

I Vocabulaire et notations

1. Définition :

Une suite numérique est une liste de nombres réels qui sont numérotés par des entiers naturels, en commençant en général par 0 ou 1.

Exemple : On considère la série de nombres suivants :

3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11
/ ; / ; / ; /

La série précédente compte 5 **termes**.

Le premier **terme** de cette liste de valeurs est 3

2. Suites numériques et fonctions :

a) Définition :

une suite numérique est une fonction définie sur l'ensemble \mathbb{N} des entiers naturels (ou sur une partie de \mathbb{N}) et à valeurs dans l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} .

une suite est souvent désignée par une lettre ; par exemple U, v, W

$$U: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & U(n) \end{array}$$

on peut donc calculer $U(0), U(1), U(2)$, mais pas $U(-1,27)$ ni

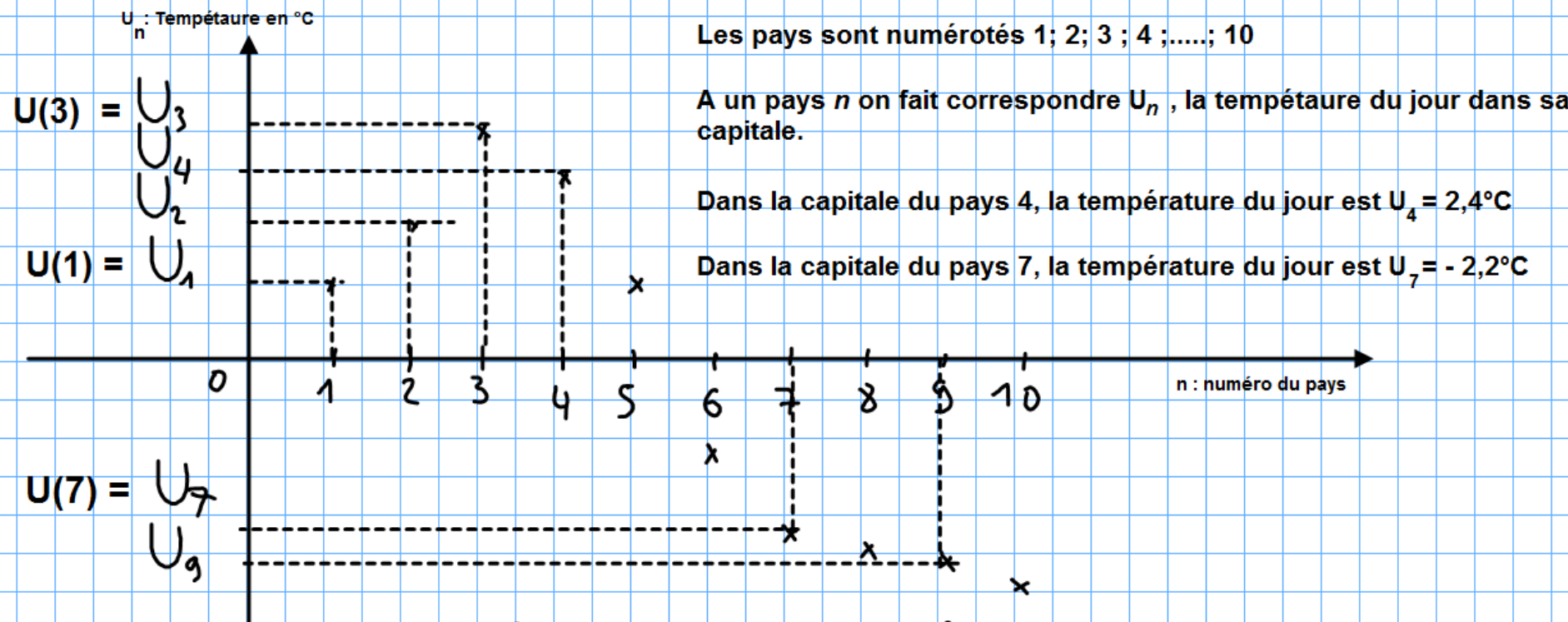
$U(3,12)$ ou encore $U(-2)$ car $-1,27; 3,12; -2$ ne sont pas des nombres entiers naturels. On ne calcule les images que des nombres positifs, sans virgule.

b) Notation d'une suite

$U(n)$ ou encore U_n est le terme général de la suite U notée encore (U_n)

c) représentation graphique: température dans les capitales de différents pays un jours donné

La représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points.



remarque si n est obligatoirement un nombre entier, U_n son image peut tout à fait être un nombre réel (à virgule).

exemple: On considère la suite (U_n) définie par $U(n) = U_n = 3n^2 + n - 1,2$
 $U(2) = 3 \times (2)^2 + 2 - 1,2 = 3 \times 4 + 2 - 1,2 = 12,8$

3. Définition d'une suite de façon explicite

On dit qu'une suite est définie de façon **explicite** lorsque l'on connaît le **terme général** de la suite, c'est à dire l'expression algébrique de la fonction. On peut donc calculer un terme de la suite en remplaçant par une valeur de n .

Exemple: On considère la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = n^2 - 5$.
Dressons le tableau de valeurs de cette suite: cela consiste à donner des valeurs à la variable n , et à calculer les images successives pour chaque valeur de n .

$$\text{pour } n=0 \text{ on a } U_0 = 0^2 - 5 = 0 - 5 = -5$$

$U_{0,7}$ n'existe pas car $0,7 \notin \mathbb{N}$

$$U_1 = 1^2 - 5 = 1 - 5 = -4$$

$$U_2 = 2^2 - 5 = 4 - 5 = -1$$

$$U_3 = 3^2 - 5 = 9 - 5 = 4$$

$$U_4 = 4^2 - 5 = 16 - 5 = 11$$

$$U_5 = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$$

d) Vocabulaire : U_0 ; U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5 sont les

6 premiers **termes** de la suite (U_n)

0 est le **rang** du terme U_0 .

U_1 est le terme de rang 1

Le terme de rang 5 est U_5 .

Le premier terme de la suite est U_0 .

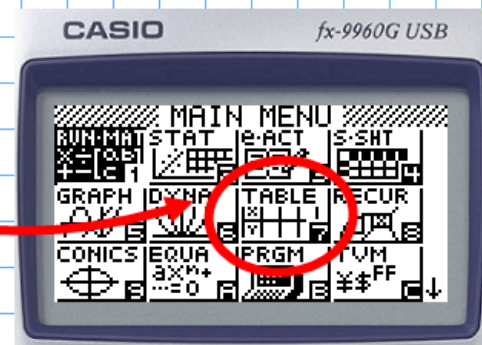
U_4 est le 5^e terme de la suite.

de façon générale, le terme de rang n est U_n .

Remarque : Lorsque la suite est définie de façon explicite, on connaît l'expression de U_n en fonction de n .

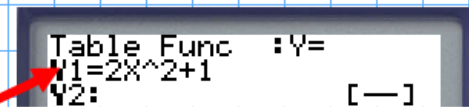
Méthode : savoir utiliser sa calculatrice pour générer les différents termes d'une suite $U_n = f(n)$

on considère la suite (U_n) , $n \in \mathbb{N}$ telle que $U_n = 2n^2 + 1$.
avec la calculatrice en mode TABL...

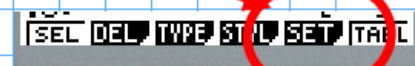


on rentre l'expression algébrique de la fonction associée à la suite (U_n) .

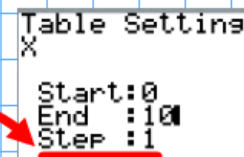
Ici $f(x) = 2x^2 + 1$...

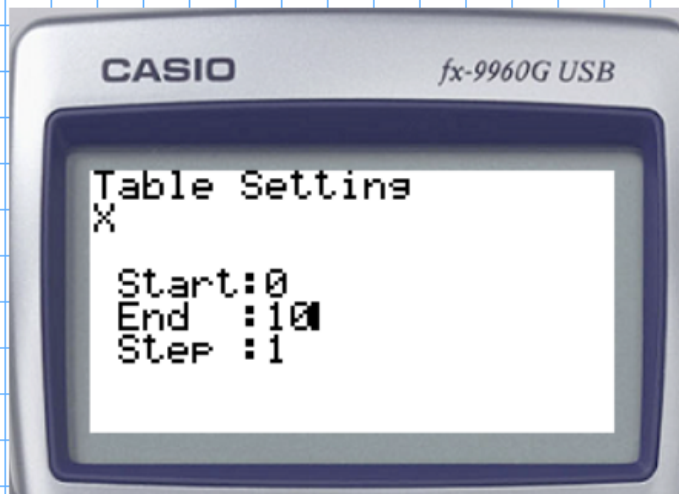


on paramètre la calculatrice ...



pour qu'elle génère les images de $x=0$ à $x=10$, de 1 en 1





x	$Y1$
0	1
1	3
2	9
3	19
4	33
5	51
6	73
7	99
8	129
9	163
10	201

d'après le tableau de valeurs, on a:

$$\begin{aligned}
 U_0 &= 1 \\
 U_1 &= 3 \\
 U_2 &= 9 \\
 U_3 &= 19 \\
 &\vdots \\
 U_8 &= 129
 \end{aligned}$$

• quel est le terme de rang 7 ? Combien vaut-il ?

Le terme de rang 7 est $U_7 = 99$.

• quel est le 10^è terme ? Combien vaut-il ?

Le 10^è terme est $U_9 = 163$. U_9 est le 10^è terme, mais c'est le terme de rang 9.

4. Définition d'une suite par récurrence:

Une suite est définie par récurrence, lorsque chaque terme se calcule à partir de la connaissance des termes précédents, et que le premier terme est donné.

exemple: Soit (U_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n - 3 \end{cases}$$

Le 1^{er} terme est U_0 ; le 2^{ème} terme est U_1 .

Pour obtenir U_1 il faut remplacer n par 0 dans la relation précédente
ainsi $U_1 = U_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

Pour obtenir U_2 il faut remplacer n par 1; on a donc

$$U_2 = U_1 - 3 = -1 - 3 = -4 \quad ; \quad \text{de même } U_3 = U_2 - 3 = -4 - 3 = -7.$$

La forme récurrente n'est pas pratique, car pour obtenir v_{28} ,
il faut calculer tous les termes jusqu'à v_{27} avant de pouvoir écrire que
 $v_{28} = v_{27} - 3$.

Méthode: compter des intervalles et un nombre de termes.

Exemple: $U_7 \longrightarrow U_8 \longrightarrow U_9 \longrightarrow U_{10} \longrightarrow U_{11} \longrightarrow U_{12}$

on dénombre 5 flèches (5 intervalles) en regardant la suite
de nombres de U_7 à U_{12} compte $5 + 1 = 6$ termes

de même de U_{35} à U_{48} , on dénombre $48 - 35 = 13$ intervalles,
mais il y a $13 + 1 = 14$ termes.

Suites particulières: Lorsque le mécanisme est toujours le même entre
2 termes consécutifs d'une suite, on a affaire à une suite particulière:
arithmétique ou géométrique.

II Suites arithmétiques

1. Définition

Une suite est dite arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même quantité r appelée raison de la suite.

exemple:
$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & + 7 \times 3 & & \\ & & & & & & \xrightarrow{\hspace{15em}} & & \\ U_0 & \xrightarrow{+3} & U_1 & \xrightarrow{+3} & U_2 & \xrightarrow{+3} & U_3 & \xrightarrow{+3} & U_4 & \xrightarrow{+3} & U_5 & \xrightarrow{+3} & U_6 & \xrightarrow{+3} & U_7 \\ 2 & +r & 5 & +r & 8 & +r & 11 & +r & 14 & +r & 17 & +r & 20 & +r & 23 \end{array}$$

Pour passer de U_0 à U_7 combien de fois a-t-on ajouté $+3$? On applique la

méthode: il y a donc $7 - 0 = 7$ flèches; donc de U_0 à U_7 on a ajouté

$$7 \text{ fois } (+3) : \quad +3 + 3 + 3 \dots + 3 = +7 \times 3$$

Le schéma indique que $U_7 = U_0 + 7 \times r$

2) Forme récurrente

On définit une suite par récurrence lorsque l'on établit le mécanisme permettant de passer d'un terme quelconque au suivant.

$$U_n \xrightarrow{+r} U_{n+1}$$

Soit une suite arithmétique $U_{n+1} = U_n + r$ pour tout n

Méthode: Soit montrer qu'une suite est arithmétique, il suffit d'établir que la quantité $U_{n+1} - U_n$ est constante: elle ne dépend pas de n . Cette quantité correspond à la raison de la suite

Application: On définit la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5, \text{ pour tout } n \end{cases}$

a) Montrer que la suite est arithmétique

b) Calculer U_4

Réponse: pour tout n , $U_{n+1} = U_n + 5$
 $U_{n+1} - U_n = 5$: la quantité $U_{n+1} - U_n$

est constante et vaut toujours 5, ce qui prouve que (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $U_0 = 2$.

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{+4 \times 5} \\
 U_0 \xrightarrow{+5} U_1 \xrightarrow{+5} U_2 \xrightarrow{+5} U_3 \xrightarrow{+5} U_4
 \end{array}$$

$$U_1 = U_0 + 5 = 2 + 5 = 7$$

$$U_3 = U_2 + 5 = 12 + 5 = 17$$

$$U_2 = U_1 + 5 = 7 + 5 = 12$$

$$U_4 = U_3 + 5 = 17 + 5 = 22$$

on remarque que $U_4 = U_0 + 4 \times 5$

3) Sens de variation

Dans une suite arithmétique, si la raison r est strictement positive les termes successifs vont en augmentant: la suite est croissante.

exemple: $U_0 \xrightarrow{+2} U_1 \xrightarrow{+2} U_2 \xrightarrow{+2} U_3 \dots U_n \xrightarrow{+2} U_{n+1}$

$$\begin{array}{ccccccc}
 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & \dots & & U_n & & U_{n+1} \\
 & & & & & & & & & & & & U_n + 2
 \end{array}$$

$U_{n+1} > U_n$ la suite est croissante.

- Si la raison est nulle, la suite est constante
- Si la raison est négative, la suite est décroissante

exemple:

$$U_0 \xrightarrow{-2} U_1 \xrightarrow{-2} U_2 \xrightarrow{-2} U_3 \xrightarrow{-2} \dots U_n \xrightarrow{-2} U_{n+1}$$

$20 \qquad 18 \qquad 16 \qquad 14 \qquad \qquad U_n \qquad U_n - 2$

Les termes diminuent, la suite est décroissante

4) représentation graphique:

Le graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points alignés.

exemple: On définit la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5, \text{ pour tout } n \end{cases}$

