Chapitre 8 : Fonction exponentielle.

Au chapitre précédent, nous avons établi que pour résoudre une équation avec logarithme népérien, on devait toujours se ramener au cas : $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$

Ainsi l'équation $\ln x = \ln 5$ *équivaut à* $x = 5$

En revanche pour résoudre l'équation $\ln x = 3$*, on devait transformer 3 en ln k.*

On a établi à l'aide du nombre e *que* $\ln e^3 = 3$ *ainsi* $\ln x = k$ *équivaut à* $\ln x = \ln e^k$

Conclusion, pour tout réel x*, il existe un* **unique** *réel strictement positif* y *tel que* x *puisse s'écrire sous la forme* $x = \ln y$. Avec $x=3$, il existe un réel strictement positif y tel que x = ln y : $y = e^3$

$$\underset{x}{3} = \ln \underset{y}{e^3}$$

I Fonction exponentielle

1. Définition

La fonction exponentielle est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui à chaque réel x associe le réel y dont le logarithme népérien est x :

$$x \longmapsto y = e^x \quad \text{et} \quad \ln y = x$$

$$\ln(e^x) = x$$

Exemples :

Avec la définition précédente, on a :

exp (k) est le nombre dont le logarithme népérien est k ;
exp (0) est le nombre dont le logarithme népérien est 0 : ainsi e^0 = 1 car ln 1 = 0
exp (1) est le nombre dont le logarithme népérien est 1 : ainsi e^1 = e car ln e = 1

2) Conséquences : propriétés

(1) La fonction logarithme népérien étant définie pour tout $x>0$, et étant donné que $x=e^y$ on en déduit que la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^x > 0}$: une exponentielle est toujours strictement positive

(2) Pour tout réel x et pour tout réel $y>0$, $y=e^x$ si et seulement si $\ln y = \ln(e^x) = x$

(3) Pour tout réel $x>0$, $\boxed{e^{\ln x} = x}$

3) Dérivée

Soit f la fonction qui à tout $x \in \mathbb{R}$ associe le réel $\boxed{f(x) = e^x \quad \text{On a } f'(x) = e^x}$ $(e^x)' = e^x$

Comme une exponentielle est toujours strictement positive, on en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) Tableau de variation et courbe représentative.

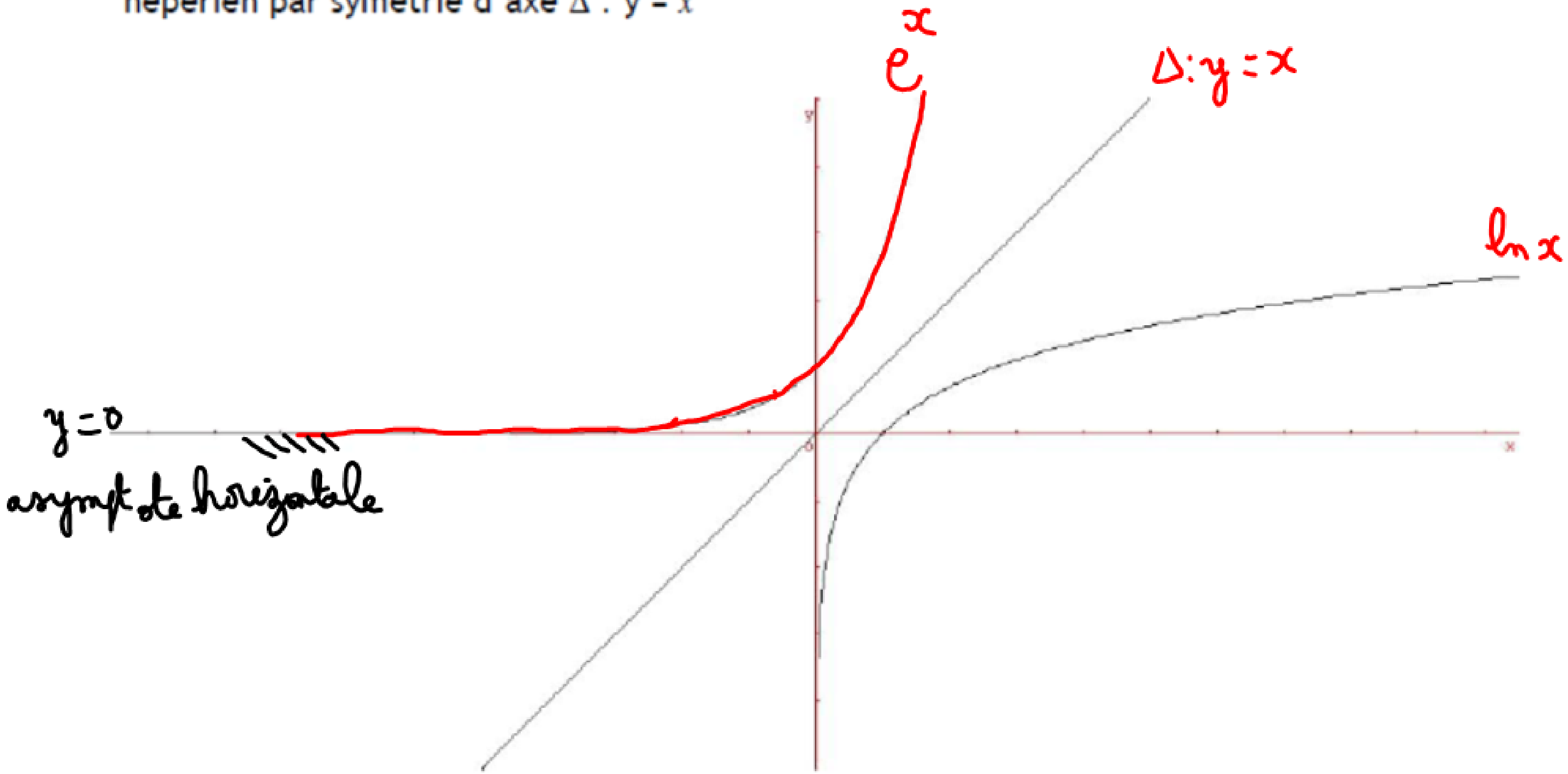
tableau de variation :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
e^x	$0 \nearrow +\infty$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$.

La courbe représentative de la fonction exponentielle s'obtient d'après celle de la fonction logarithme népérien par symétrie d'axe Δ : $y = x$



Conséquences :

(4) Du fait de la stricte croissance de la fonction exponentielle (voir la courbe), pour tout réel a et tout réel b, on a :

$e^a = e^b$ si et seulement si ....a = b....

$e^a < e^b$ si et seulement si ....a < b....

METHODES :

M1- Résoudre une équation ou une inéquation $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ OU $e^{u(x)} \leq e^{v(x)}$

M2- Résoudre une équation du type $e^{u(x)} = k$ OU $e^{u(x)} \leq k$, $k \in \mathbb{R}$.

METHODES :

M1- Résoudre une équation ou une inéquation $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ OU $e^{u(x)} \leq e^{v(x)}$

exemples : a) $e^{5x+4} = e^{2x-1}$

La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, il n'y a pas d'ensemble E à déterminer, comme cela a pu être le cas dans la situation d'équations avec logarithme népérien. On applique directement $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$

$$e^{5x+4} = e^{2x-1} \Leftrightarrow 5x + 4 = 2x - 1 \Leftrightarrow 3x = -5 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$$

$$\boxed{S = \left\{ -\frac{5}{3} \right\}}$$

b) $e^{x^2-x+1} \leqslant e^{2x-1}$

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 1 \leqslant 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leqslant 0$$

$x_1 = 1$ est racine évidente

on sait que $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{1} = 2$

on en déduit que $x_2 = 2$.

Le trinôme est du signe de "a" à l'extérieur des racines.

on en déduit que $x^2 - 3x + 2 \leqslant 0 \iff x \in [1;2]$

Conclusion : $e^{x^2-x+1} \leqslant e^{2x-1} \iff x \in [1;2]$

$$\boxed{\mathcal{S} = [1;2]}$$

M2- Résoudre une équation du type $e^{u(x)} = k$ OU $e^{u(x)} \leq k$, $k \in \mathbb{R}$.

résoudre $e^{x^2-6x+3} = 9$

on se ramène au cas $e^a = e^b \iff a = b$ pour cela il s'agit d'exprimer 9 sous la forme de $e^{\ln 9}$

$$e^{x^2-6x+3} = 9$$

$$\iff e^{x^2-6x+3} = e^{\ln 9}$$

$$\iff x^2 - 6x + 3 = \ln 9$$

$$\iff x^2 \underbrace{-6}_{b}x + \underbrace{3 - 2\ln 3}_{c} = 0$$

$\ln 9 = \ln 3^2 = 2\ln 3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-6)^2 - 4 \times (1) \times (3 - 2\ln 3)$

$= 36 - 4(3 - 2\ln 3)$

$= 36 - 12 + 8\ln 3 = 24 + 8\ln 3$

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \dfrac{6 - \sqrt{24 + 8\ln 3}}{2}$ $\quad x_2 = \dfrac{6 + \sqrt{24 + 8\ln 3}}{2}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{6 - \sqrt{24 + 8\ln 3}}{2} ; \frac{6 + \sqrt{24 + 8\ln 3}}{2} \right\}}$$

b) $e^{x^2-3x+1} = -3$ impossible car une exponentielle est toujours positive : $S = \emptyset$

c) $e^{x+1} > -7$ une exponentielle est toujours positive donc quelque soit $x \in \mathbb{R}$
$e^{x+1} > 0$: $S = \mathbb{R}$

d) $e^{5x-7} = 0$ impossible car une exponentielle est toujours strictement positive.

$S = \emptyset$

II Propriétés algébriques

Au chapitre précédent, nous avons établi que la fonction exponentielle se manipule comme une fonction puissance du nombre e. Exponentielle x se lit également « e puissance x », on applique alors les règles usuelles sur les puissances.

Rappels sur les puissances : $a^b \times a^c = a^{b+c}$ on a aussi $(a^b)^c = a^{b\times c}$

1) Exponentielle d'une somme

Pour tous réels *a* et *b*, $e^{a+b} = e^a \times e^b$

Pour tous réels *a*, *b* et *c*, $e^{a+b+c} = e^a \times e^b \times e^c$; pour a=b=c on a en particulier $e^{3a} = (e^a)^3$

Pour tout réel *a* et tout entier naturel n, $e^{n.a} = (e^a)^n$

2) Exponentielle d'une différence.

Pour tous réels a et b, $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; $e^{-b} = e^{0-b} = \dfrac{e^0}{e^b}$

$$e^a \times e^{-b} = e^a \times \frac{1}{e^b} = \frac{e^a}{e^b}$$

METHODES :

M 3- Résoudre une équation ou une inéquation en utilisant les propriétés algébriques de exp.

a) Résoudre : $e^{2x} \times e^{3x-1} \geqslant 2$

d'après les propriétés algébriques de l'exponentielle on a :

$$e^{2x} \times e^{3x-1} \geqslant 2$$

$$\iff e^{2x+(3x-1)} \geqslant 2$$

$$\iff e^{5x-1} \geqslant 2$$

$$\iff e^{5x-1} \geqslant e^{\ln 2}$$

$$\iff 5x-1 \geqslant \ln 2$$

$$\iff 5x \geqslant \ln 2 - 1$$

$$\iff x \geqslant \frac{\ln 2 - 1}{5}$$

$$\boxed{S = \left[\frac{\ln 2 - 1}{5} ; +\infty \right[}$$

b) Résoudre $e^{2\ln(3x-1)} = 5$

$e^{a \times b} = (e^{a})^{b}$

$$\left(e^{\ln 3x-1}\right)^2 = 5$$

$$X^2 = k \iff X = \sqrt{k} \text{ ou } X = -\sqrt{k}$$

$\iff (3x-1)^2 = 5$

$\iff 3x - 1 = \sqrt{5}$ ou $3x - 1 = -\sqrt{5}$

$\iff 3x = 1 + \sqrt{5}$ $\qquad 3x = 1 - \sqrt{5}$

$\iff x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{3}$ $\qquad x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{3}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{3} ; \frac{1+\sqrt{5}}{3} \right\}}$$

M 4- Se ramener à une équation du second degré.

a) $-2e^{2x} + 5e^{x} + 3 = 0$

on remarque que $e^{2x} = (e^{x})^2$

posons $X = e^{x}$ on a donc : $-2X^2 + 5X + 3 = 0$

Résolvons cette équation d'inconnue X :

$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4 \times (-2) \times (3) = 25 + 8 \times 3 = 25 + 24 = 49$

$\sqrt{\Delta} = 7$

$X_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $\qquad X_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$X_1 = \dfrac{-5-7}{2 \times (-2)}$ $\qquad X_2 = \dfrac{-5+7}{2 \times (-2)}$

$X_1 = 3$ $\qquad X_2 = -\dfrac{1}{2}$

Comme on a posé $X = e^{x}$, on a à présent à résoudre :

$e^{x_1} = 3$ $\qquad e^{x_2} = -\dfrac{1}{2}$ impossible une exponentielle est toujours strictement positive

$a = b$ | $\Leftrightarrow \ln(e^{x_1}) = \ln 3$

$\ln a = \ln b$ | $\Leftrightarrow x_1 = \ln 3$

$\boxed{\mathcal{S} = \{\ln 3\}}$

b) Résoudre $-2e^{2x} + 5e^{x} + 3 < 0$

De même que précédemment, on pose $X = e^{x}$ et on obtient

$$-2X^2 + 5X + 3 < 0$$

Le trinôme sera négatif (du signe de a) à l'extérieur des racines

$$X \in \left]-\infty ; -\tfrac{1}{2}\right[\cup \left]3 ; +\infty\right[$$

on a donc à résoudre $X < -\frac{1}{2}$ ou $X > 3$

$\iff e^{x} < -\frac{1}{2}$ ou $e^{x} > 3$

$e^{x} < -\frac{1}{2}$ impossible

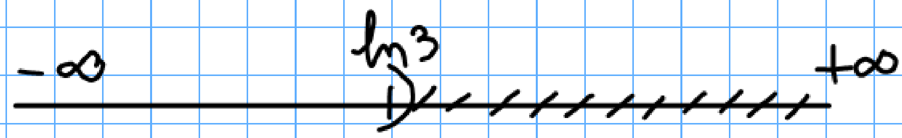
une exponentielle est toujours strictement positive

$e^{x} > 3$

$\iff \ln e^{x} > \ln 3$

$\iff x > \ln 3$

$$\boxed{\begin{array}{c} a > b \\ \ln a > \ln b \end{array}}$$



$$\mathcal{S} = \left]\ln 3 ; +\infty\right[$$

Application : exercices 52 à 55 page 87

Pour les exercices 52 à 55

Résolvez les inéquations :

52 a) $e^{3x-1} \leqslant e^{2x}$; b) $e^{x+1} > 1$.

53 a) $e^{x^2} > 1$; b) $e^{x^2} \leqslant e^4$.

54 a) $(e^x + 1)(e^x - 1) < 0$; b) $e^{2x} - e^{x+1} \geqslant 0$.

55 a) $e^{x^2} > e^{2x^2-x}$; b) $e^{x-1} > \dfrac{1}{e^x}$.