Les fonctions exponentielles $x \rightarrow q^x$ avec $q > 0$

I Fonction exponentielle de base q

Propriété - Définition

q désigne un nombre réel strictement positif. On considère le nuage de points représentatif de la suite (q^n).
Il existe **une unique** fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et qui satisfait aux conditions suivantes :

1. la courbe représentative de f réalise un prolongement continu de ce nuage;
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$;
3. pour tous nombres réels x et y $f(x + y) = f(x) \times f(y)$
   (On dit qu'il s'agit d'**une relation fonctionnelle**).

Cette fonction est appelée **la fonction exponentielle** de base q.
On note pour tout nombre réel x, $f(x) = q^x$.

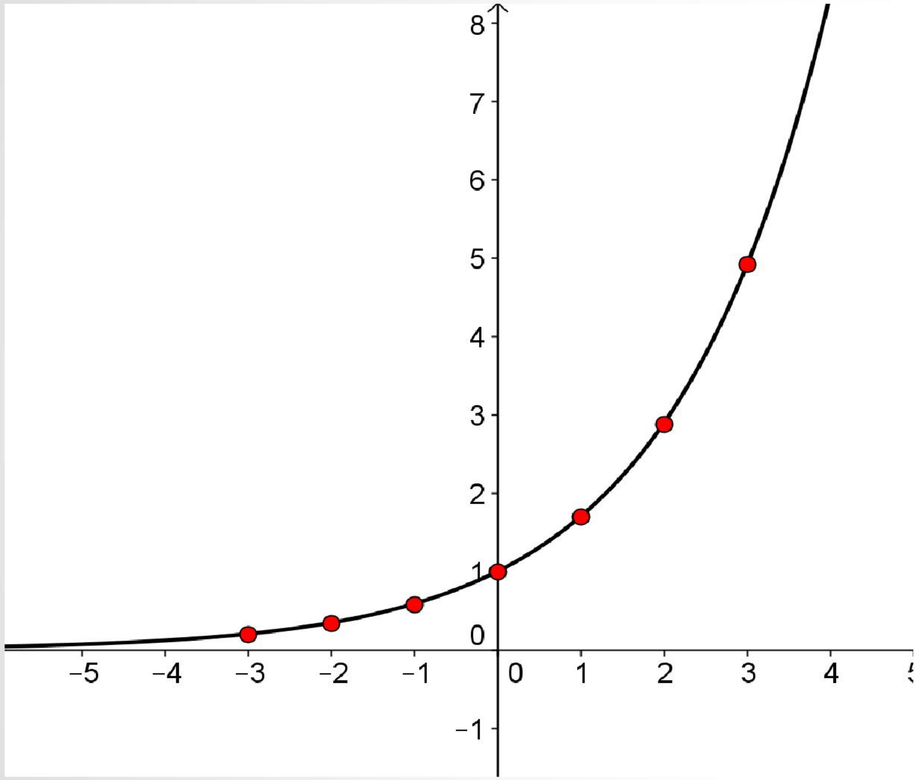
Cas particuliers

$q^0 = 1$ $q^1 = q$ $q^{-1} = \frac{1}{q}$

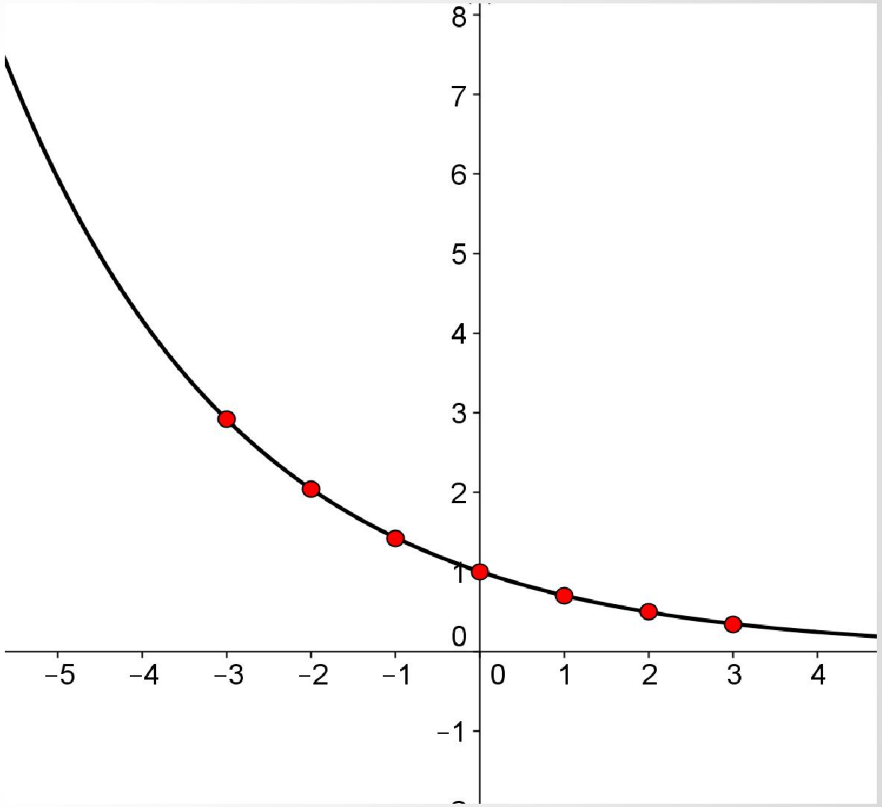
Les fonctions exponentielles

Les fonctions exponentielles $x \rightarrow q^x$ avec $q > 0$

Cas $q > 1$



Cas $0 < q < 1$



Points rouges : représentation graphique de la suite (q^n).

Courbe noire : représentation graphique de la fonction $x \rightarrow q^x$.

[Lien vers une animation Géogebra]

Les fonctions exponentielles $x \to q^x$ avec $q > 0$

II Conséquences de la relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels x et y, la relation fonctionnelle se traduit par : $q^{x+y} = q^x \times q^y$.

Les fonctions exponentielles transforment les sommes en produits.

Conséquences :

- $\boldsymbol{q^{-x} = \frac{1}{q^x}}$ **et** $\boldsymbol{q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}}$.

En effet, $q^{x-x} = q^x \times q^{-x} = 1$; donc $q^{-x} \neq 0$ et $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$.

- $\boldsymbol{q^x > 0}$.

En effet, $q^x = q^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = q^{\frac{x}{2}} \times q^{\frac{x}{2}} = \left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ et $q^x \neq 0$

- $q^{\frac{x}{2}} = \sqrt{q^x}$ et en particulier $q^{0,5} = \sqrt{q}$

En effet, $q^x = \left(q^{\frac{x}{2}}\right)^2$ et $q^x > 0$.

- Pour tout entier naturel n, $(q^x)^n = q^{nx} = (q^n)^x$

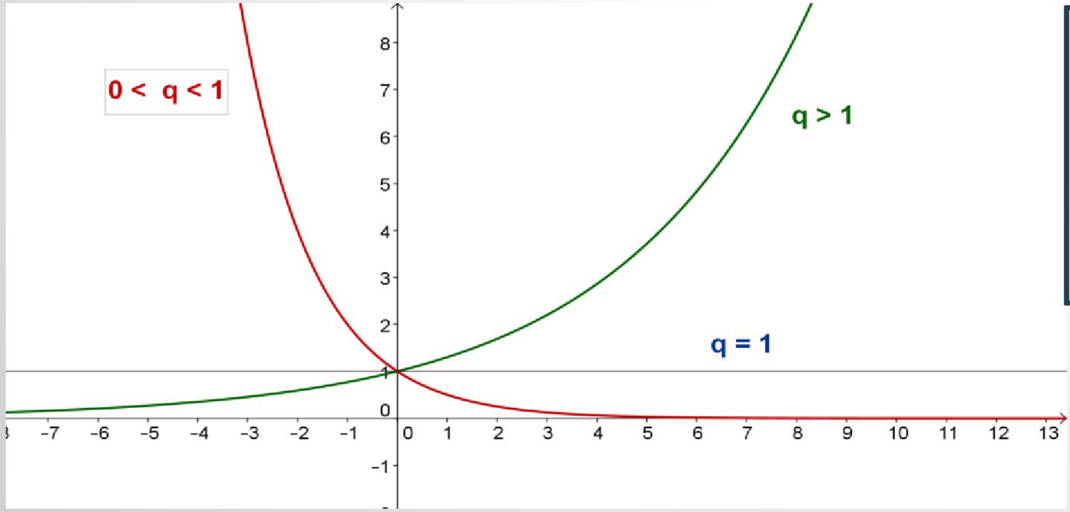
Les fonctions exponentielles $x \rightarrow q^x$ avec $q > 0$

III Sens de variation

Propriétés

Le sens de variation de la fonction $x \to q^x$ est le même que celui de la suite géométrique associée.

- Si $0 < q < 1$, la fonction $x \to q^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $q = 1$, la fonction $x \to q^x$ est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si $q > 1$, la fonction $x \to q^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Conséquence :

Si $q \neq 1$, alors pour tous nombres réels a et b :

$q^a = q^b \Leftrightarrow a = b$