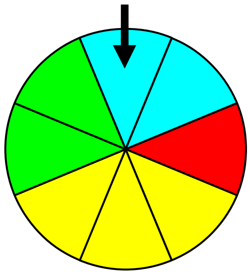
CHAPITRE 5 : PROBABILITES

I. Expérience aléatoire

1) Quelques exemples :

- On lance une pièce de monnaie et on regarde la face supérieure.
- On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
- On fait tourner une roue marquée sur ses secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche.



2) Vocabulaire et définitions :

Une expérience est aléatoire lorsqu'elle a plusieurs issues (résultats) et que l'on ne peut pas prévoir, a priori, quel résultat se produira.
L'ensemble des issues d'une expérience s'appelle l'univers

Exemple :
Lancer un dé est une expérience aléatoire.
Cette expérience conduit à 6 issues qui sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6
L'univers des possibles est donc $\Omega = \{1;2;3;4;5;6\}$

3) Réalisons une expérience aléatoire :

Chaque élève lance 100 fois un dé à six faces et note les effectifs d'apparition de chaque face dans le tableau :

Faces	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***Total***
Effectifs	20	14	10	22	16	18	100

On regroupe ensuite l'ensemble des résultats de la classe dans un même tableau puis on calcule les fréquences d'apparition de chaque face.

Faces	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***Total***
Effectifs	434	456	443	459	435	473	2700
Fréquences	16,1%	16,9%	16,4%	17%	16,1%	17,5%	100

Les fréquences d'apparition sont très proches les unes des autres.
Théoriquement, il y a autant de chance d'obtenir un 1, un 2, … ou un 6.

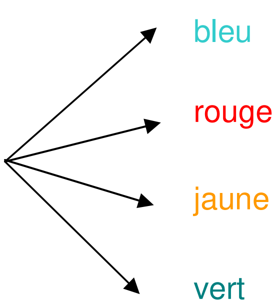
En effectuant un nombre encore plus grand de lancers, les fréquences se rapprocheraient les unes des autres de façon encore plus évidente.

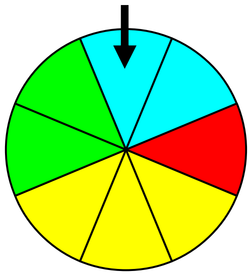
La suite de la leçon nous expliquera comment calculer les fréquences théoriques d'une expérience aléatoire.

II. Probabilité d'un évènement

1) Arbre des possibles

Exemple :
Lorsqu'on fait tourner la roue, quatre **issues** sont possibles. On le schématise sur un schéma appelé **arbre des possibles** :





Définition :

L'arbre des possibles est un schéma qui permet de visualiser toutes les issues d'une expérience aléatoire.

2) Probabilité

Définition :

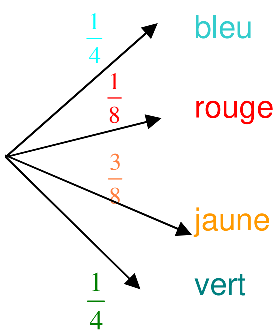
Les fréquences obtenues d'un événement ***E*** se rapprochent d'une valeur théorique lorsque le nombre d'expériences augmente (Loi des grands nombres). Cette valeur s'appelle la **probabilité** de l'événement ***E***.

Exemple :

2 secteurs sur 8 sont de couleur bleue. Lors d'une expérience aléatoire, on a donc 2 chances sur 8 d'obtenir un secteur de couleur bleue.

On dit que la probabilité d'obtenir un secteur bleu est égale à $\frac{2}{8}$, soit $\frac{1}{4}$.

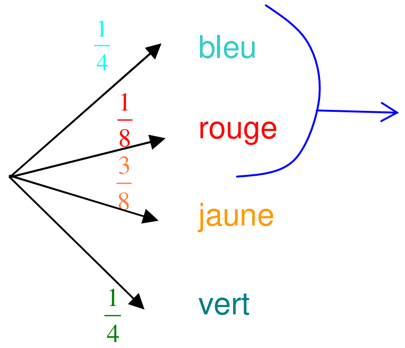
On inscrit **sur les branches** de l'arbre des possibles les probabilités des différentes **éventualités**.



3) Evènement

a) Exemple :

Soit l'évènement ***E*** : « La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge ».
On pourrait se demander quelle est la probabilité que cet évènement se réalise ?



Deux issues ***réalisent*** l'événement E

$\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

On dit que la probabilité que l'évènement ***E*** se réalise est égale à $\frac{3}{8}$ et on note :

P(***E***) = $\frac{3}{8}$.

b) Définitions :

- Un **évènement** est constitué de **plusieurs issues** d'une même expérience aléatoire.
- Les événements élémentaires sont les événements réduits à une unique issue de l'expérience.

Dans l'exemple précédent :
« La roue s'arrête sur un secteur bleu ou rouge » est un évènement.
« La roue s'arrête sur un secteur bleu » est un évènement **élémentaire** car une seule issue le réalise

Méthode : Dénombrer pour calculer une probabilité

Vidéo **Edpuzzle**

On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.
Soit ***E*** l'évènement : « On tire un as ».
Quelle est la probabilité que l'évènement ***E*** se réalise ?

Il a 32 issues possibles car il existe 32 façon différentes de tirer une carte.
L'événement ***E*** possède 4 issues possibles : As de cœur, as de carreau, as de trèfle et as de pique.

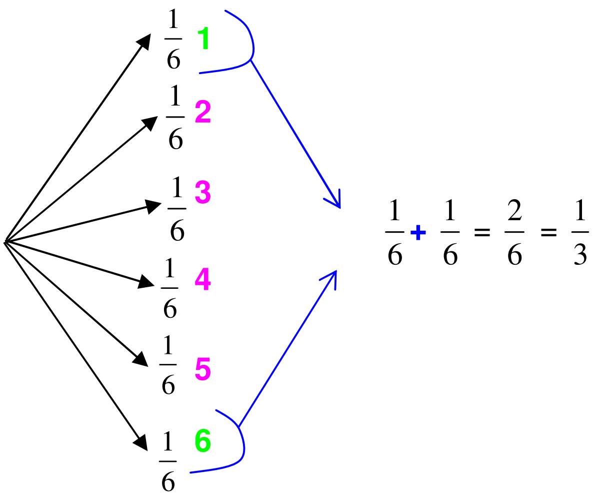
La probabilité que l'événement ***E*** se réalise est donc égale à : P(***E***) = $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

c) Méthode : Calculer une probabilité en utilisant un arbre des possibles

On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
Soit ***E*** l'évènement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».
Quelle est la probabilité que l'évènement ***E*** se réalise ?

On construit l'arbre des possibles de l'expérience aléatoire :
Chaque issue à la même probabilité : il y a une chance sur six de sortir un 1, un 2, … ou un 6.

On dit qu'il y a **équiprobabilité**.



Ainsi P(***E***) = $\frac{1}{3}$

La probabilité que l'évènement ***E*** se réalise est de $\frac{1}{3}$.
Il y a donc une chance sur trois d'obtenir un 1 ou un 6 en lançant un dé.

d) Propriétés :

1) La probabilité P(***E***) d'un événement ***E*** est telle : $0 \leq$ P(***E***) ≤ 1.

2) La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.

3) La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

4) Evènement contraire

Exemple :
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
Soit ***E*** l'évènement : « La face du dessus est un 1 ou un 6 ».
Alors l'évènement contraire de ***E*** est : « La face du dessus est un 2, un 3, un 4 ou un 5 ». Cet évènement est noté $\overline{E}$.

Propriété :

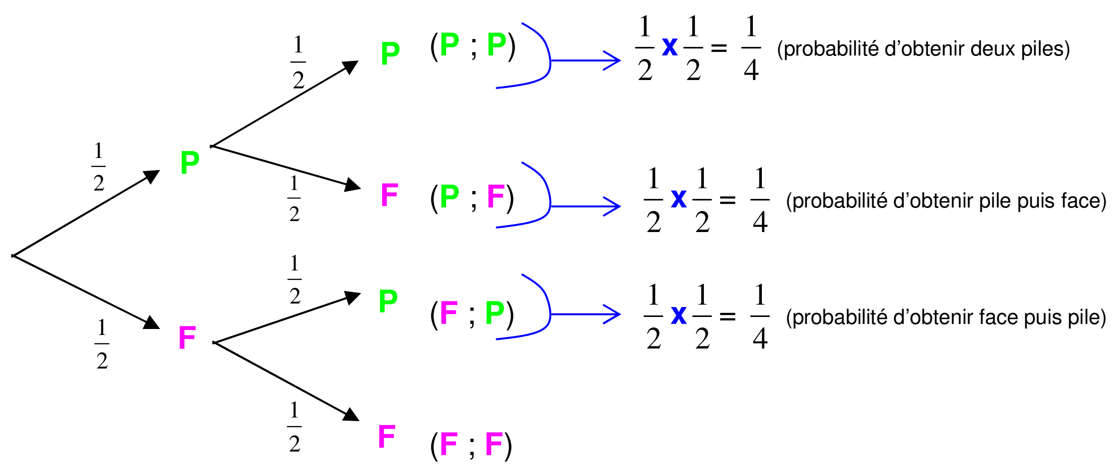
La probabilité de l'événement contraire d'un événement ***E*** est : $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

5) Exemple d'une expérience aléatoire à deux épreuves

a) Méthode : Calculer une probabilité d'une expérience à deux épreuves

Vidéo EDPUZZLE

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie. Il s'agit d'une expérience aléatoire à deux épreuves.
Soit ***E*** l'évènement : « On obtient au moins une fois la face PILE. »
Calculer P(***E***).



Règle importante : Sur un même chemin, on multiplie les probabilités.

La probabilité d'une ISSUE est égale au produit des probabilités portées par les branches formant le chemin conduisant à cette issue.

$P(E) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ La probabilité que l'évènement ***E*** se réalise est de $\frac{3}{4}$.

Il y a donc trois chances sur quatre d'obtenir au moins une fois la face PILE lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

III. Réunion et intersection de deux événements

1) Définitions

Exemple :

On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.
On considère les événements suivants :
A : « On tire un valet »
B : « On tire un cœur ou un carreau »

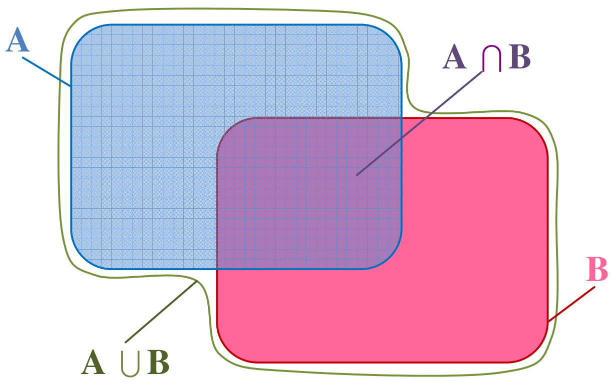
L'intersection des évènements A et B est l'évènement :
« On tire le valet de cœur ou le valet de carreau ». On note cet évènement $A \cap B$ et on lit « A inter B »

La réunion des évènements A et B est l'évènement :
« On tire le valet de piques, le valet de trèfle, un cœur ou un carreau ». On note cet évènement $A \cup B$ et on lit « A union B »

Définitions :

L'événement "A et B", noté $A \cap B$, est réalisé lorsque **les deux** événements A et B sont simultanément réalisés.

L'événement "A ou B", noté $A \cup B$, est réalisé lorsqu'**au moins** l'un des deux événements est réalisé.



2) Probabilité d'une réunion

Théorème :
Si A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire, alors :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Méthode : Calcul de probabilité en utilisant la formule de probabilité d'une réunion Vidéo

On considère l'expérience aléatoire suivante :
On lance un dé à six faces et on regarde le nombre de points inscrits sur la face du dessus.
On considère les événements suivants : A : « On obtient un nombre impair »
B : « On obtient un multiple de 3 »

Calculer la probabilité de l'évènement $A \cup B$.

$P(\text{A})=\frac{1}{2}$ et $P(\text{B})=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\text{A} \cap \text{B}$ est l'événement élémentaire : « On obtient un 3 », donc : $P(A \cap B)=\frac{1}{6}$

L'événement $\text{A} \cup \text{B}$ a donc pour probabilité :

$$\begin{aligned} p(\text{A} \cup \text{B}) &= p(\text{A}) + p(\text{B}) - p(\text{A} \cap \text{B}) \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6} \\ &= \frac{4}{6} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

3) Evénements incompatibles

Définition

On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** si $\text{A} \cap \text{B} = \varnothing$.

Propriété

Si deux événements A et B sont incompatibles alors $P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B})$.

Exemple :
On considère l'expérience aléatoire suivante :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes à jouer.
On considère les événements suivants :
A : « On tire un valet »
B : « On tire un roi »
Les deux évènements A et B sont incompatibles, en effet $\text{A} \cap \text{B} = \varnothing$.
On en déduit que la probabilité de l'évènement « Tirer un valet ou un roi » est égale à :

$$P(\text{A} \cup \text{B}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) = \frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

Calculer une probabilité à l'aide d'un tableau : Vidéo **EDPUZZLE**