Partir d'un bon pied

Voir corrigés en fin de manuel

A QCM – Puissances et exposants

Voir AP page 93

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.

1 Le nombre $a^2 \times b^3$ est égal à :

a. $(ab)^5$. b. $(ab)^6$. c. $\dfrac{(ab)^3}{b}$.

2 On peut écrire plus simplement $20 \times 0{,}8^{n-1}$ sous la forme :

a. $16 \times 0{,}8^n$. b. $25 \times 0{,}8^n$. c. 16^{n-1}.

B Suite géométrique

Voir chapitre 1 page 14

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.

1 Soit la suite u_n définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = u_n - 0{,}2u_n$ et $u_1 = 80$. Alors :

a. $u_n = 80 \times 0{,}8^n$. b. $u_n = 100 \times 0{,}8^n$. c. $u_n = 80 \times 0{,}2^n$.

2 Soit la suite géométrique (u_n) telle que $u_1 = 600$ et $u_4 = u_1 \times q^3 = 16\,200$. Alors :

a. sa raison est 3. b. $u_n = 600 \times 3^n$. c. $u_5 = 16\,800$.

3 Une suite est définie par $u_{n+1} = u_n \times 0{,}75$ et $u_0 = 100$. La somme $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ s'écrit :

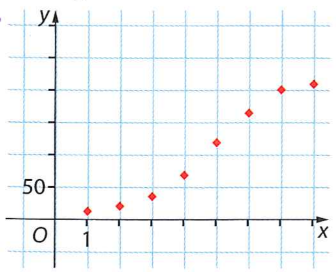
a. $400 - 300 \times 0{,}75^n$. b. $\dfrac{100}{0{,}25} \times (1 - 0{,}75^n)$. c. $100 \times 0{,}75^n$.

C Modélisation en suite géométrique

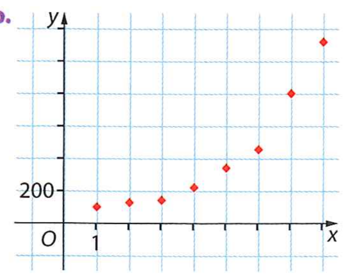
Voir AP page 93

Les nuages de points ci-dessous peuvent-ils être modélisés par une suite géométrique ? **Argumenter.**

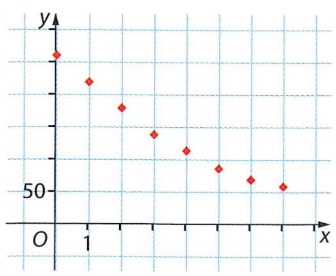
a.



b.



c.



D Chiffrer des évolutions

Pour chaque situation, indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse et justifier par un calcul.

1 Une société a un chiffre d'affaires de 5 millions d'euros en début 2009, qui augmente pour atteindre 8 millions d'euros en fin 2011.
Alors ce chiffre d'affaires a augmenté en moyenne de 20 % par an.

2 En début de protocole, on compte 20 000 bactéries dans une culture. Chaque demi-heure, cette population augmente du même pourcentage. Au bout d'une heure, il y a 180 000 bactéries.
Alors au bout de 30 min, il y avait 60 000 bactéries.

3 Entre 2010 et 2011, le prix d'un appartement parisien est passé de 250 000 € à 285 000 €.
La variation relative du prix tous les 6 mois est $\sqrt{1{,}21} - 1$.

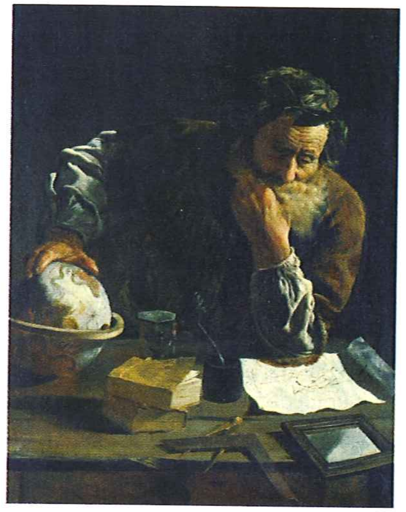
Voir AP page 31

CHAPITRE 3

Fonction exponentielle

D'hier à aujourd'hui

Puissances et exposants



Archimède, par Domenico Fetti (1620).

Pour estimer l'ordre de grandeur du nombre de grains de sable que pourrait contenir la « sphère » de l'Univers, Archimède (287-212 av. J.-C.), dans l'*Arénaire*, est amené à inventer une nouvelle façon de compter. À son époque, les nombres sont représentés à l'aide de lettres, peu faciles de manipulation, et qui ne permettent pas de dépasser une myriade (1 myriade = 10 000 = 10^4). Il a l'idée de compter en puissances de myriade : myriade de myriade (10^8), myriade de myriade de myriade (10^{12}), etc., et démontre la relation s'écrivant de façon moderne :

$$10^n \times 10^p = 10^{n+p},$$

où n et p sont des entiers positifs. Il obtient que le nombre de grains de sable contenus dans l'Univers (tel qu'il est connu à l'époque par Aristarque de Samos) est au plus « mille myriades des nombres huitièmes », c'est-à-dire au plus 10^{63}. Les fonctions puissances, avec des exposants entiers, sont ainsi connues depuis très longtemps.

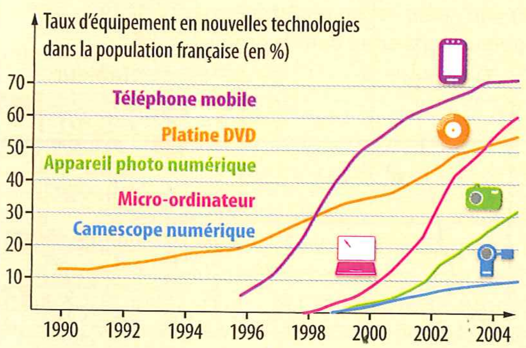
Mais ce n'est qu'en 1748 qu'Euler, dans son *Introduction à l'analyse infinitésimale*, donne la définition d'un nombre élevé à un exposant réel quelconque et des fonctions exponentielles. Il introduit alors les notations « e » et « e^x », utilisées encore aujourd'hui.

Le nombre e est connu depuis déjà un siècle, sous diverses appellations. Ainsi, en 1683, Bernoulli est amené, lors de calculs d'intérêts composés, à étudier la suite de terme général $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et démontre qu'elle a pour limite, lorsque n tend vers l'infini, un nombre, qui se révèlera être égal à e.

Voir exercice 145 page 102

Quant à Euler, il utilise : $\mathrm{e} = 2 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3\times 2} + \dfrac{1}{4\times 3\times 2} + \dfrac{1}{5\times 4\times 3\times 2} + \ldots$

Il existe ainsi plusieurs façons de définir le nombre e. Celui-ci a eu une importance capitale en mathématiques, au même titre que le nombre π.



Source : CRÉDOC et GfK (2007).

Aujourd'hui, les fonctions exponentielles sont utilisées dans de très nombreux domaines et permettent de modéliser toutes sortes d'évolution : des expansions, voire des explosions, lorsqu'une quantité croît très rapidement, de façon « exponentielle », ou bien des extinctions. Les croissances représentées par des courbes en S, dites « croissances logistiques », utilisent également les fonctions exponentielles.

Voir exercice 148 page 103

« Celui qui croit qu'une croissance exponentielle peut continuer indéfiniment dans un monde fini est soit un fou, soit un économiste. » Kenneth E. Boulding (1910-1993)

Découvrir

Activité 1 Étudier à tout instant une population à variation relative constante

À l'origine de l'intoxication de 2011 : des graines de soja contaminées par E.coli.

PARTIE A Dans une culture de bactéries

Dans sa phase de croissance, le nombre de bactéries *Escherichia coli* double toutes les 20 minutes.
On note $P(x)$ la population de bactéries, en millier, au bout de x heures.
La population, en début de protocole d'étude, est de 3 000 bactéries ; donc $P(0)=3$.

1 **a.** Quel est le coefficient multiplicateur CM de la population pour une heure ?
b. Calculer la population au bout de 2 h, de 3 h. Quelle est la nature de la suite de terme général $P(n)$, où n est le nombre d'heures écoulées depuis le début du protocole ? Exprimer $P(n)$ en fonction de n.

2 Sur la calculatrice, on entre la fonction P définie par $P(x)=3\ \text{CM}^x$.
a. Comment calculer la population au bout de 1 h 20 ? Calculer $P\left(\dfrac{4}{3}\right)$. Comparer.
b. Calculer $P(-2)$ et $P\left(-\dfrac{5}{3}\right)$. Quelle signification donner à ces résultats ?
c. Donner les résultats obtenus à la calculatrice pour $P(2{,}4)$ et $P(3{,}4)$. *Arrondir à l'unité près.*
Calculer la variation relative du nombre de bactéries entre ces deux instants : 2,4 h et 3,4 h.

PARTIE B Application

On considère une population dont la variation relative est constante entre tout instant x et $x+1$, x étant exprimé en unité de temps (heure, année, etc.). On pose $f(x)$ la population à l'instant x et t la variation relative constante, ou taux de variation, en écriture décimale : $t=\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$.

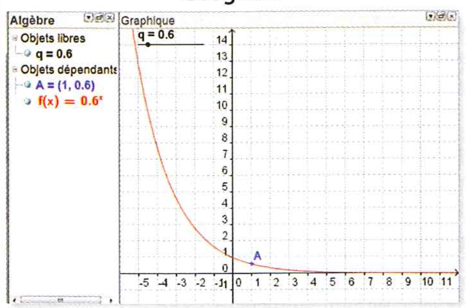
1 Montrer que $f(x+1)=(1+t)\times f(x)$. En déduire que, pour $x=n$ entier, on a $f(n)=f(0)\times(1+t)^n$.

2 On admet que, à tout instant x, la population est donnée par une expression $f(x)$ comme ci-dessus en remplaçant n par x. On désire modéliser une population $f(x)$ en fonction du temps x écoulé, en année, depuis fin 2011.
Donner l'écriture de $f(x)$ dans les cas suivants et faire une prévision pour la fin du premier trimestre 2014, soit en $x=3+\dfrac{3}{12}$, arrondie à 0,1 million près.
a. L'Honduras est le pays ayant le plus fort TAN en 2011 (taux d'accroissement naturel annuel) de 5 % par an. Sa population en fin 2011 est de 8,1 millions.
b. L'Ukraine, avec 45,1 millions d'habitants en fin 2011, est le pays ayant le plus faible TAN, de $-0{,}6$ %.

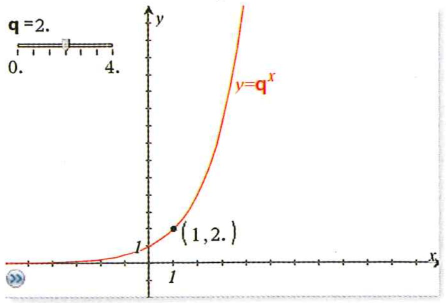
Activité 2 Lire le sens de variation de $x \mapsto q^x$ TICE

On visualise la fonction définie sur l'ensemble des réels par $f(x)=q^x$, où **q est un réel strictement positif**.
Sur Geogebra ou TI-Nspire™, q est modifiable par curseur. Sur tableur, q est entré dans la cellule C2.

Geogebra



TI-Nspire™



Tableur

	A	B	C
1	x	$f(x)$	q
2	-2	0,09467	3,25
3	-1,5	0,17068	
4	-1	0,30769	
5	-0,5	0,5547	
6	0	1	
7	0,5	1,80278	
8	1	3,25	
9	1,5	5,85902	
10	2	10,5625	
11	2,5	19,0418	
12	3	34,3281	
13	3,5	61,8859	
14	4	111,566	

Donner le sens de variation de chacune des fonctions f représentées ci-dessus.
Expliciter un lien avec les suites géométriques vues au chapitre 1.

Découvrir

Activité 3 Découvrir des relations fonctionnelles TICE

On admet que les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=q^x$, avec $q>0$, transforment les sommes en produits.
Autrement dit, quels que soient les réels x et y, on a la **relation fonctionnelle** : $f(x+y)=f(x)\times f(y)$.

1 On considère la fonction f telle que $f(x)=2^x$.
a. Écrire $f(3+5)$ et retrouver une relation connue.
b. En écrivant la relation avec $y=0$ et un réel x quelconque, en déduire la valeur $f(0)=2^0$.
c. En écrivant $x+(-x)=0$, exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.
d. Écrire $2x$ sous la forme d'une somme. En déduire $f(2x)$ en fonction de $f(x)$.
Que peut-on conjecturer pour $f(n\times x)$?
e. Sachant que $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$, comment peut-on écrire $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en utilisant un exposant ?

2 On désire vérifier ces relations, à l'aide d'un tableur, pour un nombre q **strictement positif** quelconque et x et y réels quelconques.
a. Indiquer la formule à écrire en cellule C2 qui, par recopie vers le bas, donnera les images des nombres de la colonne B par la fonction f.
b. Indiquer la formule à écrire en D4 pour vérifier la relation fonctionnelle.
c. D'après les réponses aux questions **1 c.** et **1 d.**, indiquer les formules à écrire en D6, D7 et D9 pour vérifier les relations trouvées.
d. Que faut-il donner comme valeur à n en B8 pour vérifier la réponse à la question **1 e.**
e. Visualiser les résultats obtenus pour $q=1{,}3$, $x=-3{,}5$ et $y=3{,}5$.
Choisir d'autres valeurs de x et de y.

	A	B	C	D	E
1		valeurs	image $f(x)=q^x$	avec les relations	base q
2	x	3	8		2
3	y	5	32		
4	$x+y$	8	256	256	
5	0	0	1		
6	$-x$	-3	0,125	0,125	
7	$2x$	6	64	64	
8	n	4			
9	$n\times x$	12	4096	4096	

Activité 4 Découvrir un nouveau nombre

On admet que les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=q^x$, avec $q>0$, sont **dérivables**.
Autrement dit, en tout point $M(x\,;f(x))$ de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de cette fonction, il existe une **tangente**.
À l'aide d'un logiciel dynamique, où q est modifiable par un curseur, on a tracé la tangente en un point quelconque M d'abscisse m donnée par un curseur et la tangente au point A fixé, d'**abscisse 0**.

Figure 1 (Geogebra)

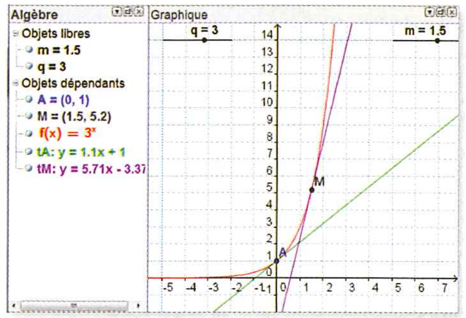
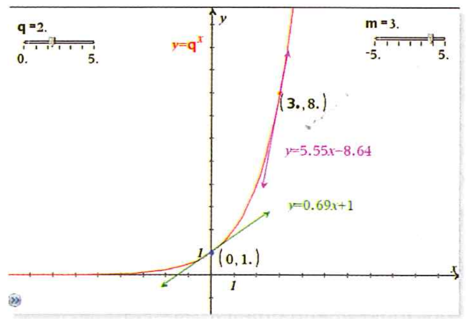


Figure 2 (TI-Nspire™)



1 Suivant les valeurs de q, faire une conjecture sur la convexité de la fonction f.
On s'intéressera également au cas où $q\in\,]0\,;1[$ et où $q=1$.

2 **a.** Sur la **figure 1**, lire le nombre dérivé de la fonction f en $x=1{,}5$, puis en $x=0$.
b. Sur la **figure 2**, préciser la fonction représentée. Lire le nombre dérivé de f en 3, puis en 0.
c. Si q augmente sur $]1\,;+\infty[$, que peut-on conjecturer sur le sens de variation du nombre dérivé de la fonction f en $x=0$? Justifier qu'il existe une valeur de q telle que $f'(0)=1$. On la note **e**.

3 À l'aide du logiciel, en modifiant la valeur de q par le curseur, indiquer une valeur approchée du **nombre e**, avec la précision du logiciel.

Voir page 69

1 Fonctions exponentielles de base q

a Fonction $f : x \mapsto q^x$, avec $q > 0$

Définition Soit q un nombre strictement positif donné.

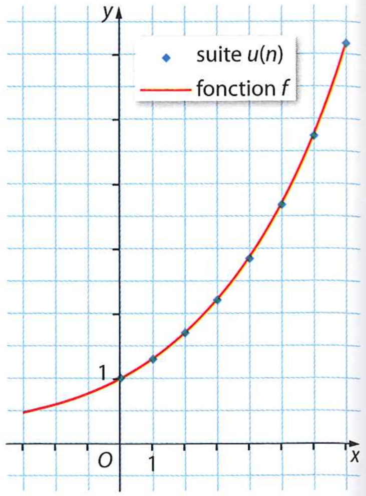
La suite de terme général $u_n = q^n$, pour tout entier naturel n, est une suite géométrique de raison q. Voir chapitre 1 page 14

La fonction exponentielle de base q est le prolongement de cette suite géométrique.

Elle est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = q^x$, avec $q > 0$.

On admet que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, q^x est strictement positif.



EXEMPLE

La suite géométrique telle que $u_n = 1{,}03^n$ se prolonge sur $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle de base 1,03 : $f(x) = 1{,}03^x$.

Casio

```
1.3^-2
            0.5917159763
1.3^5.4
             4.123766844
```

TI™

```
1.3^-2
             .5917159763
1.3^5.4
             4.123766844
```

Sens de variation En continuité avec les suites numériques, on admet que, pour une fonction exponentielle de base q, avec $q > 0$:

- si $q > 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est **croissante** sur $\mathbb{R}$;
- si $0 < q < 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est **décroissante** sur $\mathbb{R}$;
- si $q = 1$, la fonction $x \mapsto q^x = 1$ est **constante** sur $\mathbb{R}$.

Note On parle de croissance ou décroissance exponentielle.

b Relation fonctionnelle et formules

Théorème admis Soit f une fonction exponentielle de base $q > 0$:

$f(x) = q^x$.

Elle **transforme une somme en un produit** : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

Autrement dit, pour tous réels x et y : $q^{x+y} = q^x \times q^y$.

CONSÉQUENCES

Soit q un nombre strictement positif.

- On a $q^0 = 1$ et $q^1 = q$.
- Pour tous réels x et y, on a $q^{-x} = \dfrac{1}{q^x}$ et $q^{x-y} = \dfrac{q^x}{q^y}$.
- Pour tout réel x et tout entier relatif n, on a $q^{nx} = (q^x)^n$.
- Pour tout entier naturel $n > 0$, comme $\dfrac{1}{n} \times n = 1$, alors :

$q^{1/n}$ est le nombre tel que $(q^{1/n})^n = q$. **$q^{1/n}$ est la « racine n-ième » de q.**

Remarque Pour tout réel x, la variation relative de la fonction f entre x et $x+1$ est :

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \frac{q^{x+1} - q^x}{q^x} = \frac{q^x \times q - q^x}{q^x} = \frac{q^x \times (q-1)}{q^x} = q - 1.$$

On retrouve le **taux d'évolution** « par glissement » d'une croissance exponentielle.

EXEMPLES

- $1{,}03^{x+1} = 1{,}03^x \times 1{,}03$
- $2{,}5^{2x-1} = \dfrac{2{,}5^{2x}}{2{,}5^1} = \dfrac{(2{,}5^2)^x}{2{,}5} = 0{,}4 \times 6{,}25^x$
- $2^{1/12} \approx 1{,}0595$
- $25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$

TI™

```
2^(1/12)
             1.059463094
```

Casio

```
2^(1÷12)
             1.059463094
```


Utiliser une fonction $x \mapsto q^x$

Exercice corrigé

Énoncé

À la suite d'une infection, on modélise le nombre de bactéries contenues dans un organisme, en fonction du temps x, exprimé en heure, à partir du début de l'étude, par la fonction f définie par :

$f(x) = 100\,000 \times 1{,}1^x$, pour x compris entre 0 et 3.

1 Calculer le nombre de bactéries au bout de 1 h 30, puis de 2 h 45. *Arrondir à 1 000 bactéries près.*

2 Justifier que la fonction f est croissante sur [0 ; 3]. Interpréter.

3 En utilisant la calculatrice, dire au bout de combien de temps le nombre de bactéries a augmenté d'au moins 5 %, puis de plus de 20 %.

Donner les résultats arrondis à cinq minutes près.

4 Déterminer le taux d'évolution de cette population de bactéries pour un quart d'heure.

Points méthode

1 Ne pas oublier de « traduire » les temps en heure. Difficile de donner beaucoup de chiffres significatifs aux résultats.

2 On fait le lien avec une **suite géométrique** : $f(x) = K \times q^x$ est associée à la suite géométrique de **raison q** et de premier terme K. Le taux d'évolution « par glissement » d'une unité de la variable est $q - 1$.

3 La fonction $x \mapsto 1{,}1^x$ est strictement croissante. On veut une valeur à **5 min près**, soit à $\dfrac{1}{12}$ h près : on tabule cette fonction par pas de $\dfrac{1}{12}$.

4 Comme $\dfrac{1}{4}$ h $= 0{,}25$ h, on calcule le coefficient multiplicateur pour $x = 0{,}25$. On calcule ensuite le taux T d'évolution correspondant : $T = (CM - 1) \times 100$.

Solution

1 Le temps x est en heure, donc 1 h 30 = 1,5 h.
On calcule à la calculatrice $f(1{,}5) \approx 115\,000$.
Pour 2 h 45 = 2,75 h, on obtient $f(2{,}75) \approx 130\,000$.

2 Comme la variable x, en exposant, porte sur $1{,}1 > 1$, alors la fonction exponentielle **$x \mapsto 1{,}1^x$** est croissante sur $\mathbb{R}$.
Donc la fonction f est **croissante** sur [0 ; 3]. Comme $q = 1{,}1$, la population de bactéries **augmente de 10 %** toutes les heures.

3 Comme la fonction **$x \mapsto 1{,}1^x$** est dérivable, elle est continue.
De plus, elle est strictement croissante sur [0 ; 3].
On applique la **propriété des valeurs intermédiaires** pour résoudre l'équation $1{,}1^x = 1{,}05$, puis l'inéquation $1{,}1^x \geqslant 1{,}05$. Voir chapitre 2
On cherche x tel que **$1{,}1^x = 1{,}05$**.
Comme $1 < 1{,}05 < 1{,}1$, x est entre 0 et 1.
D'où $x \approx 0{,}5 + \dfrac{1}{12}$, soit au bout de 35 min.
Et pour **$1{,}1^x \geqslant 1{,}20 > 1{,}1$**, x est entre 1 et 2.
D'où $x \approx 1 + \dfrac{11}{12}$, soit au bout de 1 h 55.

X	Y1
.16667	1.016
.25	1.0241
.33333	1.0323
.41667	1.0405
.5	1.0488
.58333	1.0572
.66667	1.0656

Y1=1.1^X

Y1=1.1^(X)

X	Y1
1.75	1.1815
1.8333	1.1909
1.9166	1.2004
2	1.21

4 Au bout d'un quart d'heure, la population passe de $100\,000 \times 1{,}1^x$ à $100\,000 \times 1{,}1^{x+0{,}25}$.
Donc le coefficient multiplicateur pour un quart d'heure est :

$$\frac{100\,000 \times 1{,}1^{x+0{,}25}}{100\,000 \times 1{,}1^x} = 1{,}1^{0{,}25} \approx 1{,}0241.$$

Donc tous les quarts d'heure, la population augmente de 2,41 %.

Exercice d'application

Voir exercices 32 à 37

1 Thomas a 13 ans et demi.
Il dispose de 800 € d'économies.
Ses parents décident de placer cet argent sur un livret à intérêts composés au taux annuel de 4,5 %.

1 Calculer, au centime d'euro près, le capital dont il disposera au bout de trois ans, c'est-à-dire sa valeur acquise au bout de trois ans.

2 On considère la fonction f définie sur [0 ; 18] par :

$f(x) = 800 \times 1{,}045^x$.

Le nombre $f(x)$ représente la valeur acquise d'un capital de 800 € placé pendant une durée x, en année, au taux annuel de 4,5 %.

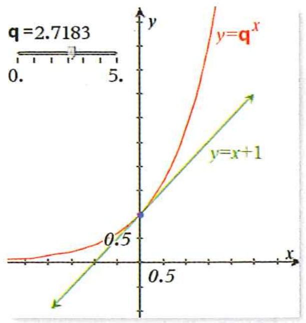
a. Calculer la valeur acquise par le capital lorsque Thomas atteindra sa majorité, soit dans quatre ans et demi.

b. Combien d'années Thomas devra-t-il patienter pour voir doubler son capital initial ?

2 Exponentielle de base e

a Fonction exp et nombre e

Définition On admet que, parmi toutes les fonctions exponentielles $x \mapsto q^x$, une seule a le nombre 1 pour **nombre dérivé en 0**.
Cette fonction est la **fonction exponentielle de base e**, notée **exp**.
Pour tout réel x : exp : $x \mapsto e^x$, avec $\exp'(0) = 1$.
Par définition, le **nombre e** est l'image de 1 par cette fonction : $\exp(1) = e$.



CONSÉQUENCES IMMÉDIATES

- $\exp(1) = e \approx 2{,}7183 > 1$: la fonction exp est donc **croissante** sur $\mathbb{R}$.
- $\exp(x) = e^x$ est **toujours strictement positive** : $e^x > 0$.
- La fonction exponentielle transforme une somme en produit.

Pour tous réels x et y, on obtient les formules des exposants :

$$\exp(0) = e^0 = 1 \; ; \quad e^{x+y} = e^x \times e^y \; ; \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \; ;$$

$e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$; et en particulier : $e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$.

Pour tout entier relatif n, $e^{n \times x} = (e^x)^n$ et en particulier $e^{2x} = (e^x)^2$.

EXEMPLES

On peut écrire sous forme de produit : $e^{x+1} = e^x \times e^1 = e^x \times e$.
On peut simplifier : $e^{3x+1} \times e^{-x+2} = e^{3x+1-x+2} = e^{2x+3}$.
On peut distribuer : $e^x(e^{-x} + 2\,e^x) = e^x \times e^{-x} + e^x \times 2\,e^x = 1 + 2\,e^{2x}$.
On peut factoriser : $x^2\,e^x - 2\,x\,e^{2x} = x\,e^x(x - 2\,e^x)$.

Sur calculatrice

Casio : SHIFT (e^x) ln 1

e^1 2.718281828

TI™ : 2nde (e) ÷ entrer

e 2.718281828

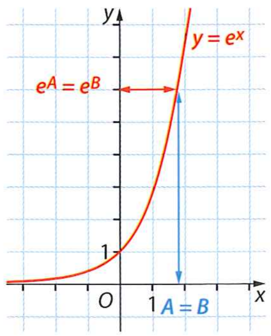
Sur tableur ou logiciel

	A	B
1	x	exp(x)
2	-3	=EXP(A2)
3	-2,5	0,082085

b Résolution d'équations

Comme $e^x > 0$ quel que soit le réel x, l'équation $e^x = 0$ n'a pas de solution.
Et l'équation $e^x = k$, avec k négatif, n'a pas de solution.

Théorème Soit A et B deux réels.
L'équation $e^A = e^B$ **équivaut à** $A = B$.
Ainsi, deux exponentielles sont égales si, et seulement si, leurs exposants sont égaux.



CAS PARTICULIER

Comme $1 = e^0$, l'équation $e^A = 1$ équivaut à $A = 0$.

DÉMONSTRATIONS

- Si $A = B$, l'image par une fonction étant unique, les images de A et de B par la fonction exp sont égales.
- Comme toute fonction exponentielle de base q est dérivable, la fonction exponentielle de base e est dérivable, donc continue. Comme elle est strictement croissante, il n'existe qu'un seul réel ayant pour image e^A.

Donc l'égalité $e^A = e^B$ ne peut être vraie que pour $A = B$.

EXEMPLES

- $e^{3x-1} = e^{-x+2} \Leftrightarrow 3x - 1 = -x + 2 \Leftrightarrow 4x = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$.
- $e^{x^2-4} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2-4} = e^0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$.

Calculer avec une exponentielle

Exercice corrigé

Énoncé

1 Écrire plus simplement, sous la forme e^k : $A = (e^2)^2 \times \dfrac{(e^{-3})}{e}$.

2 Soit un réel x.

a. Montrer que $(e^x - 2)(e^x + 4) = e^{2x} + 2e^x - 8$ et que $\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

b. Factoriser $2\,x\,e^x - 3\,x^2\,e^{2x}$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : **a.** $e^{2x-1} = e$. **b.** $e^x + 2 = 0$.

Points méthode

① Le nombre e est un nombre particulier, mais les règles de calculs sur les exposants restent les mêmes que pour un entier.

② Pour simplifier une écriture avec une exponentielle, on applique les formules des exposants :
- lors d'un développement, penser à : $e^x \times e^x = e^{2x}$

et pour une factorisation : $e^{2x} = e^x \times e^x$;
- si un exposant comme $-x$ ou $-2x$ apparaît, penser à utiliser : $e^x \times e^{-x} = 1$.

Attention $2\,e^x = e^x + e^x \neq e^{2x} = (e^x)^2$

③ Lors de la résolution d'équations avec exponentielle, penser à se ramener à une égalité : $e^A = e^B$.

Solution

1 $A = (e^2)^2 \times \dfrac{(e^{-3})}{e}$
$= e^{2\times 2} \times e^{-3} \times e^{-1}$
$= e^{4-3-1} = e^0 = 1$

```
e^(2)^2*e^(-3)/e
^(1)
                1
```

2 a. • On développe $(e^x - 2)(e^x + 4)$:

$$e^x \times e^x + 4 \times e^x - 2 \times e^x - 8 = e^{2x} + 2\,e^x - 8.$$

• Dans l'expression $\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$, on multiplie numérateur et dénominateur par e^x, car $e^{-x} \times e^x = 1$:

$$\frac{(1 - e^{-x}) \times e^x}{(1 + e^{-x}) \times e^x} = \frac{e^x - e^{-x} \times e^x}{e^x + e^{-x} \times e^x} = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

b. Dans $2\,x\,e^x - 3\,x^2\,e^{2x}$, on remarque que l'on peut mettre $x \times e^x$ en facteur car $3\,x^2\,e^{2x} = 3\,x \times x \times e^x \times e^x$.
D'où : $2\,x\,e^x - 3\,x^2\,e^{2x} = x\,e^x(2 - 3\,x\,e^x)$.

3 a. Dans l'équation $e^{2x-1} = e$, on écrit $e = e^1$.
D'où : $e^{2x-1} = e^1 \Leftrightarrow 2x - 1 = 1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1$.

b. Dans l'équation $e^x + 2 = 0$, on isole l'exponentielle. D'où : $e^x = -2$.
Or **une exponentielle est toujours strictement positive**.
Donc cette équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercices d'application

Voir exercices 39 à 51

2 Écrire simplement, sous la forme e^k :
$A = \dfrac{e^2 \times e^3}{(e^{-1})^3}$ et $B = (e^3)^{-1} \times \dfrac{e^4}{e^{-2}}$.

3 Justifier les factorisations ou développements obtenus à l'aide du calcul formel :

$\text{factor}(e^{2\cdot x} + 2\cdot e^x + 1)$	$(e^x + 1)^2$
$\text{factor}(2\cdot e^{2\cdot x} - 3\cdot e^x + 1)$	$(e^x - 1)\cdot(2\cdot e^x - 1)$
$\text{factor}(2\cdot x\cdot e^x - 4\cdot e^x)$	$2\cdot(x - 2)\cdot e^x$
$\text{expand}((e^{-x} + 1)\cdot(e^x - 1))$	$e^x - \dfrac{1}{e^x}$

4 Résoudre dans $\mathbb{R}$.
a. $e^{3x} = 1$. **b.** $e^{-x+1} = e^2$.

5 Résoudre dans $\mathbb{R}$.
a. $e^{-x+3} = e$. **b.** $e^{-2x} - e^{x+3} = 0$.

6 Résoudre dans $\mathbb{R}$.
a. $3e^x - 3 = 0$. **b.** $e^{-x+3} = \dfrac{1}{e}$.

7 **a.** Montrer que :
$$2\,e^{2x} - e^x - 1 = (e^x - 1)(2\,e^x + 1).$$
b. En déduire la résolution de l'équation :
$$2\,e^{2x} - e^x - 1 = 0.$$

3 Étude de la fonction $x \mapsto e^x$

a Fonction dérivée et convexité

Théorème admis On admet que **la dérivée de la fonction exponentielle est elle-même.**
Autrement dit, si $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x) = e^x$.
La fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations de exp

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	1	+ e	+
$\exp(x)$	↗	1	e	↗

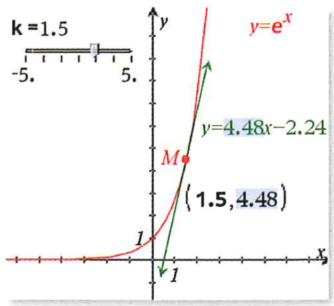
EXEMPLE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-3)\,e^x$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on applique la dérivée d'un produit :
$f'(x) = 2 \times e^x + e^x \times (2x-3)$, puis on met e^x en facteur,
d'où : $f'(x) = e^x \times (2+2x-3) = (2x-1)\,e^x$.

PROPRIÉTÉS

- Comme le nombre dérivé est le coefficient directeur de la tangente, la tangente en tout point $M(x\,;\,e^x)$ de la courbe $\mathscr{C}_{exp}$ a pour coefficient directeur $m = e^x = y_M$.
- La **dérivée seconde** est $f''(x) = e^x$, strictement positive.
Donc la fonction exponentielle de base **e** est **convexe** sur $\mathbb{R}$: en tout point, la courbe $\mathscr{C}_{exp}$ est toujours située au-dessus de sa tangente.
- La courbe $\mathscr{C}_{exp}$ est toujours située au-dessus de la droite Δ d'équation $y = x$.

Voir exercices corrigé page 77

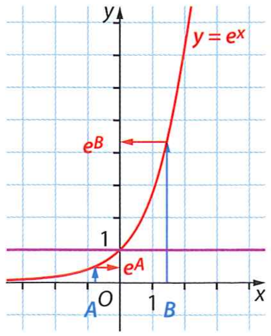


b Résolution d'inéquations

Théorème Soit A et B deux réels.
La fonction **exp** étant strictement croissante, deux exponentielles sont rangées dans le même ordre que leurs exposants :

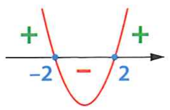
$$e^A \geqslant e^B \Leftrightarrow A \geqslant B.$$

En particulier, comme $1 = e^0$, on a :
- $e^A \geqslant 1 \Leftrightarrow A \geqslant 0$;
- $0 < e^A \leqslant 1 \Leftrightarrow A \leqslant 0$.



EXEMPLES

On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations : $e^{2x+1} \leqslant e^{x-2}$ et $e^{x^2-4} > 1$.
- $e^{2x+1} \leqslant e^{x-2} \Leftrightarrow 2x+1 \leqslant x-2 \Leftrightarrow x \leqslant -3$. D'où $S =]-\infty\,;-3]$.
- $e^{x^2-4} > 1 \Leftrightarrow e^{x^2-4} > e^0 \Leftrightarrow x^2-4 > 0$
$\Leftrightarrow x < -2$ ou $x > 2$.
D'où $S =]-\infty\,;-2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$.



À l'aide d'un calcul formel :

solve$(\exp(x^2-4)>1, x)$
solve$(e^{x^2-4}>1, x)$ $\quad x<-2$ or $x>2$

SIGNE D'UNE EXPRESSION

Pour étudier **le signe d'une expression** avec e^x, on utilise :
- Pour tout réel x, $e^x > 0$: e^x est **toujours strictement positive**.
- On se ramène à une résolution d'inéquation en cherchant pour quelles valeurs de x l'expression est positive ou égale à 0.
- On étudie le sens de variation de la fonction associée à l'expression et on applique la propriété des valeurs intermédiaires.

Voir chapitre 2 page 46

Étudier une fonction avec e^x

Exercice corrigé

Énoncé

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = e^x - x.$$

1 a. Calculer $f'(x)$.
b. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

2 a. Justifier que la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
b. En déduire la position relative de la courbe de la fonction exponentielle $\mathscr{C}_{exp}$ par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

Points méthode

1 Pour calculer la dérivée d'une fonction avec e^x, on utilise les formules de dérivation.
Voir chapitre 2 page 44
La dérivée de l'exponentielle est elle-même.
Et pour tout réel x, $e^x > 0$.

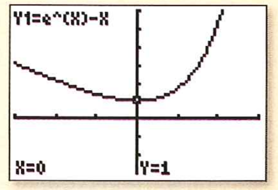
2 Comme la fonction f est dérivable, donc continue, on peut appliquer la propriété des valeurs intermédiaires.
Ici, la fonction admet un minimum que l'on compare à 0 pour étudier le signe de $f(x)$.
Pour étudier la position de deux courbes :
Revoir AP 78 page 62

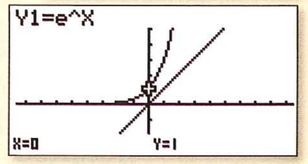
Solution

1 a. Par dérivation d'une somme : $f'(x) = e^x - 1$.
b. Pour étudier le signe de $f'(x)$, on résout l'inéquation $f'(x) \geqslant 0$.
$e^x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
Ainsi, la dérivée est positive pour $x \geqslant 0$.
D'où le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	1	↗

2 a. La dérivée de f s'annule en 0 en changeant de signe, négatif puis positif :
donc la fonction f admet un minimum en 0.
Or $f(0) = e^0 - 0 = 1$.
Le minimum est strictement positif,
donc la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}$.
b. Pour étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_{exp}$ et de la droite Δ d'équation $y = x$, on étudie le signe de la différence $e^x - x$, c'est-à-dire le signe de $f(x)$.
Or $f(x) > 0$. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_{exp}$ est entièrement située au-dessus de la droite Δ sur $\mathbb{R}$.





Exercices d'application

Voir exercices 72 à 85

8 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = e^x + x - 1.$$
1 À l'aide d'une calculatrice graphique, conjecturer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
2 Calculer $f'(x)$ et en étudier le signe sur $\mathbb{R}$.
3 Démontrer la conjecture émise à la question **1**.

9 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = (2x+1)\,e^x.$$
1 Justifier que $g'(x) = (2x+3)\,e^x$.
2 Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3 En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
4 Soit $h(x) = (2x-1)\,e^x$ sur $\mathbb{R}$.
Justifier que $h'(x) = g(x)$ et en déduire le sens de variation de h et la convexité de sa courbe représentative $\mathscr{C}_h$.

10 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-10\,;3]$ par :
$$f(x) = 0{,}5x + 4 - 0{,}5\,e^x.$$
1 Calculer $f'(x)$.
Étudier le signe de la dérivée.
En déduire le tableau de variations de la fonction f.
On calculera les valeurs aux bornes de l'intervalle, avec une précision de 0,1.
2 En étudiant la propriété des valeurs intermédiaires, justifier l'existence des deux solutions à l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-10\,;3]$, trouvées à l'aide du calcul formel ci-dessous :

solve$(0.5\cdot x+4-0.5\cdot e^x=0, x)$
$x=-7.99966$ or $x=2.33559$

4 Fonction e^u

a Définition

Définition Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $f = e^u$ est la fonction définie sur l'intervalle I par $f(x) = e^{u(x)}$.
On parle d'**exponentielle d'une fonction u**, en exposant.

EXEMPLES

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-0,5x+2}$, avec $u(x) = -0,5x + 2$.
- La fonction g définie sur $[-3\,;3]$ par $g(x) = e^{x^2-4}$, avec $u(x) = x^2 - 4$.
- Lorsque la fonction u est une expression rationnelle, on utilise aussi la notation exp, appliquée à $u(x)$.

Ainsi, $h(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x-4}\right) = e^{\frac{1}{x-4}}$, définie sur $]4\,;+\infty[$, avec $u(x) = \dfrac{1}{x-4}$.

b Dérivée du sens de variation

Théorème admis La fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I.
Sa dérivée est $f'(x) = \mathbf{u'(x) \times e^{u(x)}}$.

Remarque La dérivée de e^u est le produit de la **dérivée de l'exposant** que multiplie **l'exponentielle**.
Ainsi, $(e^u)' = u' \times e^u$.

EXEMPLES

- Pour $f(x) = e^{-0,5x+2}$ sur $\mathbb{R}$, sa dérivée est $f'(x) = -0,5 \times e^{-0,5x+2}$.
- Pour $g(x) = e^{x^2-4}$ sur $[-3\,;3]$, sa dérivée est $g'(x) = 2x\,e^{x^2-4}$.

CAS PARTICULIERS

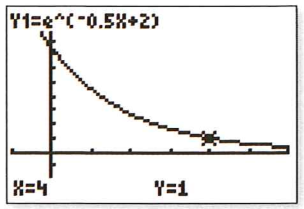
- La dérivée de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto -e^{-x}$.
- Et d'une façon plus générale, pour toute fonction $u : x \mapsto ax + b$:
  la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$ est $x \mapsto \mathbf{a \times e^{ax+b}}$.
- Pour la fonction $x \mapsto A\,e^{ax+b}$, on peut écrire :
  $A\,e^{ax+b} = A\,e^b \times e^{ax} = A\,e^b \times (e^a)^x = K \times q^x$ avec $K = A\,e^b$ et $q = e^a$.

On retrouve le lien avec la fonction exponentielle de base q, vue page 72.

Propriétés Comme la fonction e^u est dérivable, elle est continue.
Pour tout réel x, e^x est strictement positif, donc pour toute fonction u, définie sur un intervalle I, **$e^{u(x)}$ est strictement positive**.
Ainsi, la dérivée de e^u a le signe de la dérivée $u'(x)$ de l'exposant.
On en déduit que **la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$** **a le même sens de variation** que **la fonction $x \mapsto u(x)$**.

EXEMPLES

- Pour $f(x) = e^{-0,5x+2}$ sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = -0,5 \times e^{-0,5x+2}$.
  Or $-0,5$ est négatif et $e^{-0,5x+2}$ est toujours strictement positive, donc la dérivée est strictement négative, et la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Pour $g(x) = e^{x^2-4}$, sa dérivée a le signe de $2x$.
  Donc la fonction g est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.



Étudier une fonction $x \mapsto e^{u(x)}$

Exercice corrigé

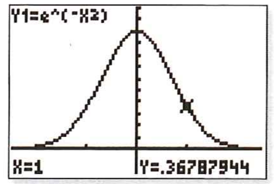
Énoncé

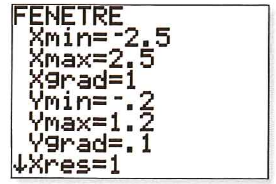
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = e^{-x^2}.$$

1 Calculer $f'(x)$. Étudier son signe.
En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
Vérifier que les images par la fonction f de $-2,5$ et $2,5$ sont inférieures à $0{,}002$.

2 On a tracé ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sur $[-2,5\,;2,5]$ dans la fenêtre précisée.

a. Quel semble être le nombre de points d'inflexion pour cette courbe $\mathscr{C}$?





b. Justifier que la dérivée seconde, dérivée de $f'(x)$, est : $f''(x) = (4x^2 - 2)\,e^{-x^2}$.

c. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les abscisses des points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

Points méthode

❶ Pour étudier le sens de variation d'une fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$, on calcule la dérivée :
$f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$
et on étudie le signe de $u'(x)$, sachant qu'une exponentielle est toujours **strictement positive** :
$e^{u(x)} > 0$.

❷ On rappelle que la courbe d'une fonction f admet un **point d'inflexion** si la **dérivée seconde f''** s'annule en changeant de signe.

Voir chapitre 2 page 48

Solution

1 On a $f(x) = e^{-x^2}$, donc $f'(x) = -2x \times e^{-x^2}$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $e^{-x^2} > 0$.
Donc la dérivée est du signe de $-2x$.
D'où le signe de $f'(x)$ ci-contre et le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
La fonction f admet un maximum en 0 de valeur : $f(0) = e^{-0^2} = 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	1	↘	

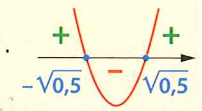
$f(-2,5) = f(2,5) \approx 0{,}0019 < 0{,}002$, non « visible » sur le graphique.

2 a. Si on imagine la tangente à la courbe $\mathscr{C}$, la tangente commence en dessous de la courbe, puis passe au-dessus de la courbe (en particulier en 0) et repasse ensuite en dessous de la courbe.
La courbe $\mathscr{C}$ semble donc avoir deux points d'inflexion.

b. On a $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$. On applique la dérivée d'un produit :
$f''(x) = -2x\,e^{-x^2} + (-2x \times e^{-x^2}) \times (-2x)$. *On met e^{-x^2} en facteur.*
$= e^{-x^2} \times (-2 + 4x^2) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$.

c. $4x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0,5 \Leftrightarrow x = -\sqrt{0,5} \approx -0{,}707$ ou $x = \sqrt{0,5} \approx 0{,}707$.

D'après le signe de $4x^2 - 2$ (ci-contre), la courbe $\mathscr{C}$ admet deux points d'inflexion, points d'abscisse $-\sqrt{0,5}$ et $\sqrt{0,5}$.



Exercices d'application

Voir exercices 94 à 106

11 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+1)e^{-0,5x}$.

1 Justifier les résultats obtenus par calcul formel ci-contre.

1	f(x):=(2x+1)*exp(-0.5*x)
	x -> (2·x+1)·exp((-0.5)·x)
2	deriver(f(x))
	(-x+1.5)·exp(-0.5·x)
3	deriver(deriver(f(x)))
	0.5·(x-3.5)·exp(-0.5·x)

Justifier que la dérivée f' de la fonction f a le même signe que $1,5 - x$.

2 Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

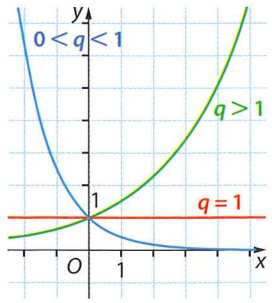
3 Montrer que la courbe représentative de f admet un point d'inflexion que l'on précisera.

12 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = e^{2x} - 2x + 1.$$

1 a. Calculer $g'(x)$.
b. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
c. En déduire le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$. On précisera la valeur $g(0)$.
d. Justifier que la fonction g est convexe sur $\mathbb{R}$.

2 Dresser le tableau de signes de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

3 Soit $h(x) = 0,5\,e^{2x} - x^2 + x$ sur $\mathbb{R}$.
Justifier que la courbe représentative de la fonction h admet un point d'inflexion.

Capacités	Mise en œuvre
Reconnaître les **fonctions exponentielles de base q**, avec $q>0$.	Par l'expression : $f(x)=k\times q^x$, prolongement de la suite géométrique de raison q et de terme initial k. Pour tout réel x, $q^x>0$. On admet qu'une fonction exponentielle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On ne connaît pas, dans ce chapitre, l'expression de sa dérivée. Par la représentation graphique : courbe convexe comme ci-contre, entièrement située **au-dessus de l'axe des abscisses** qui **croît**, ou **décroît**, très rapidement dès que x s'éloigne de 1. 
Connaître le **sens de variation** d'une fonction exponentielle de base q, avec $q>0$.	Si $q>1$, la fonction $x\mapsto q^x$ est **croissante** sur $\mathbb{R}$. Si $0<q<1$, la fonction $x\mapsto q^x$ est **décroissante** sur $\mathbb{R}$. Si $q=1$, la fonction $x\mapsto q^x=1$ est **constante** sur $\mathbb{R}$.
Savoir utiliser la **relation fonctionnelle** et les formules, avec $q>0$.	Pour tous réels x et y : $q^{x+y}=q^x\times q^y$, et pour tout entier relatif n, on a : $q^{n\times x}=(q^x)^n$. Pour tout entier naturel $n>0$, comme $\frac{1}{n}\times n=1$, alors : $q^{1/n}$ est le nombre tel que $(q^{1/n})^n$. Ainsi, **$q^{1/n}$ est la « racine n-ième » de q.**
Connaître la fonction **exp : $x\mapsto e^x$** ; calculer ses **valeurs** ; connaître son **signe** et sa **dérivée**.	La fonction exponentielle de base **e** est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$: exp : $x\mapsto \mathrm{e}^x$, avec 1 pour nombre dérivé en 0 : $\exp'(0)=1$. Par définition, le **nombre e** est l'image de 1 par cette fonction. On obtient les valeurs par la calculatrice ou un logiciel. **Voir page 74** e^x est toujours **strictement positive** : pour tout réel x, $\mathrm{e}^x>0$. La dérivée de la fonction exp est elle-même : si $f(x)=\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$, alors $f'(x)=\mathrm{e}^x$. La fonction exponentielle de base **e** est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Savoir utiliser la **relation fonctionnelle** pour transformer une écriture.	Pour tous réels x et y, on obtient les formules des exposants : $\exp(0)=\mathrm{e}^0=1$; $\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^y$; $\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{\mathrm{e}^x}$; $\mathrm{e}^{x-y}=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}$; en particulier : $\mathrm{e}^x\times\mathrm{e}^{-x}=1$; et pour tout entier relatif n, $\mathrm{e}^{n\times x}=(\mathrm{e}^x)^n$; en particulier $\mathrm{e}^{2x}=(\mathrm{e}^x)^2$.
Résoudre une **équation** ou une **inéquation** avec exp.	Deux exponentielles sont égales si, et seulement si, leurs exposants sont égaux : $\mathrm{e}^A=\mathrm{e}^B \Leftrightarrow A=B$. En particulier : $\mathrm{e}^A=1 \Leftrightarrow A=0$. Les équations de type $\mathrm{e}^x=k$, où k est un réel strictement positif, seront vues au chapitre 4. Dans ce chapitre, on résout de façon approchée. Deux exponentielles sont rangées dans le même ordre que leurs exposants : $\mathrm{e}^A\geqslant\mathrm{e}^B \Leftrightarrow A\geqslant B$. En particulier : • $\mathrm{e}^A\geqslant 1 \Leftrightarrow A\geqslant 0$ • $0<\mathrm{e}^A<1 \Leftrightarrow A<0$.
Savoir calculer la **dérivée** d'une fonction de la forme $x\mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$.	La fonction $f: x\mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur un intervalle I. Sa dérivée est : $f'(x)=u'(x)\times\mathrm{e}^{u(x)}$. La dérivée de e^u est le produit de la **dérivée de l'exposant** que multiplie l'**exponentielle**.

QCM

Voir corrigés en fin de manuel

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.

13 La fonction $x\mapsto 27\times 0{,}95^x$:
a. est définie seulement sur $]0\,;+\infty[$. b. est toujours strictement positive. c. est inférieure à 1.

14 Une entreprise prépare et conditionne en continu du jus d'orange.
Sa production horaire est au départ de 3 000 L. Puis on estime que celle-ci augmente de 4 % par semaine.
On note $P(x)$ la production horaire, en L, au bout de x jours d'évolution. Alors :
a. $P(x)=3\,000+0{,}04\,x$. b. $P(x)=3\,000+0{,}04^x$. c. $P(x)=3\,000\times 1{,}04^x$.

15 Pour la production de la question **14**, la semaine est de 7 jours.
La production horaire au bout de 2 semaines et 3 jours est, arrondie au litre près :
a. $P(2{,}3)\approx 3\,283$. b. 3 300. c. 3 335.

16 L'expression $\mathrm{e}^{2x}+3\mathrm{e}^x-4$ s'écrit aussi :
a. $\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+3-4)$. b. $(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x+4)$. c. $\mathrm{e}^{2x+3x}-4$.

17 Le quotient $\frac{10\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ s'écrit aussi, pour tout réel x :
a. $\frac{10}{1+\mathrm{e}^{-x}}$. b. $10-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. c. $1-\frac{10}{1+\mathrm{e}^x}$.

18 L'équation $\mathrm{e}^{1-x^2}=1$ dans $\mathbb{R}$:
a. a deux solutions. b. a une solution. c. n'a aucune solution.

19 L'expression $f(x)=(\mathrm{e}^x+1)(\mathrm{e}^{-x}-1)$ est :
a. positive sur $]-\infty\,;0]$. b. toujours strictement positive. c. positive sur $[0\,;+\infty[$.

20 L'inéquation $\mathrm{e}^{2x-1}<\mathrm{e}^{x^2}$ est résolue ci-contre à l'aide d'un calcul formel.

$$\text{solve}\left(e^{2\cdot x-1}<e^{x^2},x\right) \qquad x\neq 1$$

Alors, l'ensemble solution dans $[0\,;+\infty[$ est :
a. $]1\,;+\infty[$. b. $S=\{1\}$. c. $[0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.

21 La dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$ est :
a. $f'(x)=2\times\mathrm{e}^{-x}$. b. $f'(x)=-2\times\mathrm{e}^{-x}$. c. $f'(x)=(-2x+3)\,\mathrm{e}^{-x}$.

22 La fonction f définie sur $[-3\,;3]$ par $f(x)=10-\mathrm{e}^{-x^2}$:
a. admet un maximum en 0. b. est positive sur $[-3\,;3]$. c. est négative sur $[-3\,;3]$.

➔Les exercices portant un numéro jaune sont corrigés à la fin du manuel.

1 Fonctions $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$

23 Vrai ou faux ?

Justifier la réponse.

1 La fonction $x \mapsto q^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, quel que soit le nombre q strictement positif.

2 Pour tout réel x, $4 \times 2^x = 2^{x+2}$.

3 Pour tout réel x, $\dfrac{5^{x+3}}{2^x} = 125 \times 2{,}5^x$.

4 Pour tout réel x, $\dfrac{(2^x)^3}{4^{x+1}} = 2^{x-2}$.

24 QCM

Donner la seule bonne réponse.

1 Soit $f(t) = 0{,}7^t$. Alors, $f(t+1) - f(t) = \dots$

a. $0{,}3 \times 0{,}7^t$. **b.** $0{,}7^t$. **c.** $-0{,}3 \times 0{,}7^t$.

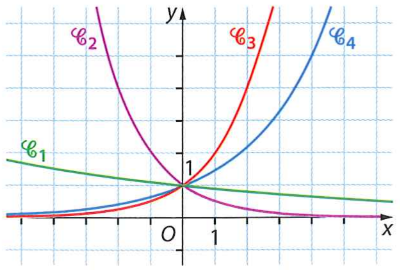
2 Soit $g(t) = 3 \times 1{,}5^t$. Alors, $\dfrac{g(t+1)}{g(t)} = \dots$

a. $4{,}5$. **b.** $1{,}5$. **c.** $1{,}5^t$.

25 Associer courbes et fonctions

On considère les fonctions f, g, h et k définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2^x$; $g(x) = 1{,}5^x$; $h(x) = 0{,}5^x$; $k(x) = 0{,}9^x$.

À chaque courbe, associer la fonction qu'elle représente.



26 Comparer les nombres q

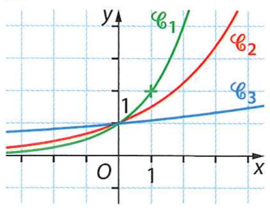
Dans chaque cas, on considère trois nombres q_1, q_2 et q_3 et les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_1(x) = {q_1}^x ; \quad f_2(x) = {q_2}^x \quad \text{et} \quad f_3(x) = {q_3}^x ,$$

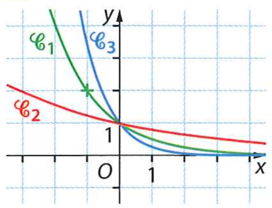
de courbes représentatives $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

Lire q_1. Comparer les nombres q_1, q_2 et q_3.

a.



b.



27 Variations absolue et relative

On considère une production totale $f(t)$, en millier de tonnes, exprimée en fonction du temps t écoulé depuis le début de la production.

Pour chaque fonction, exprimer plus simplement la variation absolue et la variation relative entre t et $t+1$:

$$f(t+1) - f(t) \quad \text{et} \quad \frac{f(t+1) - f(t)}{f(t)}.$$

a. $f(t) = 3 \times 0{,}75^t$ **b.** $f(t) = 0{,}3 \times 1{,}94^t$

28 Transformer des expressions

Simplifier : $A = \dfrac{2^x \times (2^{3x})^2}{2^{x+3}}$ et $B = \dfrac{1{,}3^{2x} \times (1{,}3)^{-x+2}}{2 \times 1{,}3}$.

29 Calcul de sommes

1 Calculer $1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6$, lorsque $q = 2{,}5$, puis lorsque $q = 0{,}93$. *Arrondir à 10^{-2} près.*

2 On rappelle que : $q^{nx} = (q^x)^n$, pour tout n de $\mathbb{N}$.

Montrer que, pour tout réel $x \neq 0$ et $q \neq 1$, on a :

$$1 + q^x + q^{2x} + q^{3x} + q^{4x} + q^{5x} + q^{6x} = \frac{1 - q^{7x}}{1 - q^x}.$$

Pour les exercices 30 et 31

Sens de variation de f sur $\mathbb{R}$

30

a. $f(x) = 0{,}35^x$ **b.** $f(x) = 1{,}94^x$

31

a. $f(x) = 0{,}005 \times 2{,}8^x$ **b.** $f(x) = 3\,000 \times 0{,}99^x$

32 Modéliser une évolution

Modéliser chaque évolution par une fonction f de la forme $f(x) = k \times q^x$: préciser les valeurs de k et de q, et le sens de variation de la fonction f.

1 Un jardin est envahi de mousse.

Initialement de 3 m², la surface occupée par la mousse augmente chaque mois de 8 %.

2 On injecte à un patient 2 mL d'un médicament.

Son organisme en assimile 30 % toutes les heures.

33 Taux d'évolution

Une population de 5 millions double en 10 ans.

On note $P(x)$ la population, en million, au bout de x dizaines d'années, avec $P(0) = 5$.

a. Justifier que la population s'écrit $P(x) = 5 \times 2^x$.

b. Calculer la population au bout de 25 ans.

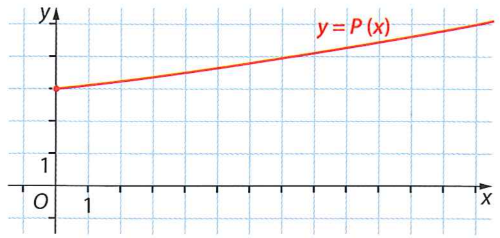
c. Calculer le taux d'évolution annuel de cette population, arrondi à un point de pourcentage près.

34 Production continue en augmentation

Une entreprise fabrique en continu des briques en béton cellulaire, matériau moins cher et plus écologique que le béton traditionnel. Le 1er janvier 2012, elle produit 3 000 briques. Puis on estime que sa production journalière $P(x)$, en millier d'unités, augmente de façon continue chaque mois de 4 %.

Ainsi, au bout de x mois écoulés : $P(x) = 3 \times 1{,}04^x$.

On considère que les mois durent tous 30 jours.



1 a. Calculer les productions au 1er février 2012 et au 15 mars 2012. *Arrondir à 10 briques près.*

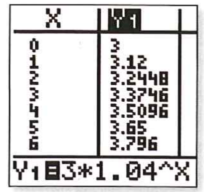
b. Déterminer le pourcentage d'augmentation de la production sur 15 jours.

Arrondir le pourcentage à 10^{-2} près.

2 Étudier le sens de variation de la fonction P.

3 a. À l'aide du graphique, préciser le mois durant lequel la production journalière dépasse 4 000 briques.

b. Tabuler à la calculatrice la fonction P sur $[0 ; 12]$ par pas de 1. Retrouver le résultat de la question **a.**



35 Étude d'une demande

Une entreprise récolte et conditionne des fruits exotiques. On estime que la quantité demandée Q, en tonne, en fonction du prix p, en € par kg, est modélisée par la fonction f :

$$Q = f(p) = 7{,}4 \times 0{,}6^p, \text{ où } p \in [1 ; 4].$$

1 Étudier le sens de variation de f sur $[1 ; 4]$.

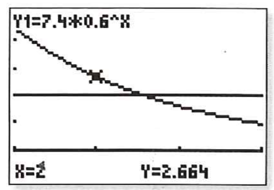
Interpréter le résultat.

2 L'entreprise a 2 tonnes de fruits à vendre.

a. Montrer que l'équation $f(p) = 2$ admet une unique solution α sur $[1 ; 4]$.

b. À l'aide du solveur graphique de la calculatrice, donner la valeur approchée par défaut de la solution α à 0,01 près.

Voir AP page 93



c. En déduire le prix maximal d'un kilo de fruits permettant d'écouler totalement la production.

36 Prix d'équilibre

Un éditeur réalise une étude de marché sur la publication de livres pour enfant, dont le prix est compris entre 10 et 30 €.

On estime que, lorsque le prix du livre est x €, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$, en millier de livres, sont données par : $f(x) = 1{,}05^x$ et $g(x) = \dfrac{7}{1{,}05^x}$.

1 Étudier le sens de variation des fonctions f et g sur l'intervalle $[10 ; 30]$. Interpréter les résultats.

2 On admet que l'équation $f(x) = g(x)$ a une unique solution α sur $[0 ; 10]$.

a. Montrer que α est solution de l'équation :

$$1{,}1025^x = 7.$$

b. À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, déterminer la valeur arrondie de α à 0,01 près.

3 Quel est le prix d'équilibre ? Quelle est alors la quantité de livres offerte et demandée, à 10 livres près ?

37 Réaliser des prévisions

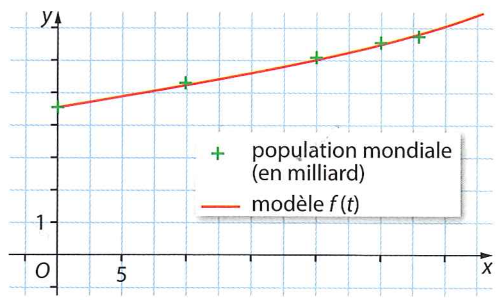
On s'intéresse à l'évolution de la population mondiale, en milliard, depuis 1980. Le tableau suivant donne la population aux 1ers janviers des années indiquées :

Années	1980	1990	2000	2005	2008
Pop. mondiale (en milliard)	4,5	5,3	6,1	6,5	6,7

Source : Geohive.

Le graphique permet de modéliser la population mondiale $f(t)$, en milliard, en fonction du nombre t d'années écoulées depuis le 1er janvier 1980 par :

$$f(t) = 4{,}54 \times 1{,}014^t.$$



1 L'ONU a estimé que la population mondiale a dépassé 7 milliards au cours de l'année 2011.

Cette estimation est-elle cohérente avec le modèle ?

2 Calculer $\dfrac{f(t+1) - f(t)}{f(t)}$. Interpréter le résultat en termes de taux annuel d'évolution.

3 À l'aide d'une calculatrice, estimer l'année au cours de laquelle la population mondiale devrait dépasser 10 milliards de personnes, selon le modèle.

2 Exponentielle de base e

38 Vrai ou faux ?

Justifier la réponse.

1. L'équation $e^x = 0$ n'a pas de solution.
2. Pour tout réel x, $e^x \times e = e^{x+1}$.
3. L'équation $e^x = e$ a pour solution 0.
4. L'équation $e^x = e^{-x}$ n'a pas de solution.

39 Simplifier avec le nombre e

Écrire sous forme e^k, où k est un entier relatif :

$A = \dfrac{e \times e^2}{e^4}$; $B = (e^{-2})^2 \times e^3$; $C = \dfrac{1}{e^2}$.

40 Écriture simplifiée de nombre

Écrire plus simplement :

$D = \dfrac{e^3 \times (e^{-2})^4 \times e}{e^{-1}}$ et $E = (e^3)^4 \times \dfrac{e^{-2}}{e^5}$.

41 Simplifier une expression

Écrire plus simplement :

1. $f(x) = e^{x+1} \times e^{-2}$ et $g(x) = e^{1-2x} \times e^{x+1}$.
2. $f(x) = e^{3x+4} \times e^{-x+1}$ et $g(x) = \dfrac{e^{x+1} \times (e^x)^3 \times e}{e^{2x-1}}$.

42 Justifier des égalités

Montrer que pour tout réel x :

a. $(e^x - 1)(e^x + 3) = e^{2x} + 2e^x - 3$.

b. $1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1} = \dfrac{1 - e^x}{1 + e^x}$. **c.** $\dfrac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

43 Justifier des résultats

On a effectué des développements par calcul formel :

```
1 simplifier( (e^(2*x) + 1)^2 - (e^(2*x) - 1)^2 )
                    4· exp(2· x)
2 simplifier( (e^x+e^(-x))^2 - (e^x-e^(-x))^2 )
                         4
```

Écrire les calculs effectués et justifier les résultats obtenus.

44 Calculs de sommes

1. Calculer $1 + e + e^2 + \ldots + e^{10}$ en introduisant une suite géométrique.
2. Soit un réel $x \neq 0$. Montrer que :
$$1 + e^x + e^{2x} + \ldots + e^{11x} = \frac{1 - e^{12x}}{1 - e^x}.$$
3. Simplifier l'écriture de la somme :
$$1 + e^{2x} + e^{4x} + \ldots + e^{10x}, \text{ où } x \neq 0.$$

45 Mettre e^x en facteur

Factoriser :

$f(x) = 2x e^x - x^2 e^x$ et $g(x) = e^x - 4x^2 e^x$.

46 Factoriser des expressions

Factoriser : $f(x) = x^2 e^x - 2x e^x + 3e^x$

et $g(x) = 3x^2 e^x + x e^x + e^x$.

Pour les exercices 47 à 50

Résoudre des équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

47 **a.** $e^{2x} - 1 = 0$; **b.** $e^{4x-1} = e^2$.

48 **a.** $(2x - 5)(e^x + 1) = 0$; **b.** $e^{2x+1} = \dfrac{1}{e}$.

49 **a.** $e^{-3x} - 1 = 0$; **b.** $\dfrac{1}{e^{x-2}} + 2 = 0$.

50 **a.** $e^x - x e^x = 0$. *On factorisera d'abord.*
b. $x^2 e^x - 3x e^x + 2e^x = 0$.

51 Avec changement de variable

On considère l'équation : (E) $e^{2x} + 5e^x - 6 = 0$.

1. On pose $X = e^x$. Montrer que si x est solution de l'équation (E), alors $X^2 + 5X - 6 = 0$. Résoudre cette équation.
2. Résoudre l'équation (E).

52 Équation d'inconnue e^x

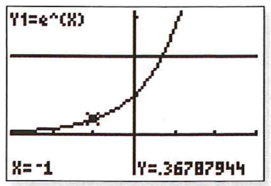
1. Résoudre l'équation $(X - 1)(2X + 1) = 0$.
2. Soit l'équation (E) $2e^{2x} = e^x + 1$.

a. En posant $X = e^x$, montrer que l'équation (E) revient à résoudre l'équation de la question 1.

b. En déduire la résolution de l'équation (E).

53 Résolution approchée

On admet que l'équation $e^x = 2$ n'a qu'une seule solution α. (On en verra la solution exacte dans le chapitre 4.)



1. On a tracé ci-contre la courbe de la fonction exponentielle et la droite d'équation $y = 2$. Encadrer α entre deux entiers consécutifs.
2. En utilisant le solveur graphique de la calculatrice, donner la valeur arrondie de α à 0,001 près.

3 Étude de la fonction $x \mapsto e^x$

54 Vrai ou faux ?

Justifier la réponse.

Soit la fonction f définie sur $[-3 ; 5]$ par :
$$f(x) = (x + 2)e^x.$$
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Le point $A(-2 ; 0)$ appartient à la courbe $\mathscr{C}$.
2. Pour tout réel x, $f'(x) = (x + 3)e^x$.
3. La tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 admet pour équation : $y = 3x + 2$.

55 QCM

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2x e^x$.

Donner la seule bonne réponse.

1. $g(0)$ est égal à :
a. 0. **b.** 2. **c.** -2.
2. Pour tout réel x, $g'(x) = \ldots$
a. $2e^x$. **b.** $(2x + 2)e^x$. **c.** $2 + e^x$.
3. $g'(-1)$ est égal à :
a. 2. **b.** $\dfrac{4}{e}$. **c.** 0.
4. La fonction g sur $\mathbb{R}$:
a. a un minimum.
b. a un maximum.
c. n'a pas d'extremum.

Pour les exercices 56 à 61

Calculs de dérivées

Dériver les fonctions sans s'occuper de l'ensemble de définition.

56 $f(x) = e^x + x^2$ et $g(x) = (x - 2)e^x$.

57 $f(x) = 3x^2 - 2e^x$ et $g(x) = (4 - x^2)e^x$.

58 $f(x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$ et $g(x) = x^3 e^x$.

59 $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ et $g(x) = \dfrac{x}{e^x}$.

60 $f(x) = \dfrac{e^x}{x + 2}$ et $g(x) = \dfrac{x + 2}{e^x}$.

61 $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x}$ et $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

Pour les exercices 62 à 64

Résolutions d'inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations données.

62 **a.** $2e^x - 2 \geqslant 0$; **b.** $2e^x + 2 \geqslant 0$.

63 **a.** $(x - 2)e^x \geqslant 0$; **b.** $\dfrac{-0{,}5x + 3}{e^x} \geqslant 0$.

64 **a.** $(4 - x^2)e^x \geqslant 0$; **b.** $\dfrac{1 - e^x}{e^x + 1} \geqslant 0$.

Pour les exercices 65 à 70

Tableaux de signes

Dresser le tableau de signes de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
On ne doit pas calculer la dérivée $f'(x)$.

65 $f(x) = (2x^2 + 3x - 5)e^x$.

66 $f(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 4}{e^x + 3}$.

67 $f(x) = (2x + 5)(e^x + 1)$.

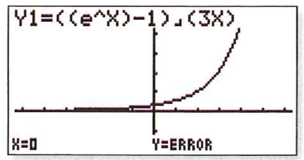
68 $f(x) = (3x - 6)(e^x - e)$.

69 $f(x) = (4x^2 - 3x - 1)(e^x - e^2)$.

70 $f(x) = (e^x + 3)(e^x - e^2)$.

71 Prolongement par continuité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :
$$f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}.$$



Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est visualisée à l'écran d'une calculatrice.

a. Expliquer la réponse donnée par la calculatrice pour $x = 0$.

b. On cherche une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \neq 0$, on a $g(x) = f(x)$.
À l'aide de la calculatrice, rechercher quelle valeur donner à $g(0)$ pour que la fonction g soit continue en 0.

c. Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Pour les exercices 72 à 78

Étude de variations

Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle donné.

72 $f(x) = 3e^x + 2x$ sur $[0 ; 5]$.

73 $f(x) = 3e^x - 3x + 1$ sur $[-1 ; 3]$.

74 $f(x) = (2x+3)\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$.

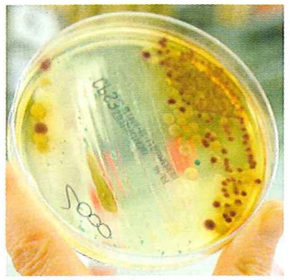
75 $f(x) = (x^2 - 9x + 19)\mathrm{e}^x$ sur $[0\,;6]$.

76 $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 5}{\mathrm{e}^x}$ sur $[-2\,;4]$.

77 $f(x) = \dfrac{2\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ sur $[0\,;10]$.

78 $f(x) = \dfrac{x^2+1}{\mathrm{e}^x}$ sur $[-4\,;1]$.

79 Doublement de population



Une population de bactéries est modélisée par : $f(x) = 2 \times \mathrm{e}^x$, où x est le temps en heure depuis le début du protocole.
La population est exprimée en millier.

1 a. Calculer la population au bout de 6 h, arrondie au millier près.
b. Calculer la population au bout de 2 h 30.

2 a. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.
b. Le rythme de croissance d'une population est sa dérivée. Calculer le rythme de croissance au bout de 2 h 30, en millier par heure.

3 a. Simplifier $\dfrac{f(x+1) - f(x)}{f(x)}$, taux de variation de la population entre les instants x et $x+1$.
En déduire le taux d'évolution horaire de cette population.
b. Calculer le taux d'évolution pour 10 min, soit un sixième d'heure.

4 À l'aide des fonctionnalités d'une calculatrice, déterminer le temps nécessaire pour que cette population double.

80 Interpréter graphiquement

La fonction f est définie sur $[-5\,;5]$ par :
$$f(x) = (3 - x^2)\mathrm{e}^x.$$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1 a. Montrer que $f'(x) = \mathrm{e}^x(-x^2 - 2x + 3)$.
b. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $[-5\,;5]$, puis dresser le tableau de variations de f.
c. La courbe $\mathscr{C}$ admet-elle des tangentes horizontales ?

2 a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
b. Indiquer les coordonnées du point d'intersection entre la tangente T et l'axe des abscisses.
On note ce point I.

3 Tracer T et $\mathscr{C}$, en plaçant le point I sur le graphique.

81 Utiliser une fonction auxiliaire

1 Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + 1.$$
a. Déterminer $g'(x)$.
b. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
c. Calculer $g(0)$. En déduire que, pour tout réel x, $g(x)$ est strictement positive.

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + x.$$
a. Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = g(x)$.
b. En déduire les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3 La courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ? Justifier.

82 Variations pour connaître le signe

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \mathrm{e}^x - x + 1.$$
a. Calculer $g'(x)$.
b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0$.
c. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.
Préciser la valeur de $g(0)$ et en déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.

PARTIE B

On considère maintenant la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;+\infty[$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1 a. Montrer que pour tout réel $x \geqslant -1$, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{\mathrm{e}^x}$.
b. En utilisant les résultats de la question **2** de la Partie A, préciser le signe de $f'(x)$ et les variations de la fonction f sur $[-1\,;+\infty[$.

2 Déterminer une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3 a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0 dans $[-1\,;0]$.
b. Justifier que $-0{,}5 < x_0 < -0{,}4$.
c. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[-1\,;+\infty[$.

4 Tracer la droite T et la courbe $\mathscr{C}$ sur $[-1\,;4]$.
On placera x_0 sur le graphique.

83 Prix d'équilibre

Une entreprise fabrique et vend des fourchettes, dont le prix unitaire est compris entre 1 et 4 €. On estime que pour un prix unitaire de x euros :
- l'offre $f(x)$, en dizaine de milliers de fourchettes, est : $f(x) = 0{,}05\,\mathrm{e}^x$.
- la demande $g(x)$, en dizaine de milliers de fourchettes, est :
$$g(x) = \frac{5}{\mathrm{e}^x}.$$

1 On pose $h(x) = f(x) - g(x)$ sur $[1\,;4]$.
a. Calculer $h'(x)$. On rappelle que $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.
b. Étudier le signe de $h'(x)$. En déduire le sens de variation de la fonction h sur $[1\,;4]$.

2 On a effectué la recherche suivante à l'aide du logiciel *Xcas* :

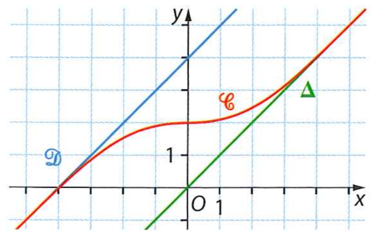
1	resoudre_numerique(e^x=10)
	2.30258509299

a. Justifier que l'équation résolue ci-dessus permet d'obtenir le prix d'équilibre x_0.
b. Lire la valeur arrondie de x_0 au centime près.

3 Lorsqu'on se trouve à l'équilibre, quelle est l'offre et la demande ? Utiliser la valeur exacte de e^{x_0}.
En déduire le chiffre d'affaires engendré par la vente des fourchettes au prix d'équilibre.

84 Justifier des positions relatives

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \dfrac{4}{1+\mathrm{e}^x}$.
On a tracé ci-après la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f et les droites Δ et $\mathscr{D}$ d'équations respectives :
$$y = x \quad\text{et}\quad y = x + 4.$$



1 Conjecturer les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}$ avec les droites Δ et $\mathscr{D}$.

> **Aide** Pour l'étude des positions relatives de deux courbes, revoir l'AP page 62.

2 a. Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$.
b. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ d'équation $y = x$.

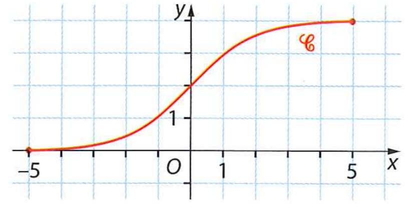
3 a. Démontrer que pour tout réel x, on a :
$$f(x) - (x+4) = \frac{-4\,\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}.$$
b. En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x + 4$.

4 a. On a obtenu l'expression de la dérivée $f'(x)$ par un logiciel de calcul formel.
Justifier l'expression obtenue.
b. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
c. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale.

1	f(x):=x+4/(1+exp(x))
	x -> x+ 4/(1+exp(x))
2	deriver(f(x))
	(exp(x)-1)^2/(exp(x)+1)^2

85 Recherche d'un point d'inflexion

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[-5\,;5]$ par :
$$f(x) = \frac{4\,\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}.$$
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.



1 Démontrer que, pour tout réel x de $[-5\,;5]$:
$$f'(x) = \frac{4\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

2 Étudier le signe de la dérivée $f'(x)$ sur $[-5\,;5]$.
En déduire le sens de variation de f sur $[-5\,;5]$.

3 a. À l'aide du graphique, estimer l'abscisse du point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.
b. À l'aide du logiciel *Xcas*, on a obtenu l'expression de la dérivée seconde $f''(x)$ de f.
Sans justifier le résultat obtenu, étudier le signe de la dérivée seconde $f''(x)$ sur l'intervalle $[-5\,;5]$.

1	f(x):=4*exp(x)/(exp(x)+1)
	x -> 4·(exp(x)/(exp(x)+1))
2	deriver(deriver(f(x)))
	-4·exp(x)·(exp(x)-1)/(exp(x)+1)^3

c. Déterminer par le calcul l'abscisse du point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

86 Points d'inflexion

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (x^2+1)\,\mathrm{e}^x.$$

1 Visualiser sa courbe représentative $\mathscr{C}$ à l'écran d'une calculatrice dans la fenêtre $[-8\,;2]$.
Conjecturer le nombre de points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$. On ne demande pas de valeurs.

2 À l'aide du logiciel TI-Nspire™, on a obtenu l'expression de la dérivée $f'(x)$ et de la dérivée seconde $f''(x)$ de f.

Define $f(x)=(x^2+1)\cdot e^x$	*Terminé*
$\frac{d}{dx}(f(x))$	$(x^2+2\cdot x+1)\cdot e^x$
$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	$(x^2+4\cdot x+3)\cdot e^x$

a. Justifier $f'(x)$. Étudier son signe.
En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
b. Sans justifier le résultat obtenu par le logiciel, étudier le signe de $f''(x)$ sur $[-8\,;2]$.
c. Démontrer la conjecture faite à la question **1**.

74 … u

… ux ?

… réponse.

… $f(x)=\mathrm{e}^{-0,5x+1}$, alors $f'(x)=-0,5\,\mathrm{e}^{-0,5x+1}$.

2 Si $f'(x)=\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}$, alors $f'(x)=f(x)$.

3 Si $f'(x)=(x+5)\,\mathrm{e}^{-x}$, alors $f'(x)=(x+4)\,\mathrm{e}^{-x}$.

Pour les exercices 88 à 93
Calculs de dérivées

Dériver les fonctions. On factorisera au maximum les expressions obtenues.

88 $f(x)=\mathrm{e}^{3x}+2$ et $g(x)=10\,\mathrm{e}^{-0,5x}$.

89 $f(x)=x\,\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x)=\mathrm{e}^{-x^2+x}$.

90 $f(x)=(2x-3)\,\mathrm{e}^{-0,1x}$ et $g(x)=(5-0,1\,x)\,\mathrm{e}^{2x}$.

91 $f(x)=4\,x\,\mathrm{e}^{-x+1}$ et $g(x)=3\,\mathrm{e}^{1-x^2}$.

92 $f(x)=(x^2+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x)=\mathrm{e}^{\frac{1-x}{2}}$.

93 $f(x)=\exp\left(\dfrac{x-3}{x-1}\right)$ et $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$.

Pour les exercices 94 à 101
Étude de variations

Étudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle donné.

94 $f(x)=5\,\mathrm{e}^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$.

95 $f(x)=100\,\mathrm{e}^{-0,5x+1,5}$ sur $\mathbb{R}$.

96 $f(x)=(\mathrm{e}-1)\,\mathrm{e}^{2x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

97 $f(x)=0,01\,\mathrm{e}^{1,2x}+2x$ sur $[0\,;20]$.

98 $f(x)=(4-x)\,\mathrm{e}^{x/2}$ sur $[0\,;4]$.

99 $f(x)=\dfrac{10}{1+2\,\mathrm{e}^{-0,2x}}$ sur $[-2\,;10]$.

100 $f(x)=\dfrac{25}{5+2\,\mathrm{e}^{-0,5x}}$ sur $[0\,;15]$.

101 $f(x)=\exp\left(\dfrac{x^2}{x-1}\right)$ sur $]-\infty\,;1]$.

102 Réaliser une prévision

Le glacier d'Aletsch, classé à l'UNESCO, est le plus grand glacier des Alpes. Situé dans le sud de la Suisse, il alimente la vallée du Rhône.

Pour étudier le recul de ce glacier au fil des années, une première mesure a été effectuée en 1900 : ce glacier mesurait alors 25,6 km de long.
Des relevés ont ensuite été effectués tous les 20 ans, ce qui permet de modéliser la longueur du glacier $f(t)$, en km, en fonction du nombre t d'années écoulées depuis 1900 par $f(t)=25,6-0,2\times\mathrm{e}^{0,025t}$.

1 a. Calculer la dérivée de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. Interpréter.
2 Estimer, selon le modèle, la longueur du glacier en 2013.
3 À l'aide de la calculatrice, estimer l'année de disparition du glacier. *Arrondir à l'unité près.*
4 Le modèle est-il valable sur $[0\,;+\infty[$? Argumenter.

103 Décote exponentielle

On estime que la cote Argus, en euro, de la voiture de Lydia, mise en circulation au 1[er] mars 2009 est
$$f(x)=26\,315\times\mathrm{e}^{-0,15x},$$
où x est le temps écoulé depuis le 1[er] mars 2009, en année.
$f(x)$ est la valeur de revente de la voiture à l'instant x.

1 Calculer et interpréter $f(0)$.
2 Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;20]$. Interpréter.
3 a. Calculer $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$.
En déduire le taux de diminution annuelle de la valeur de la voiture, arrondi à un point de pourcentage près.
b. Lydia revend sa voiture au 1[er] septembre 2013, dans un état impeccable. Calculer la cote Argus de sa voiture, sans décote de kilométrage, arrondie à 100 € près.
Calculer alors le taux de diminution de la valeur de la voiture depuis son achat. *Arrondir à un point de pourcentage près.*
c. Calculer le taux de diminution de la cote sur six mois. *Arrondir à un point de pourcentage près.*

104 Croissance exponentielle

Sur la période 2001-2008, on modélise le nombre de domaines sur Internet en « .fr », exprimé en millier, par la fonction f définie par $f(x)=86,6\,\mathrm{e}^{0,35x}$, où x désigne le nombre d'années écoulées depuis le 1[er] janvier 2001.
On fait l'hypothèse que le modèle reste valable jusqu'en 2020, c'est-à-dire que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0\,;19]$.

1 a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;19]$. Interpréter.
b. Calculer $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$.
Interpréter le nombre obtenu en termes de variation relative, puis de taux d'évolution en pourcentage, arrondi à un point de pourcentage près.
2 Calculer $f(8,5)$. Interpréter le résultat.
3 a. Montrer que l'équation $f(x)=10\,000$ admet une unique solution x_0 dans $[0\,;19]$.
Donner la valeur arrondie de x_0 à $\frac{1}{12}$ près.

Voir Savoir faire page 73

b. En déduire l'ensemble solution, dans $[0\,;19]$, de l'inéquation $f(x)\geqslant 10\,000$.
Exprimer le résultat en fonction de x_0.
c. Selon le modèle, à partir de quelle année et en quel mois le nombre de domaines en « .fr » dépassera-t-il 10 millions ?
4 Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :
$f(x)=\mathrm{K}\times q^{x}$, avec K et q nombres réels.

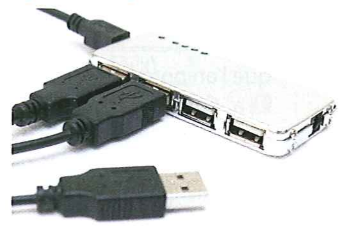
105 Factoriser la dérivée

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\mathrm{e}^{2x}+4\,\mathrm{e}^{x}-6\,x.$$
1 Calculer $f'(x)$, puis vérifier que :
$$f'(x)=2\,(\mathrm{e}^{x}-1)\,(\mathrm{e}^{x}+3).$$
2 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3 Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$, en précisant la valeur du minimum.

106 Déterminer un maximum

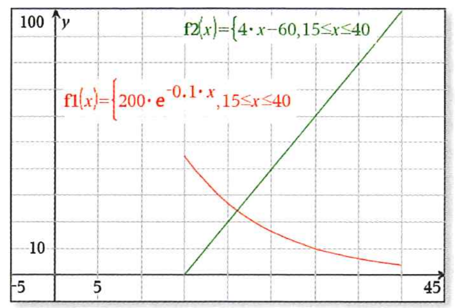
Une entreprise peut extraire entre 2 000 et 15 000 tonnes de minerai d'une carrière. Le résultat d'exploitation qu'elle envisage, en million d'euros, est donné par :
$$f(x)=(4x-13)\,\mathrm{e}^{-0,2x},$$
où x est la quantité de minerai extraite, $x\in[2\,;15]$.
1 Résoudre l'inéquation $f(x)\leqslant 0$ sur $[2\,;15]$.
Interpréter économiquement le résultat.
2 a. Montrer que $f'(x)=(6,6-0,8x)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[2\,;15]$, puis dresser le tableau de variations de f.
3 Pour quelle quantité extraite le résultat d'exploitation est-il maximum ?

107 Offre, demande et prix d'équilibre



Une entreprise fabrique un nouveau modèle d'appareils avec ports USB.
Le coût de fabrication de chaque appareil est de 10 €.
L'entreprise envisage de vendre chaque appareil entre 15 et 40 € l'unité.
Avant la commercialisation, l'entreprise effectue une étude de marché afin de déterminer la quantité demandée et offerte en fonction du prix de vente. On estime que si chaque appareil est vendu au prix unitaire x (en €) :
- le **nombre $f(x)$ d'appareils demandés**, en millier, s'exprime par :
$$f(x)=200\,\mathrm{e}^{-0,1x},\ \text{où } x\in[15\,;40]\,;$$
- le **nombre $g(x)$ d'appareils offerts**, en millier, que l'entreprise est capable de produire, s'exprime par :
$$g(x)=4x-60,\ \text{où } x\in[15\,;40].$$

1 a. Si l'entreprise propose l'appareil au prix de 23 €, déterminer la quantité demandée, à 10 près.
b. Calculer $f'(x)$. En déduire le sens de variation de f sur $[15\,;40]$. Interpréter économiquement.
c. À l'aide de la calculatrice, déterminer dans quel intervalle doit se situer le prix unitaire pour que la quantité demandée soit supérieure ou égale à 9 000 unités. *Arrondir à l'euro près.*
2 On appelle **prix d'équilibre** le prix unitaire x d'un appareil pour lequel la quantité offerte est égale à la quantité demandée.
a. Soit la fonction d définie sur $[15\,;40]$ par :
$$h(x)=f(x)-g(x)=200\,\mathrm{e}^{-0,1x}-4x+60.$$
Dresser le tableau de variations de h sur $[15\,;40]$.
b. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution x_0 sur $[15\,;40]$. *Déterminer à la calculatrice la valeur arrondie de x_0 à 0,1 près.*
c. En déduire le prix d'équilibre, puis le nombre d'appareils que peut compter vendre l'entreprise à ce prix. *Arrondir à un millier près.*
d. Calculer alors le chiffre d'affaires réalisé à l'équilibre.
Où retrouve-t-on le chiffre d'affaires sur la représentation faite ci-dessous ?



108 Cote maximale d'une œuvre d'art

On considère la fonction f définie sur $[0;5,5]$ par :

$$f(x)=0,5\,e^{-0,4x^2+2x},$$

que l'on note aussi : $f(x)=0,5\times\exp(-0,4x^2+2x)$.

1 a. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.

b. Étudier le signe de la dérivée.

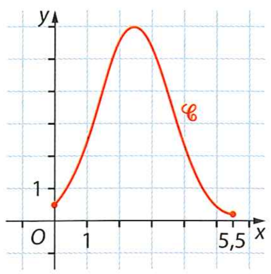
c. Étudier les variations de la fonction f.

2 a. Justifier que l'équation $f(x)=3$ admet deux solutions sur $[0;5,5]$.

b. À l'aide de la calculatrice, préciser un encadrement de chacune de ces solutions d'amplitude 0,25.

3 Cette fonction f modélise la valeur d'une « œuvre d'art éphémère », en millier d'euros, en fonction du temps x, exprimé en années.

Elle est représentée ci-contre par la courbe $\mathscr{C}$.

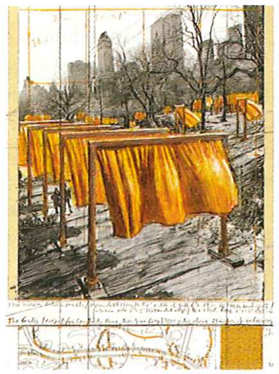


a. À quel moment cette œuvre a-t-elle atteint sa valeur maximale et quelle est cette valeur ?
Arrondir à 100 € près.

b. Graphiquement, déterminer la plage de temps où cette œuvre atteint une valeur supérieure ou égale à 3 000 €.

c. À l'aide de la question **2**, donner un intervalle de temps plus précis.

Pour info Un artiste d'œuvres d'art éphémère se voit contraint de trouver d'autres sources de revenus que ses œuvres elles-mêmes, destinées à disparaître.
Le couple d'artistes contemporains, Christo et Jeanne-Claude, ont présenté leur œuvre *The Gates* en février 2005.
Il s'agissait d'un parcours de 37 km dans Central Park à New York, ponctué de 7 500 portiques, sur lesquels étaient tendus des tissus orange.
Ils ont pu financer la réalisation de leur projet par la vente de leurs études préparatoires (ci-contre).

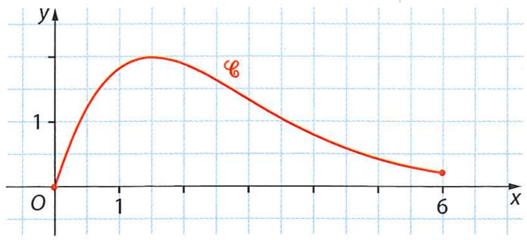


109 Étude d'une production

Une société extrait du gravier pour la construction d'autoroutes. Elle envisage l'ouverture d'un nouveau site d'extraction. On admet qu'au bout de x centaines de jours d'exploitation, la production journalière sur ce site, en millier de tonnes, est exprimée par :

$$f(x)=(2x^2+3x)e^{-x},\text{ où } x\in[0;6].$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f ci-après :



1 a. Démontrer que, pour tout réel x de $[0;6]$:

$$f'(x)=(-2x^2+x+3)e^{-x}.$$

b. Établir le tableau de variations de f sur $[0;6]$.

c. Déterminer au bout de combien de jours après l'ouverture du site, la production journalière sera maximale. Quelle est cette production maximale en millier de tonnes ?

2 a. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x)=1$ sur $[0;6]$. En utilisant le graphique, encadrer chaque solution entre deux entiers consécutifs.

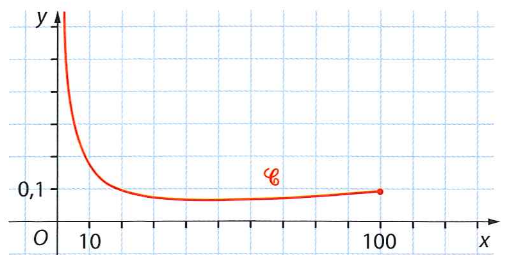
b. À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de jours, après l'ouverture du site, la production journalière, après avoir atteint son maximum, sera revenue à 1 000 tonnes.

110 Étude de coûts

Une entreprise fabrique et vend entre 10 et 10 000 articles par jour. Le coût moyen de production, en euro par article, d'un article en fonction du nombre x de dizaines d'articles fabriqués est exprimé par :

$$f(x)=\frac{1,32\,e^{0,02x}}{x},\text{ où } x\in[1;100].$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.



1 a. Montrer que $f'(x)=\dfrac{1,32\,e^{0,02x}(0,02x-1)}{x^2}$.

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1;100]$.

c. En déduire le tableau de variations de f sur $[1;100]$.

d. Pour quelle production x_0 le coût moyen est-il minimum ?
Quel est alors le montant du coût total de production ?

2 Le coût total est donné par $C(x)=x\times f(x)$.

a. Dans quelle unité s'exprime le coût total ?

b. Étudier le sens de variation du coût total.

c. Vérifier que, lorsque le coût moyen est minimum, le coût marginal $C'(x_0)$ est égal au coût moyen $f(x_0)$.

Exercices

111 Taux d'équipement

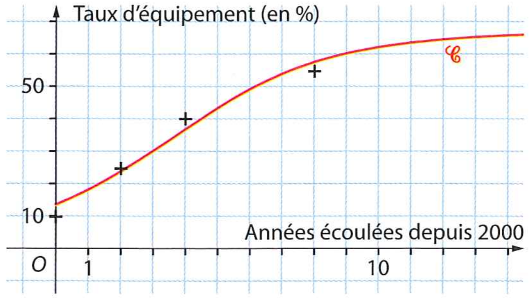
On étudie le taux d'équipement des ménages français en micro-ordinateurs connectés à Internet. Les résultats de cette étude sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Année	2000	2002	2004	2008
Taux d'équipement (en %)	10	25	40	55

Source : INSEE.

On modélise alors le taux d'équipement $f(x)$ en micro-ordinateurs connectés à Internet, exprimé en %, en fonction du nombre d'années x écoulées depuis début 2000, par : $f(x)=\dfrac{100}{1,5+6\,e^{-0,4x}}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.



1 Montrer que $f'(x)=\dfrac{240\,e^{-0,4x}}{(1,5+6\,e^{-0,4x})^2}$.

2 Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $[0;+\infty[$, puis dresser le tableau des variations de f.
Interpréter économiquement le sens de variation de f.

3 Question ouverte
Selon le modèle, peut-on estimer que le taux d'équipement des ménages en micro-ordinateurs connectés à Internet atteindra 100 % de la population ?

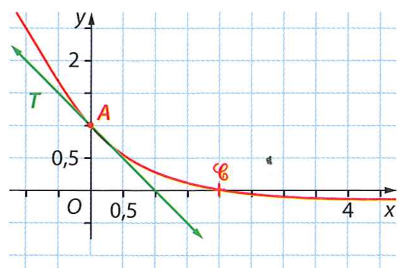
112 Utiliser un graphique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(ax+b)e^{-0,5x},$$

où a et b sont des nombres fixés, à déterminer.

La courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f est tracée ci-dessous dans un repère orthogonal, ainsi que la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point $A(0;1)$:



1 a. En utilisant le graphique, préciser $f(0)$ et $f'(0)$.

b. On a obtenu $f'(x)$ à l'aide d'un calcul formel :

```
1 f(x):=(a*x+b)*exp(-0.5*x)
        x  ->(a· x+b)· exp((-0.5)· x)
2 deriver(f(x))
        (-exp(-0.5· x))· (0.5· a· x-a+0.5· b)
```

En admettant le résultat obtenu, justifier que les réels a et b vérifient le système : $\begin{cases} b=1 \\ -a+0,5b=1 \end{cases}$.

c. En déduire que $f(x)=(-0,5x+1)e^{-0,5x}$.

2 a. Exprimer $f'(x)$, puis étudier le signe de $f'(x)$.
En déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

b. Quel est le minimum de f sur $\mathbb{R}$?
En quelle valeur est-il atteint ?

3 Déterminer par le calcul une équation de la tangente T.

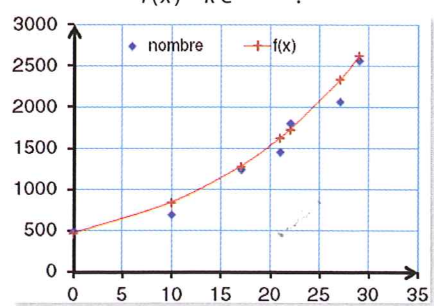
113 Modèle exponentiel sur tableur TICE

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	année	1976	1986	1993	1997	1998	2003	2005
2	x	0	10	17	21	22	27	29
3	$P(x)$	500	700	1250	1453	1800	2066	2568
4	$f(x)$	460	838	1276	1622	1722	2324	2621

Le tableau ci-dessus indique la population de bouquetins des Alpes, $P(x)$, dans le Parc national de la Vanoise depuis 1976, où x est le rang de l'année par rapport à 1976.

À l'aide d'un tableur, on a modélisé le nombre de bouquetins par la fonction f, définie sur $[0;100]$ par :

$$f(x)=k\,e^{0,0583x}.$$



1 a. D'après le résultat en **B4**, donner la valeur de k.

b. Préciser la formule saisie en B4 qui, par recopie vers le bas, donne le nombre de bouquetins suivant ce modèle.

c. D'après le nuage de points obtenus, à quelles dates le modèle « colle-t-il » assez bien aux valeurs observées ?

2 a. Étudier le sens de variation de la fonction f.

b. Quelle population de bouquetins peut-on prévoir en 2020, arrondie à 50 près ?

c. Montrer que ce modèle peut s'écrire sous la forme :

$$f(x)=K\times q^x,\text{ avec } q \text{ arrondi à 0,01 près.}$$

En déduire le taux d'évolution annuel de la population de bouquetins dans le Parc national de la Vanoise.

Dans l'énoncé	Comment faire ou rédiger ?
Interpréter un calcul de type $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$, où f est une fonction exponentielle de base $q>0$.	Le quotient $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$ est la variation relative de la fonction f entre x et $x+1$. On doit montrer, à l'aide des formules de calculs, factorisation et simplification, que : $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}=q-1$. En multipliant le résultat par 100, on obtient le **taux d'évolution** de $f(x)$, exprimé en pourcentage, pour une variation d'une unité de x.
Écrire plus simplement une expression avec le nombre e ou e^x.	On utilise les formules de calcul. **Voir cours page 74** Se souvenir que : $e=e^1$; $1=e^0$ et $e^{-1}=\dfrac{1}{e}$. Garder en tête que e est un nombre, comme π ou $\sqrt{3}$: e est une valeur exacte.
Calculer la dérivée d'une fonction produit d'un polynôme $P(x)$ par une exponentielle : $f(x)=P(x)\times e^{u(x)}$.	On sait que la **dérivée** de $x\mapsto e^{u(x)}$ est $x\mapsto u'(x)\times e^{u(x)}$. Si $f(x)=P(x)\times e^{u(x)}$, alors en appliquant la **dérivée du produit**, on obtient : $f'(x)=P'(x)\times e^{u(x)}+u'(x)\times e^{u(x)}\times P(x)$. On peut alors mettre $e^{u(x)}$ en facteur dans la dérivée : $f'(x)=e^{u(x)}\times Q(x)$, où $Q(x)$ est un polynôme.
Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f sur un intervalle.	Garder en tête qu'une exponentielle est toujours **strictement positive** : quel que soit x : $q^x>0$; $e^x>0$ et $e^{u(x)}>0$. Le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction. **Voir chapitre 2 page 60** Bien **respecter l'intervalle** donné pour l'étude ou la modélisation.
Montrer que l'équation $f(x)=0$ ou $f(x)=k$ admet une unique solution.	Cette phrase indique que l'on ne demande **pas de résoudre** algébriquement l'équation. En général, les outils abordés jusqu'à ce chapitre ne permettent pas de le faire. Il faut penser à utiliser la **propriété des valeurs intermédiaires**.
Arrondir un résultat et respecter les unités.	Les fonctions exponentielles ayant de très nombreuses utilisations concrètes, les **valeurs décimales** sont souvent utilisées. Or une croissance exponentielle est très rapide. Il est donc nécessaire de donner des résultats arrondis cohérents avec la situation. Faire très **attention aux unités** de la variable x et de l'image $f(x)$.

Exercice guidé

114 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\,;2]$ par :

$$f(x)=(x-1)\,e^x+2.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1 Calculer la valeur exacte et la valeur arrondie à 10^{-2} près de $f(-2)$, $f(0)$ et $f(2)$.

2 Calculer $f'(x)$. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2\,;2]$. En déduire le tableau de variations de f sur $[-2\,;2]$.

3 **Question ouverte**
On considère les points $A(1\,;2)$ et $B(0\,;2-e)$.
Démontrer que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

Aide

1 Dans la valeur exacte, le nombre **e** peut apparaître. On calcule une valeur arrondie en utilisant la calculatrice. Pour $f(-2)$, on remplace x par -2 dans $f(x)$.

2 On utilise la formule du produit :

$$(u\times v)'=u'\times v+v'\times u.$$

Penser à factoriser $f'(x)$ et construire un tableau de signes, en gardant en mémoire qu'une **exponentielle est toujours strictement positive.**

3 Le point $A(1\,;2)$ doit appartenir à $\mathscr{C}$: il faut vérifier que $f(1)=2$ pour qu'il en soit ainsi.
La tangente à $\mathscr{C}$ en A a pour coefficient directeur le nombre dérivé de f en $x=x_A$.

Revoir les outils de base

Savoir utiliser les règles de calcul sur les puissances

115 Écrire plus simplement sous la forme $2^n\times3^p$, où n et p sont des entiers relatifs :

a. $2^3\times3^2\times2^{-1}$; **b.** $3^2\times3(3\times2)^{-2}$;
c. $(3\times2^3)^2\times2^3\times3^{-4}$; **d.** $\dfrac{3^2}{2^3}\times\dfrac{2^{-1}}{3^3}$.

116 Justifier chacune des écritures obtenues à l'aide d'un calcul formel.

$$\frac{1210\cdot(1.1)^{n-1}}{\dfrac{40\cdot\left(1-(0.8)^{n+1}\right)}{1-0.8}} \qquad \frac{1100.\cdot(1.1)^n}{200.-160.\cdot(0.8)^n}$$

Aide

Soit a et b deux réels non nuls.
Pour tous entiers naturels n et p, on a les règles de calculs :

$$a^n\times a^p=a^{n+p}\,;\quad (a\times b)^n=a^n\times b^n\,;$$

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}\,;\quad \frac{a^n}{a^p}=a^{n-p}\,;\quad (a^n)^p=a^{n\times p}.$$

Ne pas oublier : $a^1=a$ et $a^0=1$.

Savoir se donner un modèle : suite ou fonction

117 Dans les situations suivantes, indiquer si la modélisation peut se faire par une suite seulement ou être prolongée par une fonction.

a. Nombre de cas de maladies déclarées par mois.
b. Production totale, depuis le début de la production, calculée tous les mois.
c. Capital acquis pour un placement à intérêts composés, avec capitalisation annuelle des intérêts.
d. Coût annuel de maintenance de véhicules d'un parc automobile, suivant l'âge du véhicule.
e. Coût annuel de maintenance des machines d'une entreprise.

Aide

Lorsque l'on étudie une évolution, on est amené à réaliser un nuage de points.
On modélise les données :
- soit par une suite si les valeurs sont des données périodiques (toutes les heures, les mois, les années, etc.) ;
- soit par une fonction si les valeurs peuvent être connues de manière continue.

Savoir résoudre à l'aide de la calculatrice

118 On a résolu l'équationci-contre à l'aide de TI-Nspire™.

```
solve(e^(2·x)−5.5·e^x+2=0,x)
                x=−0.937758 or x=1.6309
```

Résoudre cette équation à l'aide de votre calculatrice, en précisant l'intervalle $[a\,;b]$ utilisé pour chaque solution.

119 On admet que les équations ci-dessous ont deux solutions. Trouver l'autre solution à la calculatrice.

```
Eq:e^(X²)−4=0
      X=1.17741002
 Lower=0
 Upper=2
```

```
e^(X²)−e^(X)−2=0
 X=-.9340899894…
 bornes={-1,0}
```

120 On a obtenu, sur tableur, le tableau de valeurs de $f(x)=e^{2x}-4\,e^x+1$, pour x entier de -3 à 2.
On admet que l'équation $f(x)=0$ a deux solutions sur $[-3\,;2]$.

	A	B
1	x	$f(x)$
2	-3	0,8033
3	-2	0,477
4	-1	-0,3362
5	0	-2
6	1	-2,4841
7	2	26,042

a. Préciser un encadrement entre deux entiers de chaque solution de l'équation $f(x)=0$.
b. À l'aide d'une calculatrice, déterminer la valeur arrondie à 10^{-2} près de chaque solution.

Aide

Pour résoudre l'équation $f(x)=0$, on montre dans un premier temps l'existence de solutions dans un intervalle $[a\,;b]$ grâce à la propriété des valeurs intermédiaires.
On peut entrer la fonction f en Y1.
- **Sur Casio :** MENU EQUA F3 SOLV F1 RCL EXE.
Saisir a en Lower et b en Upper.
Entrer la borne a en X =, puis F6 SOLV.
- **Sur TI™ :** math Ø:Solveur…
Écrire Y1 ou $f(x)$, puis entrer.
Saisir les bornes a et b :
bornes={a, b}.
Entrer la borne a en X =, puis alpha entrer (résol).
- **Sur Xcas :** resoudre(f(x)=0 , x , a..b) donne la solution dans $[a\,;b]$.
- **Sur TI-Nspire™ :** solve(f(x)=0 , x) donne toutes les solutions.

Pour aller plus loin

121 Démontrer

Dans le cours, on admet que la fonction **exp** est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que le nombre dérivé en 0 vaut 1.
De plus, cette fonction étant un cas particulier des fonctions exponentielles de base q, elle vérifie la relation fonctionnelle :
$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in \mathbb{R},\ e^{x+y} = e^x \times e^y.$$
a. Montrer, à l'aide de la relation fonctionnelle, que $e^0 = 1$.
b. Écrire le taux d'accroissement de la fonction **exp** entre 0 et $0+h$, où h est un réel proche de 0, non nul. Quelle est la limite de ce taux d'accroissement quand h tend vers 0 ?
c. Écrire le taux d'accroissement entre $x+h$ et x, pour tout réel x.
d. Après une factorisation, utiliser la définition du nombre dérivé de **exp** en 0 pour obtenir la dérivée de la fonction exp en x.

Aide
On rappelle que, par définition, le nombre dérivé d'une fonction f en x est la limite du **taux d'accroissement** :
$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, lorsque h tend vers 0.
Ne pas confondre :
- le taux d'accroissement
- et le taux de variation relative.

122 Appliquer des techniques de calcul pour transformer une écriture

De 2002 à 2008, le nombre de PACS signés entre partenaires de sexes opposés peut être modélisé par $f(x) = e^{0{,}32x+2{,}96}$, où x est le nombre entier d'années depuis 2002.
a. Cette fonction peut-elle modéliser le nombre de PACS de façon continue ? Quel modèle est le plus adapté ?
b. Transformer l'écriture de $f(x)$ pour obtenir la forme $K \times q^x$, où K et q sont des nombres positifs. Interpréter.

Aide
Pour tout réel x, on peut transformer e^{ax+b} :
$$e^{ax+b} = e^{ax} \times e^b = e^b \times (e^a)^x.$$
Comme la fonction exponentielle a une croissance très rapide, attention à ne pas trop arrondir les valeurs.

123 Modéliser par une fonction logistique ou une courbe en S

Une fonction logistique est de la forme $f(x) = \dfrac{c}{1 + a \times e^{-bx}}$ sur $\mathbb{R}$, où a, b et c sont des coefficients réels **strictement positifs**.
1 Lire les fonctions logistiques obtenues ci-contre sur calculatrice.
Arrondir les coefficients à 2 chiffres significatifs.
2 a. Montrer que, pour tout réel x, on a $\dfrac{1}{1+e^{-x}} = \dfrac{e^x}{1+e^x} = 1 - \dfrac{1}{1+e^x}$.
b. Par analogie, écrire $f(x)$ sans exponentielle à exposant négatif.
c. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
d. Montrer que, pour tout réel x, on a $0 < f(x) < c$.
3 a. Calculer la dérivée de f, en gardant les coefficients a, b et c. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
b. On a calculé la dérivée seconde ci-contre par calcul formel. Prouver l'existence d'un point d'inflexion.

$f(x) := \dfrac{c}{1+a \cdot e^{-b \cdot x}}$ *Terminé*

$\dfrac{d^2}{dx^2}(f(x))$ $\quad \dfrac{-a \cdot b^2 \cdot c \cdot e^{b \cdot x} \cdot (e^{b \cdot x} - a)}{(e^{b \cdot x} + a)^3}$

4 Ce type de fonction fut étudié par le mathématicien belge Pierre-François Verhulst (1804-1849) pour modéliser des évolutions de populations non exponentielles.
Voir exercice 148

D'après l'étude analytique des fonctions logistiques, faite en **2** et **3**, pourquoi peut-on approcher le taux d'équipement d'un bien de consommation (téléviseur, réfrigérateur, téléphone mobile, etc.) par une fonction logistique ?

Aide
À la calculatrice, on peut obtenir un modèle dit de « **régression logistique** ».
On entre les valeurs de x en Liste1 et les données y en Liste2.
Sur TI™ : dans la page de calcul :
Logistic L1 , L2
stats CALC B:Logistique

```
Logistque
 y=c/(1+ae^(-bx))
 a=30.36454539
 b=.5025200488
 c=99.77421141
```

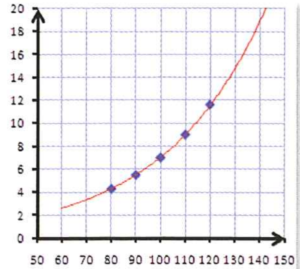
Sur Casio : MENU STAT
F2 CALC F6 SET
pour choisir les listes 1 et 2, puis EXE.
F3 REG F5 F6 LgSt.

```
LogisticReg
   a =12.0011697
   b =0.09973391
   c =80.1132134
  MSe=2.097E-04
y=c÷(1+a·e^(-bx))
```


124 Consommation d'un véhicule

Sur un parcours routier, la consommation aux 100 km d'une voiture est fonction de la vitesse. Pour un type de véhicule, on a relevé la consommation et modélisé à l'aide d'un tableur.

	A	B	C
1	vitesse en km/h	consommation en L/100 km	modèle $f(x)$
2	80	4,3	4,3
3	90	5,5	5,5
4	100	7	7,1
5	110	9	9,1
6	120	11,6	11,6



1 D'après l'allure du nuage de points, est-il adapté de modéliser par :
a. une fonction affine ? Si oui, laquelle ?
b. une fonction polynôme ? Si oui, de quel degré ?
c. une fonction exponentielle de base q ? Si oui, comment interpréter le nombre q ?
2 On modélise la consommation par la fonction f définie sur $[60\,;150]$ par : $f(x) = 0{,}6 \times 1{,}025^x$, où x est la vitesse en km/h, le modèle n'étant pas valable pour de petites ou de très grandes vitesses.
a. D'après ce modèle, indiquer la formule à écrire en cellule C2 qui, par recopie vers le bas, calcule la consommation aux 100 km.
b. Justifier le sens de variation de la fonction f.
c. Calculer la consommation que l'on peut prévoir pour une vitesse de 60 km/h, puis de 150 km/h.
Dresser le tableau de variations de f sur $[60\,;150]$.
3 a. Calculer $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$, pour tout $x \in [60\,;150]$.
En donner une interprétation.
b. Si on augmente la vitesse de 10 km, de quel pourcentage augmente-t-on la consommation ?

125 Élasticité de la demande

Un bien de consommation courante est soumis à l'offre et la demande.
La quantité demandée, en unité, est donnée par :
$$f(x) = 400 \times 0{,}9^x,$$
pour un prix x variant de 4 à 10 €.
1 Préciser le sens de variation de la fonction de demande.
2 a. Calculer la quantité demandée pour un prix de 4 €, puis de 5 €.
On donnera les quantités arrondies à l'unité près.
b. Si le prix passe de 4 à 5 euros, calculer la variation relative $\dfrac{f(5)-f(4)}{f(4)}$ de la quantité demandée.
c. Calculer l'**élasticité arc** de la demande lorsque le prix passe de 4 à 5 €.

Définition Si un prix passe de p à $p + \Delta p$, la quantité demandée passe de D à $D + \Delta D$.
L'**élasticité arc** de la demande par rapport au prix est le quotient de la variation relative de la demande sur la variation relative du prix.
$$e_{D/p} = \dfrac{\dfrac{\Delta D}{D}}{\dfrac{\Delta p}{p}}.$$

3 Soit x un prix entre 4 et 10 €.
a. Montrer que la variation relative de la demande, lorsque le prix passe de x à $x+1$, est constante.
On simplifiera le quotient $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{f(x)}$.
a. En déduire que l'élasticité de la demande par rapport au prix est : $\quad E(x) = -0{,}1\,x$.

126 QCM

Donner la seule bonne réponse.
1 La fonction $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$:
a. n'est définie que sur $]0\,;+\infty[$;
b. est toujours strictement positive ;
c. est toujours croissante.
2 Pour tout réel x, $1 + 1{,}1^x + 1{,}1^{2x} + 1{,}1^{3x}$ est égal à :
a. $\dfrac{1-1{,}1^{4x}}{1-1{,}1^x}$.
b. $10 - 1{,}1^{4x}$.
c. $10 \times 1{,}1^{4x} - 10$.

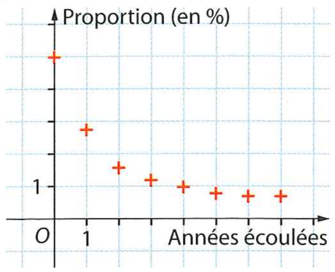
127 QCM

Donner la seule bonne réponse.
1 Pour tout réel x, e^{4+2x} est égal à :
a. $(e^2)^{2x}$. **b.** $(e^{x+2})^2$. **c.** $e^4 + e^{2x}$.
2 L'équation $e^x = e^{-2x}$ admet sur $\mathbb{R}$:
a. aucune solution.
b. une seule solution.
c. deux solutions.
3 L'ensemble solution de $e^{3x} - 1 \geqslant 0$ est :
a. $[0\,;+\infty[$. **b.** $[1\,;+\infty[$. **c.** $\left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

128 QCM

Donner la seule bonne réponse.
1 Si la fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = e^{2x+1}$, alors $f'(x)$ est égal à :
a. $2\,e^{2x+1}$.
b. e^{2x+1}.
c. $(2x+1)\,e^{2x+1}$.
2 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)\,e^{-x}$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est :
a. $y = -3x + 2$.
b. $y = -x + 2$.
c. $y = x + 2$.

129 Étudier les grands excès de vitesse



Pour un conducteur de véhicule, on appelle **grand excès de vitesse** tout dépassement de la vitesse autorisée de plus de 30 km/h.
L'Observatoire national interministériel de la sécurité routière (ONISR) a constaté une nette baisse de la proportion des grands excès de vitesse parmi l'ensemble des excès de vitesse relevés. On modélise la proportion $f(x)$ de grands excès de vitesse, exprimée en pourcentage, par :
$f(x) = 4{,}3 \times 0{,}5^x + 0{,}62$, où x est le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2002. On suppose que le modèle reste valable jusqu'en 2020. Ainsi, $x \in [0 ; 18]$.

1 Justifier que la fonction f est décroissante sur $[0 ; 18]$.
2 Estimer la proportion de grands excès de vitesse en fin 2015.
3 **Question ouverte**
Selon le modèle, peut-on espérer que la proportion de grands excès devienne inférieure à 0,5 % ?

130 Utiliser une fonction auxiliaire

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $[0 ; 4]$ par :
$$g(x) = 10 + (x-3)e^x .$$
1 Démontrer que $g'(x) = (x-2)e^x$ et étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 4]$.
2 Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 4]$. On indiquera la valeur de $g(2)$.
3 En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0 ; 4]$.

PARTIE B

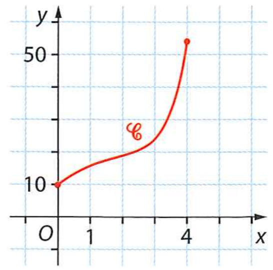
On considère la fonction f définie sur $[0 ; 4]$ par :
$$f(x) = 10x + 14 + (x-4)e^x .$$
1 Montrer que pour tout réel x de $[0 ; 4]$, on a :
$$f'(x) = g(x) .$$
2 En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; 4]$.

PARTIE C

Voir AP chapitre 2 page 61

Une fromagerie artisanale fabrique du brie, au maximum 4 tonnes par an.
Le **coût total de fabrication** pour une production de x tonnes est donné par $f(x)$, exprimé en millier d'euros.
Le **coût marginal** pour une production de x tonnes, en millier d'euros par tonne (ou en euro par kg), est assimilé au nombre dérivé $f'(x)$.

1 Préciser les **coûts fixes** de l'entreprise, c'est-à-dire les coûts lorsque la production est nulle.
2 L'entreprise désire adapter sa production pour atteindre un coût marginal de 11 000 € par tonne.
a. En utilisant la **Partie A**, montrer qu'il existe une unique production de x_0 tonnes qui répond à ce problème.
b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la production x_0, à 10 kg près.
3 On donne ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f.



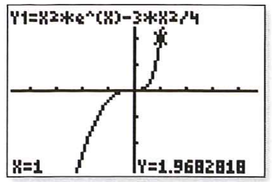
a. À l'aide du graphique, estimer l'abscisse du point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.
b. Déterminer par le calcul les coordonnées du point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$. Interpréter économiquement ce point.

131 Étude d'une fonction coût moyen

Une entreprise fabrique des vis, au maximum 6 tonnes par mois.
Le coût moyen de fabrication, en millier d'euros par tonne, d'une production mensuelle de x tonnes, est donné par $C(x)$, où C est la fonction définie sur $]0 ; 6]$ par :
$$C(x) = \frac{0{,}1\, e^x + 20}{x} .$$
1 À l'aide de la calculatrice :
a. conjecturer en termes de variation, l'évolution du coût moyen de fabrication sur l'intervalle $]0 ; 6]$;
b. estimer le minimum du coût moyen de fabrication et la production mensuelle correspondante ;
c. dire s'il est possible d'atteindre un coût moyen de fabrication de 4 000 euros par tonne. *On précisera la méthode utilisée.*
2 Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]0 ; 6]$:
$$C'(x) = \frac{0{,}1\, x\, e^x - 0{,}1\, e^x - 20}{x^2} .$$
3 On considère la fonction f définie sur $[0 ; 6]$ par :
$$f(x) = 0{,}1\, x\, e^x - 0{,}1\, e^x - 20 .$$
a. Vérifier que pour tout réel x de $[0 ; 6]$:
$$f'(x) = 0{,}1\, x\, e^x .$$
b. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 6]$.
c. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $[0 ; 6]$.
Donner la valeur de α arrondie au dixième près.
d. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0 ; 6]$.
4 **a.** À l'aide des questions précédentes, justifier que le minimum du coût moyen de fabrication est obtenu pour une production mensuelle de α tonnes de vis.
b. Justifier que $C(\alpha) = 0{,}1\, e^{\alpha}$.

132 Confirmer ou infirmer une conjecture graphique

On considère la fonction f définie sur $[-3 ; 2]$ par :
$$f(x) = x^2 e^x - \frac{3}{4}x^2 .$$



Le graphique ci-contre est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthogonal.

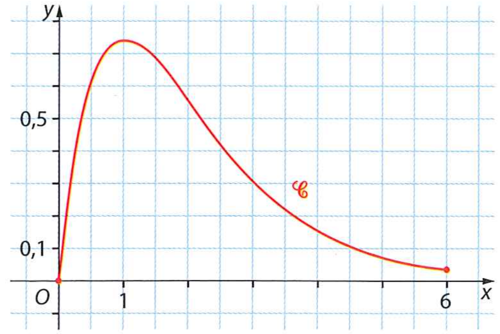
1 En observant cette courbe, quelle conjecture pourrait-on faire pour le sens de variation de f sur $[-3 ; 2]$?
Dans la suite du problème, on s'intéresse à la validité de cette conjecture.
2 On a obtenu $f'(x)$ par calcul formel :

$f(x):=x^2\cdot e^x-\frac{3}{4}\cdot x^2$	*Terminé*
$\text{factor}\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)$	$\frac{x\cdot((2\cdot x+4)\cdot e^x-3)}{2}$

Justifier le résultat obtenu.
3 On pose, pour tout réel x de $[-3 ; 2]$:
$$g(x) = (2x+4)e^x - 3 .$$
a. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs du réel x.
b. En déduire le sens de variation de la fonction g, puis dresser son tableau de variations sur $[-3 ; 2]$.
c. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α dans $[-3 ; 2]$.
Justifier l'encadrement $-0{,}19 \leqslant \alpha \leqslant -0{,}18$.
d. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[-3 ; 2]$.
4 **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-3 ; 2]$.
b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 2]$.
c. Que peut-on penser de la conjecture faite à la question **1** ? Quelle fenêtre aurait-il fallu adopter pour visualiser ce résultat ?

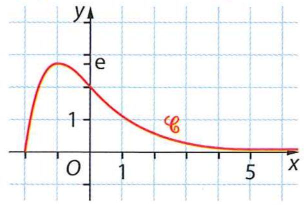
133 Modéliser une propagation

Suite à un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine. On admet qu'au-delà de six minutes, il n'y a quasiment plus de gaz dans l'air.
On modélise l'évolution du taux de gaz dans l'air grâce à la fonction f définie sur $[0 ; 6]$ par : $f(x) = 2x e^{-x}$, où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et $f(x)$ le taux de gaz dans l'air exprimé en « partie par million » (ppm).
On donne ci-après la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 6]$.



1 **a.** Calculer $f'(x)$, puis en étudier le signe sur $[0 ; 6]$.
b. Donner le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 6]$.
2 **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0{,}65$ admet deux solutions x_1 et x_2 dans $[0 ; 6]$. On prendra $x_1 < x_2$.
b. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie de x_1 et celle de x_2 à 0,001 minute près.
3 On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux dépasse 0,65 ppm pendant plus d'une minute. Déterminer si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz, en explicitant la démarche.

134 Positions par rapport à une tangente



Soit la fonction f définie sur $[-2 ; 5]$ par :
$$f(x) = (x+2)e^{-x} .$$
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

PARTIE A Étude de f

1 **a.** Calculer $f'(x)$.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[-2 ; 5]$.
c. En déduire les variations de f sur $[-2 ; 5]$.
2 Montrer que l'équation réduite de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = 2 - x$.

PARTIE B Étude d'une tangente

Soit la fonction d définie sur $[-2 ; 5]$ par :
$$d(x) = f(x) - (2 - x) .$$
Par calcul formel, on a obtenu les résultats ci-contre, que l'on admet sans les justifier.

```
1 d(x):=(x+2)*exp(-x)-(2-x)
      x  ->(x+2)· exp(-x)-(2-x)
2 deriver(d(x))
      -exp(-x)· x-exp(-x)+1
3 deriver(deriver(d(x)))
      x· exp(-x)
```

1 Quel est le calcul fait à la ligne 2 ? à la ligne 3 ?
2 Recopier et compléter le tableau suivant :

x	-2	0	5
Signe de $d''(x)$			
Variation de d'			
Signe de $d'(x)$			
Variation de d			

3 En déduire le signe de $d(x)$ sur $[-2 ; 5]$, puis la position de la droite $\mathscr{D}$ par rapport à la courbe $\mathscr{C}$.
4 Que représente le point d'abscisse 0 pour la courbe $\mathscr{C}$?

135 Exponentielle de $u(x)$

On considère la fonction u définie sur $]-\infty\,;2[$ par :

$$u(x)=\frac{x^2-1}{x-2}.$$

Soit $\mathscr{C}_u$ sa représentation graphique.

1 **a.** Calculer $u'(x)$. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]-\infty\,;2[$.
On donnera la valeur exacte de l'abscisse de l'extremum.
b. Résoudre l'équation $u(x)=0$.
En donner une interprétation graphique.

2 Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;2[$ par :

$$f(x)=\exp(u(x)).$$

a. Calculer $f'(x)$. Étudier le sens de variation de f.
b. Résoudre $f(x)=1$.

136 Étude d'un bénéfice

PARTIE A Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0{,}5\,;8]$ par :

$$f(x)=20(x-1)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}.$$

1 Montrer que $f'(x)=10(-x+3)\,\mathrm{e}^{-0{,}5x}$.

2 Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0{,}5\,;8]$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f.

3 Construire la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal.
On prendra pour unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

PARTIE B Application économique

Une entreprise produit sur commande entre 50 et 800 bicyclettes par mois pour des municipalités. On estime que si, un mois donné, on produit x centaines de bicyclettes, alors $f(x)$ modélise le bénéfice, exprimé en millier d'euros, réalisé par l'entreprise ce même mois. Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle.

1 **a.** Vérifier que si l'entreprise produit 220 bicyclettes un mois donné, alors elle réalise ce mois-là un bénéfice d'environ 7 989 euros.
b. Déterminer le bénéfice réalisé par une production de 480 bicyclettes un mois donné.

2 ***Dans cette question, toute trace de recherche, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.***
a. Pour un mois donné, combien l'entreprise doit-elle produire au minimum de bicyclettes pour ne pas travailler à perte ?
b. Pour un mois donné, combien l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice maximum ? *Préciser ce bénéfice à l'euro près.*
c. Pour un mois donné, combien l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice supérieur à 8 000 euros ? *Arrondir les bornes à l'entier près.*

137 Offre, demande et prix d'équilibre

PARTIE A Étude d'une fonction

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[4\,;6]$ par :

$$f(x)=100(\mathrm{e}^x-45) \quad \text{et} \quad g(x)=10^6\times\mathrm{e}^{-x}.$$

1 **a.** Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[4\,;6]$.
b. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[4\,;6]$.

2 Soit la fonction h définie sur $[4\,;6]$ par :

$$h(x)=g(x)-f(x).$$

a. Démontrer que la fonction h est strictement décroissante sur l'intervalle $[4\,;6]$.
b. Dresser le tableau de variations de la fonction h.
c. Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $[4\,;6]$.

3 **a.** Dresser le tableau de valeurs de $h(x)$ sur l'intervalle $[4\,;6]$ par pas de 0,2 en arrondissant à la centaine la plus proche.
b. Construire la courbe représentative $\mathscr{C}_h$ de la fonction h dans le plan muni d'un repère orthogonal.
Unités graphiques : 1 cm pour 0,2 en abscisses ;
1 cm pour 4 000 en ordonnées.
On placera l'axe des ordonnées à la graduation 4.
c. Placer α sur ce graphique et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2}.

PARTIE B Application économique

Une entreprise fabrique des capsules pour machines à café expresso et les vend par paquets de 30.
Les fonctions f et g définies dans la **Partie A** modélisent respectivement l'offre et la demande pour un prix x du paquet variant de 4 à 6 € :

- $f(x)$ est la **quantité offerte**, en paquets, que l'entreprise est prête à vendre au prix x ;
- $g(x)$ est la **quantité demandée**, en paquets, que les distributeurs sont prêts à acheter au prix x.

On appelle **prix unitaire d'équilibre du marché** la valeur de x pour laquelle les quantités offerte et demandée sont égales.

1 Interpréter, en termes économiques, les sens de variation des fonctions f et g sur $[4\,;6]$.

2 Quel est le prix unitaire P d'équilibre du marché, arrondi au centime d'euro près ?

3 Quelle quantité q de paquets de capsules, arrondie à 100 paquets près, correspond à ce prix unitaire d'équilibre ?
Vérifier que, par les deux fonctions f et g, la quantité ainsi arrondie est identique.
Calculer le chiffre d'affaires engendré par la vente de q paquets de capsules au prix P.

138 Taux d'équipement en lecteur de DVD

Le tableau ci-dessous donne les taux d'équipement des ménages français en lecteur de DVD, de 1998 à 2007 :

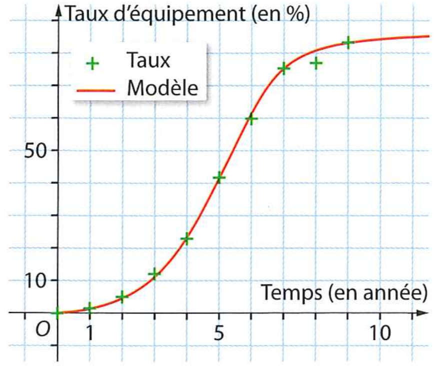
Année	1998	1999	2000	2001	2002
Pourcentage	0,2	1,5	4,9	12,0	23,3

Année	2003	2004	2005	2006	2007
Pourcentage	41,65	59,9	75,0	76,9	83,3

Sources : GIK-CNC/DEPS7.

Une modélisation consiste à estimer, pour l'année 1998$+x$, le taux d'équipement en lecteur de DVD, en pourcentage,

par : $$f(x)=\frac{85}{1+150\,\mathrm{e}^{-x}}.$$



1 **a.** Calculer $f'(x)$ et étudier son signe. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.
b. Estimer le taux d'équipement en lecteur de DVD que l'on peut prévoir en 2010, puis en 2012.

2 Le **rythme de croissance (instantané)** du taux d'équipement est assimilé à la dérivée de f.
a. En utilisant le graphique, estimer en quelle année le rythme de croissance est maximal.
b. Pour la courbe représentative de f, quelle signification donner à cette année ?

3 **Question ouverte**
Selon ce modèle, peut-on estimer que le taux d'équipement des ménages atteindra 90 % ? Si oui, en quelle année ?
Ce type de modèle est un **modèle logistique**.

139 Coût total, recette et bénéfice

PARTIE A Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $[5\,;15]$ par :

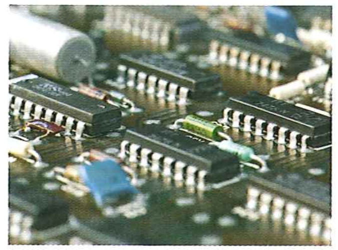
$$f(x)=0{,}2\,x+1+\mathrm{e}^{-0{,}2x+1}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1 **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $[5\,;15]$.
b. Résoudre dans $[5\,;15]$ l'inéquation : $1-\mathrm{e}^{-0{,}2x+1}\geqslant 0$.
c. En déduire le tableau de signes de $f'(x)$ sur $[5\,;15]$ et le tableau de variations de la fonction f sur ce même intervalle.

2 Représenter la courbe $\mathscr{C}$.
Unités graphiques : 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

PARTIE B Application économique



Une entreprise fabrique du matériel informatique.
Lorsqu'elle fabrique x centaines d'objets d'un certain type, avec $5\leqslant x\leqslant 15$, le coût total de production, en millier d'euros, est modélisé par $f(x)$, où f est la fonction définie à la **Partie A**.

1 **a.** Calculer le coût total de production, en millier d'euros, de 900 objets, puis de 1 000 objets.
Arrondir à l'euro près.
b. Calculer le pourcentage d'augmentation de coût si l'on passe d'une production de 900 objets à une production de 1 000 objets.

2 Chaque centaine d'objets est vendue 0,4 millier d'euros. La recette pour x centaines d'objets vendus est donc donnée par $g(x)=0{,}4\,x$.
a. Tracer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=0{,}4\,x$ sur le graphique précédent.
b. Par lecture graphique, indiquer la production x_0 à partir de laquelle l'entreprise réalise un bénéfice, avec la précision permise par le graphique.
c. À l'aide de la calculatrice, préciser la valeur approchée de x_0 par excès à l'objet près.

140 Bénéfice mensuel maximal

Dans une entreprise, la production et la vente de x centaines de jouets identiques génère un bénéfice mensuel, en millier d'euros, que l'on modélise par :

$$B(x)=10(x-5)\,\mathrm{e}^{u(x)},$$

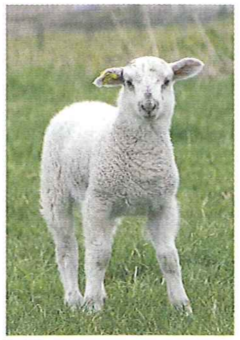
où $x\in[1\,;15]$
et $u(x)=-0{,}02\,x^2+0{,}2\,x-0{,}5$.

1 Résoudre l'équation $B(x)=0$. Interpréter le résultat.

2 On note B' la dérivée de B et u' la dérivée de u.
a. Calculer $u'(x)$, puis $B'(x)$.
b. Montrer que $B'(x)$ a le même signe sur l'intervalle $[1\,;15]$ que $-0{,}4\,x^2+4\,x$.
c. Étudier le signe de $B'(x)$ et dresser le tableau de variations de la fonction B.
On précisera les valeurs aux bornes arrondies à 0,01 près.

3 Pour quelle quantité de jouets le bénéfice est-il maximum ?
Quel est alors ce bénéfice, arrondi à 10 euros près ?
Calculer alors le bénéfice moyen par jouet.

141 Élasticité instantanée



Sur un marché national, pour un prix de vente entre 3 et 8 € le kg, l'offre de viande d'agneau par les producteurs est donnée par :

$$f(x) = e^{x+1} - 45$$

et la demande est donnée par :

$$g(x) = 10^4 \times e^{-x-1}.$$

Les quantités sont en tonne.

1 **a.** Calculer $f'(x)$. Étudier son signe et en déduire le sens de variation de l'offre sur $[3\,;8]$.

été inférieur à 2,8 € le kg, la fonction f ne pouvait pas modéliser l'offre.

2 Calculer $g'(x)$. Étudier son signe et en déduire le sens de variation de la demande.

3 On pose $h(x) = f(x) - g(x)$ sur $[3\,;8]$.

a. En utilisant les dérivées des fonctions f et g, vues aux questions précédentes, préciser le sens de variation de la fonction h sur $[3\,;8]$.

Dresser le tableau des variations de h et calculer les valeurs aux bornes, arrondies à l'unité près.

b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution sur $[3\,;8]$.

c. À l'aide des fonctionnalités de la calculatrice graphique, déterminer à 0,01 € près le prix d'équilibre du kg d'agneau sur ce marché.

En déduire la quantité demandée à ce prix de vente, arrondie à une tonne près.

4 On considère la fonction E, telle que :

$$E(x) = x\,\frac{g'(x)}{g(x)}, \text{ sur } [3\,;8].$$

On admet que cette fonction E définit l'**élasticité instantanée** de la demande par rapport au prix, c'est-à-dire le pourcentage de variation de la demande pour un accroissement de 1 % du prix. L'élasticité n'a pas d'unité.

a. Exprimer $E(x)$ en fonction de x, sous une forme simplifiée.

b. Calculer $E(3{,}83)$. Interpréter le résultat.

142 Coût total, coût marginal et coût moyen

Le coût total d'une production, en millier d'euros, est donné par : $C(x) = 2x + x\,e^{-x+2} + 10$,

où la quantité x, en tonne, est comprise entre 0,5 tonne et 5 tonnes.

On rappelle que pour une production de x tonnes :

- le coût marginal $C_m(x)$ est assimilé au nombre dérivé $C'(x)$, en millier d'euros par tonne ;
- le coût moyen $CM(x)$ est $CM(x) = \dfrac{C(x)}{x}$,

exprimé en millier d'euros par tonne.

PARTIE A Coût marginal

1 Montrer que : $C_m(x) = e^{-x+2}(1-x) + 2$,

puis que sa dérivée est donnée par :

$$C_m'(x) = (x-2)e^{-x+2}.$$

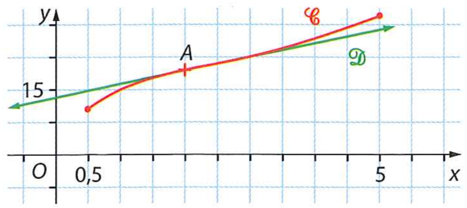
2 **a.** Étudier le signe de $C_m'(x)$ sur $[0{,}5\,;5]$.

b. En déduire le tableau de variations de la fonction de coût marginal C_m sur $[0{,}5\,;5]$.

3 Préciser le signe de $C_m(x)$ sur $[0{,}5\,;5]$, en justifiant.

PARTIE B Point d'inflexion du coût total

On a représenté ci-après la courbe représentative de la fonction de coût total C, ainsi que la tangente $\mathscr{D}$ au point A d'abscisse 2.



1 Justifier que la fonction de coût total C est croissante sur l'intervalle $[0{,}5\,;5]$.

2 En remarquant que la dérivée seconde du coût total est la dérivée du coût marginal, c'est-à-dire :

$$C''(x) = C_m'(x),$$

justifier que le point A est un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

PARTIE C Coût moyen

1 Exprimer $CM(x)$ en fonction de x.

2 Démontrer que le coût moyen est décroissant sur l'intervalle $[0{,}5\,;5]$.

143 Fonction logistique et coût total

PARTIE A Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $[0\,;20]$ par :

$$f(x) = \frac{80}{1 + 4\,e^{-0{,}3x}}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = 7x$.

1 Calculer $f(0)$ et la valeur arrondie au centième près de l'image $f(20)$.

2 Montrer que pour tout réel x de $[0\,;20]$:

$$f'(x) = \frac{96\,e^{-0{,}3x}}{(1 + 4\,e^{-0{,}3x})^2}.$$

Dresser le tableau de variations de f sur $[0\,;20]$.

3 Justifier que pour tout réel x de $[0\,;20]$, on a $f(x) < 80$. Interpréter graphiquement le résultat.

4 À l'aide d'un calcul formel, on a obtenu une valeur approchée de l'abscisse x_0 du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$:

```
1 resoudre(80/(1+4*exp(-0.3*x))=7*x,x)
  9.01687823346
```

On utilisera ce résultat SANS le justifier.

À l'aide du graphique, indiquer le signe de $7x - f(x)$ selon les valeurs de x, pour $x \in [0\,;20]$.

PARTIE B Interprétation économique

Une entreprise produit des thermomètres de bain pour bébé, au maximum 2 000 par jour.

On note x le nombre de centaines de thermomètres produits chaque jour travaillé, x appartenant à $[0\,;20]$.

On suppose que le coût total de production par jour, exprimé en centaine d'euros, est égal à $f(x)$.

1 Déterminer le montant des « coûts fixes », c'est-à-dire le montant des coûts lorsque la quantité produite est nulle.

2 Le coût total de production des thermomètres peut-il dépasser 8 000 € par jour ?

Justifier la réponse.

3 Le prix de vente d'un thermomètre est fixé à 7 €.

La recette journalière, exprimée en centaine d'euros, est donc donnée par $R(x) = 7x$.

Pour quelles productions journalières de thermomètres l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ?

144 Comparer des modèles d'évolution

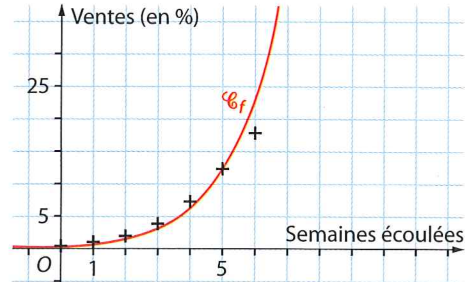
La société « Tournesol » construit et commercialise son « Triphone », nouvel appareil assurant les fonctions d'un ordinateur portable, d'un téléphone portable et d'un agenda électronique.

Les pourcentages des ventes de ce nouvel appareil au sein du segment « haut de gamme » sont donnés, au fil des semaines, dans le tableau ci-après.

Semaines écoulées	0	1	2	3	4	5	6
Ventes (en %)	0,3	1,1	2,2	4,1	7,4	12,5	17,9

PARTIE A Étude d'un modèle exponentiel

Le graphique suggère une croissance exponentielle.



À l'aide d'un tableur, on a obtenu comme ajustement du pourcentage des ventes, en fonction du nombre x de semaines écoulées :

$$f(x) = 0{,}472 \times e^{0{,}655x}.$$

1 Justifier que la fonction f est croissante. Interpréter.

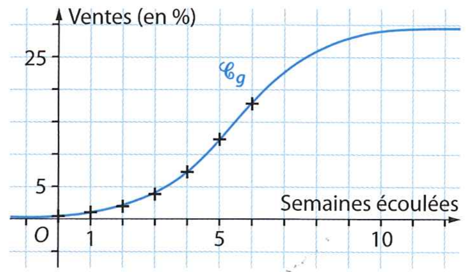
2 **a.** D'après le graphique, ce modèle est-il pertinent lorsque le nombre de semaines est supérieur à 5 ? Argumenter.

b. Calculer $f(9)$. Que penser du résultat ?

PARTIE B Étude d'un modèle logistique

On décide d'envisager une autre modélisation et, pour cela, on considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{30}{1 + 60\,e^{-0{,}75x}}.$$



1 **a.** Montrer que pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$g'(x) = \frac{1\,350\,e^{-0{,}75x}}{(1 + 60\,e^{-0{,}75x})^2}.$$

b. Étudier le signe de $g'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2 À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, vers quelle valeur semble tendre $g(x)$ lorsque le réel x devient très grand ? Interpréter.

3 Les objectifs commerciaux du « Triphone » sont considérés comme atteints lorsque le pourcentage des ventes atteint 25 % du segment « haut de gamme ».

À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, préciser à partir de quelle semaine les objectifs commerciaux sont atteints.

145 ... en calcul financier

Une approche du nombre e par capitalisation instantanée des intérêts

On suppose qu'un capital de 1 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 100 %. Ainsi, $i = 1$.

1 a. Si les intérêts s'ajoutent au capital au bout de l'année (capitalisation annuelle des intérêts), calculer le capital acquis au bout d'un an, puis de 2 ans.

b. Si la capitalisation est mensuelle, le taux mensuel est $m = \frac{1}{12}$. Justifier que le capital acquis à la fin de l'année est $C_{12} = 1\,000 \times (1+m)^{12}$. Calculer le capital acquis au bout de 1 an, puis de 2 ans, à 0,01 € près.

c. Si la capitalisation est journalière, le taux journalier est $j = \frac{1}{365}$. Exprimer le capital acquis à la fin de l'année à l'aide de j et calculer ce capital.

2 a. Poursuivre le procédé et calculer le capital acquis au bout d'un an, si la capitalisation est faite par heure, puis par minute.

b. Sachant qu'une année est composée de 365,26 jours et 1 jour de 23 h 56, calculer le capital acquis au bout d'un an si la capitalisation est toutes les secondes.

3 a. Par quel nombre est multiplié le capital placé si la capitalisation est instantanée ?

Faire une conjecture pour ce nombre.

b. Dans un ouvrage du supérieur, on trouve :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Faire le lien avec la réponse en **3 a.**

Voir page 69

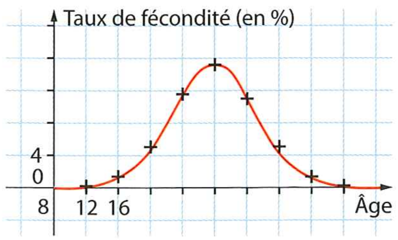
146 ... en sociologie

Modéliser la société

Lorsqu'on observe l'allure d'un nuage de points discrets $(x_i ; y_i)$, on peut essayer de modéliser le phénomène par une fonction continue à l'aide de logiciels formels. On a alors accès aux outils de l'analyse (calculs d'images, dérivée, etc.), ce qui permet d'étudier le phénomène.

PARTIE A Taux de fécondité

Le graphique ci-dessous donne quelques taux de fécondité selon l'âge de la mère en France en 2010 :



Source : Insee.

Par exemple, 15 % des femmes de 30 ans ont mis au monde un enfant en 2010. On peut alors modéliser le taux de fécondité pour une femme, en %, par :

$$f(x) = 15\,e^{-0{,}018(x-30)^2},$$

où x est son âge, entre 15 ans et 50 ans.

1 Étudier les variations de la fonction f sur $[15 ; 50]$.
En déduire la valeur du taux de fécondité maximal et l'âge de la mère correspondant à ce taux maximal.

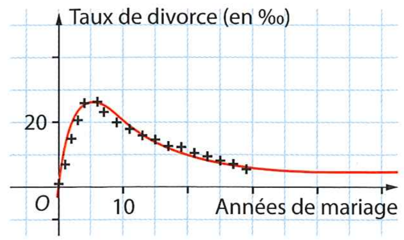
2 On admet que, pour tout réel x de $[15 ; 50]$, la dérivée seconde est donnée par :

$$f''(x) = 0{,}00216\,(9x^2 - 540x + 7\,850) \times e^{-0{,}018(x-30)^2}.$$

En déduire les abscisses des points d'inflexion de la courbe représentative de f. Interpréter les résultats.

PARTIE B Taux de divorce

Le graphique ci-dessous donne le taux de divorce selon la durée du mariage en France en 2009 :



On peut modéliser le taux de divorce pour 1 000 mariages par $f(x) = 1{,}115\,x \exp\left(\frac{(x-44)^2}{400}\right)$,

où x est la durée du mariage, en année, avec $x \in [0 ; 30]$.

1 Montrer que pour tout réel x de $[0 ; 30]$:

$$f'(x) = 0{,}115\,(0{,}005\,x^2 - 0{,}22\,x + 1) \exp\left(\frac{(x-44)^2}{400}\right).$$

2 En déduire les valeurs approchées x_1 et x_2 des racines de $f'(x)$ et le tableau de variations de f sur $[0 ; 30]$.

3 Pour quelle durée du mariage, le taux de divorce est-il maximal en 2009 ? Vérifier sur le graphique.

4 Commenter la phrase suivante : « Heureux qui sait se faire aimer après sept années de mariage. »

Alfred de Musset, *Lorenzaccio* (1834).

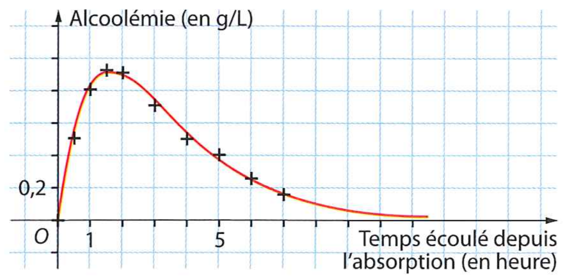
147 ... dans la vie courante

Alcoolémie et conduite

Après consommation d'alcool, le taux d'alcool dans le sang varie en fonction du temps écoulé depuis l'absorption.

On appelle « **alcoolémie** » le taux d'alcool pur dans le sang, mesuré en gramme par litre (g/L).

On considère un individu, dont l'alcoolémie en fonction du temps t écoulé depuis l'absorption d'alcool est représenté ci-contre. On modélise l'alcoolémie en fonction du temps t, en heure, par : $f(t) = t\,e^{-0{,}6t+0{,}4}$.



1 Déterminer par calcul l'alcoolémie de l'individu au bout de 2 h 30 et au bout de 4 h 45.

2 Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

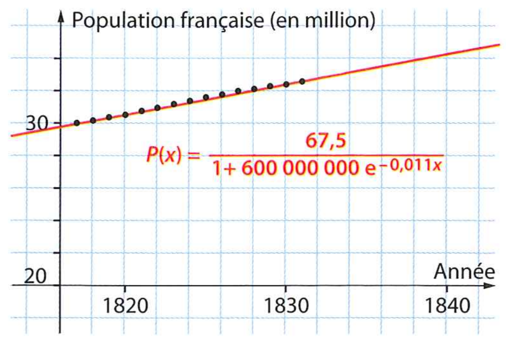
3 Le code de la route en vigueur autorise la conduite avec une alcoolémie maximale de 0,5 g/L.
Avec l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, déterminer au bout de combien de temps, après absorption d'alcool, un individu pourra prendre sa voiture sans être en infraction.

148 ... en dynamique de population

Modèle logistique

En 1838, le belge Pierre-François Verhuslt propose, dans l'article *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*, un modèle d'accroissement des populations française, belge et russe du début du XIX^e siècle, très proche des données observées à l'époque.

Voir AP 123 page 94

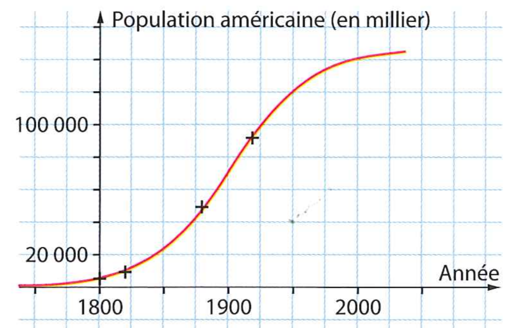


Un siècle plus tard, en 1920, les Américains Raymond Pearl et Lowell J. Reed redécouvrent ce modèle et l'appliquent à la population américaine :

Année	1790	1800	1820	1880	1919
Population (en millier)	3 929	5 308	9 638	50 156	91 972

On modélise alors la population américaine $f(t)$, en millier, en fonction de l'année t par :

$$f(t) = \frac{147\,000}{1 + 2{,}74 \times 10^{26} \times e^{-0{,}032t}}.$$



1 Justifier que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2 À l'aide d'un logiciel de calcul formel, déterminer l'abscisse du point d'inflexion de la courbe représentative de f. Interpréter en termes de rythme de croissance.

3 a. Pour chaque année donnée dans le tableau, calculer l'erreur relative entre la population réelle et la population estimée par le modèle.

b. Depuis, on sait que la population américaine était de 179 300 milliers en 1960 et de 226 500 milliers en 1980. Le modèle est-il toujours valable ?