_n - 2$$

Les termes diminuent, la suite est décroissante