Chapitre 8 : Fonction exponentielle.

Au chapitre précédent, nous avons établi que pour résoudre une équation avec logarithme népérien, on devait toujours se ramener au cas : $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

Ainsi l'équation $\ln x = \ln 5$ *équivaut à* $x = 5$

En revanche pour résoudre l'équation $\ln x = 3$*, on devait transformer 3 en ln k.*

On a établi à l'aide du nombre e *que* $\ln e^3 = 3$ *ainsi* $\ln x = k$ *équivaut à* $\ln x = \ln e^k$

Conclusion, pour tout réel x*, il existe un* **unique** *réel strictement positif* y *tel que* x *puisse s'écrire sous la forme* $x = \ln y$. Avec $x=3$, il existe un réel strictement positif y tel que x = ln y : $y = e^3$

$$\underbrace{3}_{x} = \ln \underbrace{e^3}_{y}$$

I Fonction exponentielle

1. Définition

La fonction exponentielle est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à chaque réel x associe le réel y dont le logarithme népérien est x : $x \longmapsto y = e^x$ et $\ln y = x$

$$\ln(e^x) = x$$

Exemples :

Avec la définition précédente, on a :

exp (k) est le nombre dont le logarithme népérien est k ;
exp (0) est le nombre dont le logarithme népérien est 0 : ainsi $e^0 = 1$ car $\ln 1 = 0$
exp (1) est le nombre dont le logarithme népérien est 1 : ainsi $e^1 = e$ car $\ln e = 1$

2) Conséquences : propriétés

(1) La fonction logarithme népérien étant définie pour tout $x > 0$, et étant donné que $x = e^y$ on en déduit que la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^x > 0}$: une exponentielle est toujours strictement positive

(2) Pour tout réel x et pour tout réel $y > 0$, $y = e^x$ si et seulement si $\ln y = \ln(e^x) = x$

(3) Pour tout réel $x > 0$, $\boxed{e^{\ln x} = x}$

3) Dérivée

Soit f la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe le réel $\boxed{f(x) = e^x \quad \text{On a } f'(x) = e^x}$

$$(e^x)' = e^x$$

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, on en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.