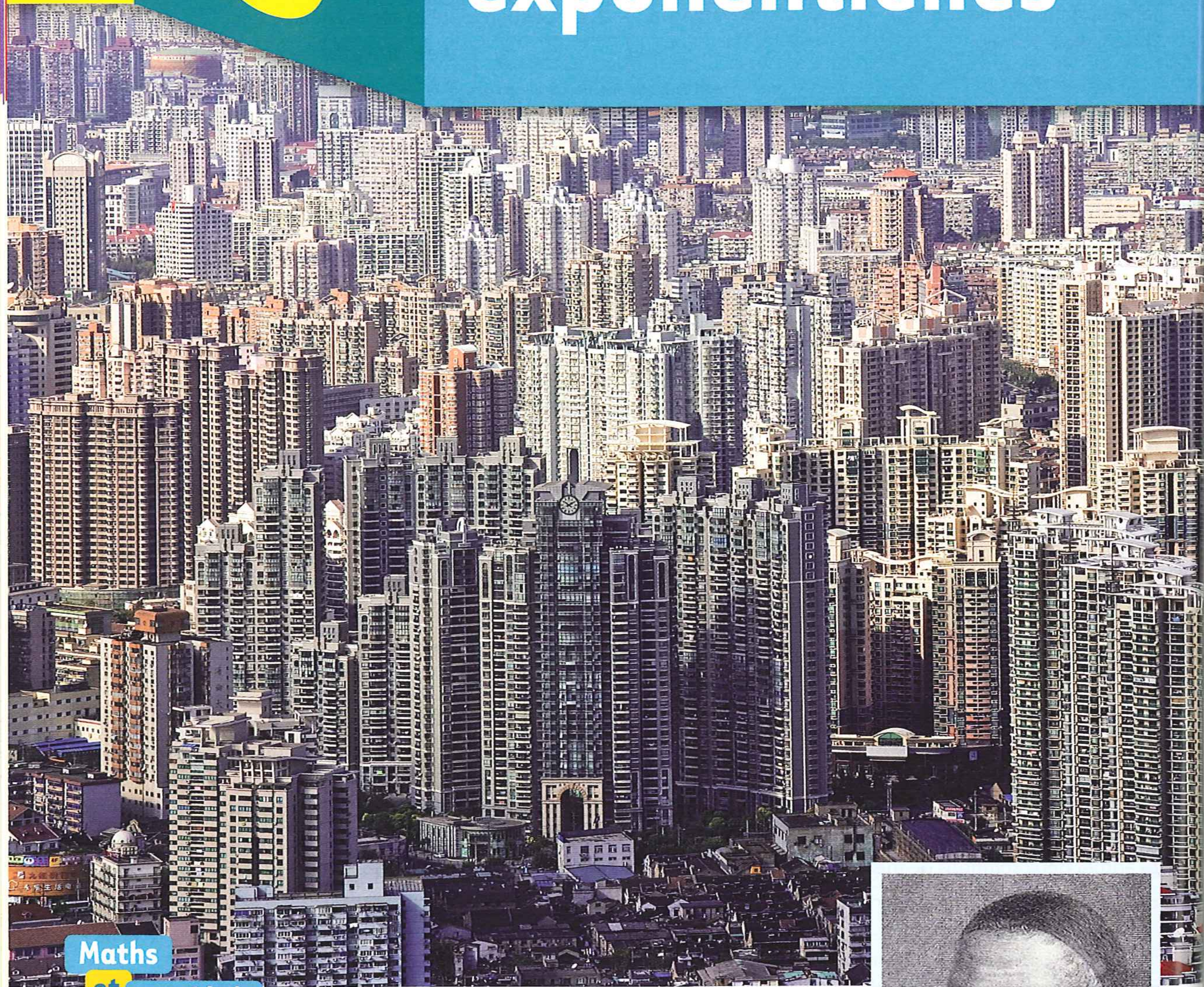
CHAPITRE 3

Fonctions exponentielles



Maths et société

Depuis les années 1950, la croissance de la population urbaine dans le monde a connu un rythme effréné, en particulier dans les pays en développement confrontés à une croissance exponentielle des villes, proche de 5 % par an. En 2008, un seuil important a été franchi : depuis cette date, plus d'un être humain sur deux habite en ville.

Cette croissance galopante a eu des conséquences majeures en termes d'aménagement urbain, de politiques du logement et de développement durable. Elle s'est traduite, partout dans le monde, par l'apparition de « villes nouvelles » et la formation de mégalopoles.

Grégoire de Saint-Vincent
1584-1667

→ Chercheurs d'hier p. 94

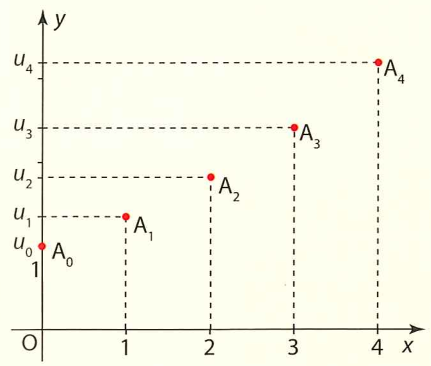
Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Suites géométriques (q^n) avec $q > 1$

- La suite de terme général $u_n = q^n$, avec $q > 1$, est strictement croissante.
- Représentation graphique :

Exemple : $u_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$.



1 Construisez la représentation graphique des cinq premiers termes de la suite de terme général $u_n = q^n$, dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \left(\frac{6}{5}\right)^n$;

b) $u_n = 1{,}1^n$;

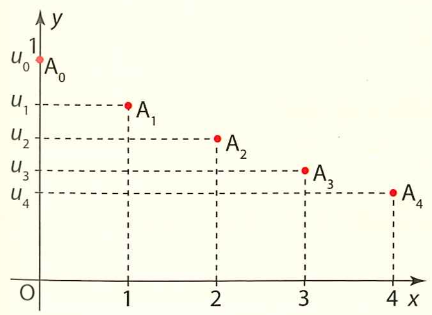
c) $u_n = 2^n$.

Indication : choisissez un repère dans lequel les cinq premiers termes peuvent être visibles.

Suites géométriques (q^n) avec $0 < q < 1$

- La suite de terme général $u_n = q^n$, avec $0 < q < 1$, est strictement décroissante.
- Représentation graphique :

Exemple : $u_n = \left(\frac{4}{5}\right)^n$.



2 Construisez la représentation graphique des cinq premiers termes de la suite de terme général $u_n = q^n$, dans chacun des cas suivants :

a) $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$;

b) $u_n = 0{,}9^n$;

c) $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Indication : choisissez un repère dans lequel les cinq premiers termes peuvent être visibles.

→ Voir les corrigés p. 361

CHAPITRE

NE SUITE À UNE FONCTION

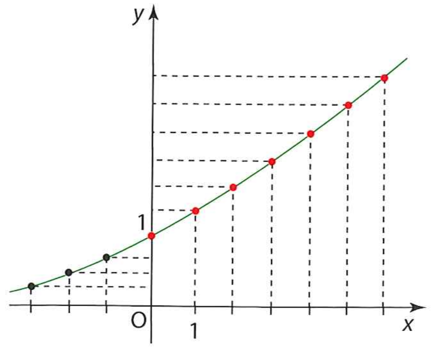
…les sept premiers points de la représentation …la suite de terme général $(1{,}2)^n$ sont les points …ntre.

…s points de coordonnées $\left(-1\,;(1{,}2)^{-1}\right)$, $\left(-2\,;(1{,}2)^{-2}\right)$ et … $2)^{-3}\big)$.

c) En reliant ces points par une ligne continue et régulière on obtient la courbe colorée en vert.

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet cette courbe représentative, on notera $f(x) = (1{,}2)^x$.

Lisez sur le graphique des valeurs approchées de $(1{,}2)^{\frac{5}{2}}$ et de $(1{,}2)^{-1{,}5}$.



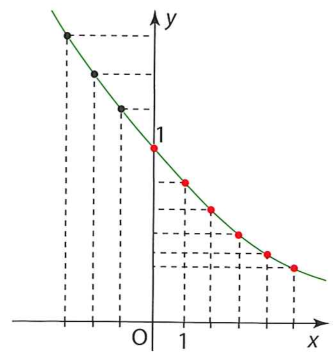
2 **a)** Vérifiez que les six premiers points de la représentation graphique de la suite de terme général $(0{,}85)^n$ sont les points rouges ci-contre.

b) Placez les points de coordonnées $\left(-1\,;(0{,}85)^{-1}\right)$, $\left(-2\,;(0{,}85)^{-2}\right)$ et $\left(-3\,;(0{,}85)^{-3}\right)$.

c) En reliant ces points par une ligne continue et régulière on obtient la courbe colorée en vert.

Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui admet cette courbe représentative, on notera $f(x) = (0{,}85)^x$.

Lisez sur le graphique des valeurs approchées de $(0{,}85)^{\frac{3}{2}}$ et $(0{,}85)^{-2{,}5}$.



Les courbes d'équation $y = q^x$ avec $q > 0$ s'obtiennent à partir des représentations graphiques des suites (q^n).

Activité 2 À LA RECHERCHE D'UNE COURBE

Parmi toutes les courbes d'équation $y = q^x$ avec $q > 0$, on se propose d'en trouver une dont la pente de la tangente au point A d'abscisse 0, c'est-à-dire au point A(0 ; 1), est égale à 1.

1 Indiquez une équation de la tangente en A à une telle courbe.

2 **a)** À l'aide d'un logiciel, vérifiez que parmi toutes les courbes d'équation $y = q^x$ une seule semble avoir en A une tangente de pente 1.

b) Si q_0 est la valeur correspondant à une telle courbe, vérifiez que : $q_0 \approx 2{,}72$.

La valeur exacte de q correspondant à une telle courbe est notée **e**.

Parmi toutes les courbes d'équation $y = q^x$, avec $q > 0$, une seule admet comme tangente au point A(0 ; 1) une droite de coefficient directeur égal à 1.

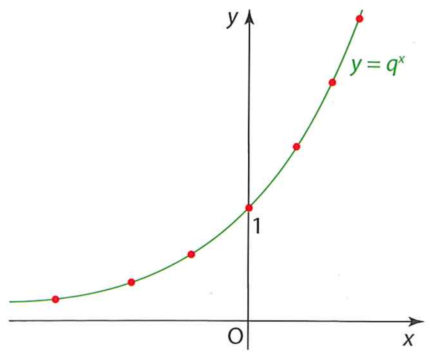
1 Fonction $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$

1.1 Définition

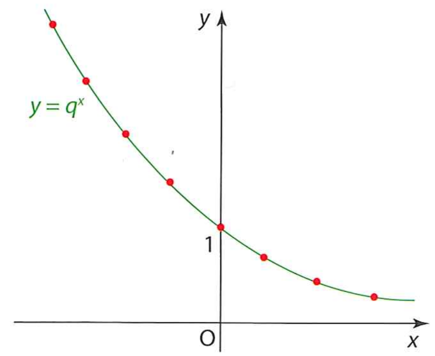
La fonction $x \mapsto q^x$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative est obtenue en reliant par une ligne continue et régulière les points de coordonnées $(n\,;q^n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle de base q**.

Cas $q > 1$



Cas $q < 1$



– Points rouges : représentation graphique de la suite (q^n).

– Courbe verte : représentation graphique de la fonction $x \mapsto q^x$.

Cas **$q = 1$:** dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $q^n = 1$.

Remarque importante

Pour tout réel x, q^x est strictement positif.

1.2 Dérivabilité

On admet que :

Les fonctions $x \mapsto q^x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Ces fonctions sont donc continues sur $\mathbb{R}$ et admettent une tangente en chaque point.

Exemples

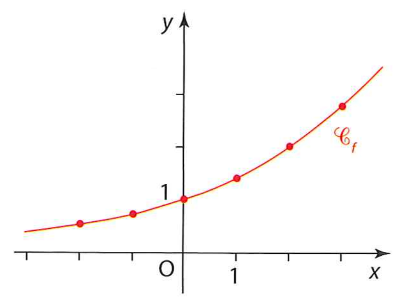
• Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1{,}4)^x$. Dans ce cas, $q = 1{,}4$; l'allure de sa courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, correspond au cas $q > 1$.

On a $f(0) = 1$; $f(1) = 1{,}4$;

$f(2) = (1{,}4)^2 = 1{,}96$; $f(3) = (1{,}4)^3 = 2{,}744$;

$f(-1) = (1{,}4)^{-1} = \dfrac{1}{1{,}4} \approx 0{,}71$;

$f(-2) = (1{,}4)^{-2} = \dfrac{1}{(1{,}4)^2} \approx 0{,}51$.



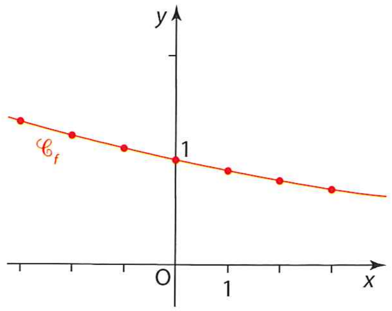
- Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (0,9)^x$. Dans ce cas, $q = 0,9$; l'allure de sa courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, correspond au cas $q < 1$.

On a $f(0) = 1$; $f(1) = 0,9$;

$f(2) = 0,9^2 = 0,81$; $f(3) = 0,9^3 = 0,729$;

$f(-1) = (0,9)^{-1} = \dfrac{1}{0,9} \approx 1,11$;

$f(-2) = (0,9)^{-2} = \dfrac{1}{0,9^2} \approx 1,23$.



2 Relation fonctionnelle

2.1 Une propriété fondamentale

Si a et b sont **des entiers**, on sait que $q^{a+b} = q^a \times q^b$.

Le théorème suivant que nous admettons, indique que cette propriété est vraie si a et b sont des réels quelconques, pas forcément entiers.

Théorème 1 q désigne un nombre strictement positif. Alors, pour tous réels a et b, $q^{a+b} = q^a q^b$.

Exemples

- $2^{\sqrt{3}+1} = 2^{\sqrt{3}} \times 2^1 = 2 \times 2^{\sqrt{3}}$.
- $5^{\pi-2} = 5^\pi \times 5^{-2} = 5^\pi \times \dfrac{1}{5^2} = \dfrac{5^\pi}{25}$.

2.2 Conséquences

Théorème 2 q est un nombre strictement positif.

1. Pour tous réels $a_1, a_2, \ldots, a_p$, $q^{a_1+a_2+\ldots+a_p} = q^{a_1} q^{a_2} \ldots q^{a_p}$.
2. Pour tout réel a, $q^{-a} = \dfrac{1}{q^a}$.
3. Pour tout réel a et tout entier relatif p, $(q^a)^p = q^{pa}$.
4. Pour tout réel a, pour tout réel b, $q^{a-b} = \dfrac{q^a}{q^b}$.
5. $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$.

Remarques

1. Les propriétés 1, 2, 3 et 4 ci-dessus sont connues dans le cas où les exposants sont entiers. Le théorème indique qu'elles sont vraies dans le cas où les exposants sont des réels quelconques.

2. Généralisation de la propriété 5 : pour $q > 0$ et pour n entier naturel non nul, on peut vérifier que $q^{\frac{1}{n}}$ est le nombre positif dont la puissance n-ième est égale à q.

Par exemple, $27^{\frac{1}{3}} = 3$ car $3^3 = 27$.

Démonstration

1. $q^{a_1+a_2} = q^{a_1} \times q^{a_2}$ (d'après la relation fonctionnelle).

$q^{a_1+a_2+a_3} = q^{(a_1+a_2)+a_3} = q^{(a_1+a_2)} \times q^{a_3} = (q^{a_1} \times q^{a_2}) \times q^{a_3} = q^{a_1} \times q^{a_2} \times q^{a_3}$.

De proche en proche on démontre que $q^{a_1+a_2+\ldots+a_p} = q^{a_1} \times q^{a_2} \times \ldots \times q^{a_p}$.

2. $q^{-a} = \dfrac{1}{q^a}$ équivaut à $q^{-a} \times q^a = 1$. Or $q^{-a} \times q^a = q^{-a+a} = q^0 = 1$.

3. Cas où p est entier positif :

$(q^a)^p = \underbrace{q^a \times q^a \times \ldots \times q^a}_{p \text{ fois}} = q^{a+a+a+\ldots+a} = q^{pa}$.

Si p est un entier négatif, $(q^a)^p = (q^a)^{-(-p)} = \dfrac{1}{(q^a)^{-p}}$.

Or $-p$ est positif. Donc $(q^a)^{-p} = q^{-pa}$ d'après la propriété établie ci-dessus dans le cas où l'entier est positif.

Or $\dfrac{1}{q^{-pa}} = q^{pa}$ d'après la propriété 2.

4. $q^{a-b} = q^{a+(-b)} = q^a \times q^{-b} = q^a \times \dfrac{1}{q^b} = \dfrac{q^a}{q^b}$.

5. $q^{\frac{1}{2}} \times q^{\frac{1}{2}} = \left(q^{\frac{1}{2}}\right)^2 = q^{\frac{1}{2}\times 2} = q$ d'après la propriété 3.

Ainsi $q^{\frac{1}{2}}$ est le nombre positif dont le carré est égal à q.

Donc $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$.

Exemples

- $q^{3a-5} = \dfrac{q^{3a}}{q^5}$.
- $\dfrac{9^{2x+\frac{1}{2}}}{9^x} = \dfrac{9^{2x} \times 9^{\frac{1}{2}}}{9^x} = \dfrac{(9^x)^2 \times \sqrt{9}}{9^x} = 3 \times 9^x$.

On peut retrouver ce résultat en remarquant que $\dfrac{9^{2x+\frac{1}{2}}}{9^x} = 9^{2x+\frac{1}{2}-x}$.

- $4^{\frac{5}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^5 = (\sqrt{4})^5 = 2^5 = 32$.

3 Fonction exponentielle $x \mapsto e^x$

3.1 Définition

Définition 1 Parmi les fonctions $x \mapsto q^x$, la fonction $f : x \mapsto e^x$ est celle telle que $f'(0) = 1$.

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée **exp**.

3.2 Théorème fondamental

Théorème 3 La fonction exponentielle est **égale à sa fonction dérivée.**

Démonstration

Il s'agit de démontrer que pour tout réel x, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x$.

D'après la relation fonctionnelle, $e^{x+h} = e^x \times e^h$. Donc :

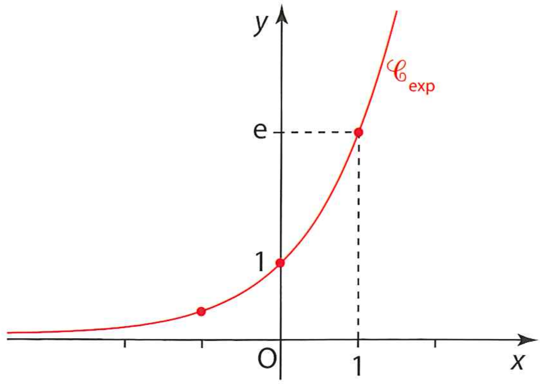
$\dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = \dfrac{e^x \times e^h - e^x}{h} = \dfrac{e^x (e^h - 1)}{h}$.

Or, d'après la définition de la fonction $x \mapsto e^x$, le nombre dérivé en 0 de cette fonction est égal à 1.

Ceci signifie que $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - e^0}{h} = 1$. Or $e^0 = 1$. D'où $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$.

Donc $\lim\limits_{h \to 0} e^x \dfrac{(e^h - 1)}{h} = e^x$: la dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \mapsto e^x$.

3.3 | Représentation graphique. Sens de variation



Théorème 4 La fonction $x \mapsto e^x$ est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

On en déduit les propriétés suivantes :

Théorème 5 Pour tous réels a et b,
- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

4 Dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$

Théorème 6 Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout x de I, $f'(x) = e^{u(x)} \times u'(x)$.

Nous admettrons ce théorème.

Remarques
- Si $u(x) = x$, $u'(x) = 1$.

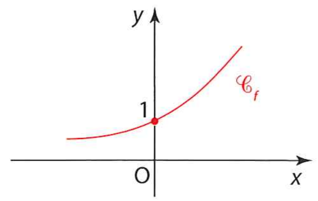
Dans ce cas particulier, ce théorème permet de retrouver le fait que si $f(x) = e^x$, alors $f'(x) = e^x$.
- e^x est toujours strictement positif. Donc le signe de $e^{u(x)} \times u'(x)$ est celui de $u'(x)$.

Exemples
- $f(x) = e^{x^2-3x}$, alors $f'(x) = e^{x^2-3x} \times (2x - 3)$.
- $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$; la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

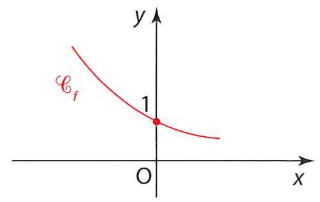
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \times \left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

OBJECTIF 1 Connaître la représentation graphique de la fonction $x \mapsto q^x$, $q > 0$

f est la fonction $x \mapsto q^x$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Alors, $\mathscr{C}_f$ a l'allure suivante :



Cas $q > 1$: f est strictement croissante



Cas $q < 1$: f est strictement décroissante

Si $q = 1$, $\mathscr{C}_f$ est la droite d'équation $y = 1$.

EXERCICE RÉSOLU A

Soit $a > 1$. On pose $f(x) = (a - 1)^x$ et $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f.

1. Discutez selon les valeurs de a le sens de variation de f.

2. Construisez $\mathscr{C}_f$ pour $a = \dfrac{5}{2}$.

Méthode

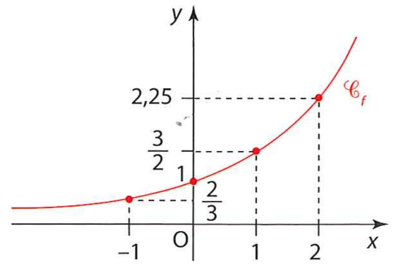
1. Pour connaître le sens de variation de $x \mapsto q^x$, il faut savoir si q est strictement supérieur à 1 ou si q appartient à $]0 ; 1[$, ou si $q = 1$.

2. $\dfrac{5}{2} > 2$, donc d'après la question 1, on sait que f est strictement croissante.
On obtient $\mathscr{C}_f$ de façon plus précise en calculant les coordonnées de quelques points de $\mathscr{C}_f$.

Solution

1. • Cas $a - 1 > 1$, c'est-à-dire $a > 2$.
f est strictement croissante.
• Cas $0 < a - 1 < 1$, c'est-à-dire $1 < a < 2$.
f est strictement décroissante.
• Cas $a - 1 = 1$, c'est-à-dire $a = 2$.
f est la fonction constante $x \mapsto 1$.

2. Si $a = \dfrac{5}{2}$, alors $f(x) = \left(\dfrac{3}{2}\right)^x$.



Mise en pratique

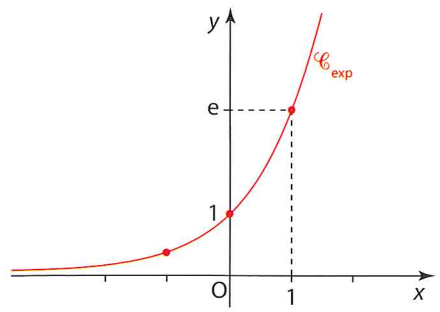
1 a est un réel tel que $a > \dfrac{1}{3}$.
On pose $f(x) = (3a - 1)^x$ et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.
1. Discutez selon les valeurs de a l'allure de $\mathscr{C}_f$.
2. Construisez $\mathscr{C}_f$ dans chacun des cas suivants :
a) $a = 0,5$; **b)** $a = 0,7$.

2 a est un réel tel que $a > \dfrac{3}{2}$.
On pose $f(x) = (2a - 3)^x$ et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.
1. Discutez selon les valeurs de a l'allure de $\mathscr{C}_f$.
2. Construisez $\mathscr{C}_f$ dans chacun des cas suivants :
a) $a = 1,8$; **b)** $a = 2,6$.

EXERCICES

OBJECTIF 2 Connaître la dérivée, les variations et la représentation graphique de la fonction exponentielle

$f(x) = e^x$, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f.
Alors $f'(x) = e^x$; f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



EXERCICE RÉSOLU B

On pose $f(x) = e^x + x$.

1. Calculez la dérivée de f et étudiez le sens de variation de f.

2. Donnez l'allure de la courbe représentative de f.

Méthode

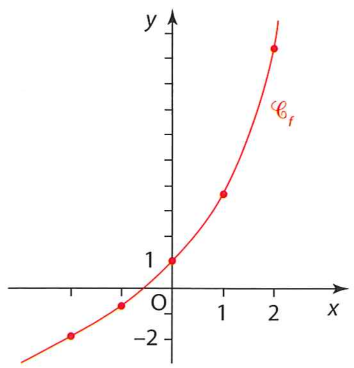
1. $f = u + v$ où $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$.
D'où $f' = u' + v'$. Le signe de la dérivée permet d'obtenir le sens de variation.

2. Pour construire la courbe représentative de f, on calcule les coordonnées de quelques points de cette courbe.

Solution

1. $f'(x) = e^x + 1$. Pour tout x, $e^x > 0$, donc $e^x + 1 > 0$.
f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $f(0) = e^0 + 0 = 1$.
$f(1) = e^1 + 1 = e + 1 \approx 3{,}72$.
$f(2) = e^2 + 2 \approx 9{,}39$. $f(-1) = \dfrac{1}{e} - 1 \approx -0{,}63$.
$f(-2) = \dfrac{1}{e^2} - 2 \approx -1{,}86$.



Mise en pratique

3 On pose $f(x) = e^x - 1$.

1. Calculez la dérivée de f et étudiez le sens de variation de f.

2. Donnez l'allure de la courbe représentative de f.

4 On pose $f(x) = \dfrac{2}{5} e^x$.

1. Calculez la dérivée de f et étudiez le sens de variation de f.

2. Donnez l'allure de la courbe représentative de f.

5 On pose $f(x) = x^3 + e^x$.
Calculez la dérivée de f et étudiez le sens de variation de f.

EXERCICES

OBJECTIF 3 Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture

Pour tout réel $q > 0$, pour tous réels a et b :

- $q^{a+b} = q^a q^b$ (1)
- $q^{a-b} = \dfrac{q^a}{q^b}$ (3)
- $q^{-a} = \dfrac{1}{q^a}$ (2)
- $q^{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$ (4)

EXERCICE RÉSOLU C

1. On pose $A(x) = 2^{x+3} - 8 \times 2^{x-2}$.
Simplifiez l'expression $A(x)$.

2. On pose $B(x) = 4^{x-\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{2}\left(4^{\frac{x}{3}} \times 4^{\frac{2x}{3}}\right)$.
Simplifiez l'expression $B(x)$.

Méthode

1. Pour transformer 2^{x+3} on utilise la propriété (1) ci-dessus.
Pour transformer 2^{x-2} on utilise la propriété (3).

2. Pour transformer $4^{x-\frac{1}{2}}$, on utilise la propriété (3) puis la propriété (4).
Pour transformer $4^{\frac{x}{3}} \times 4^{\frac{2x}{3}}$, on utilise la propriété (1).

Solution

1. $2^{x+3} = 2^x \times 2^3 = 2^x \times 8$.
$2^{x-2} = \dfrac{2^x}{2^2} = \dfrac{1}{4} \times 2^x$.
Donc :
$A(x) = 8 \times 2^x - 8 \times \dfrac{1}{4} \cdot 2^x$.
$A(x) = 2^x \cdot (8 - 2)$.
D'où $\mathbf{A(x) = 6 \times 2^x}$.

2. $4^{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{4^x}{4^{\frac{1}{2}}}$.
Or $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$.
Donc $4^{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{4^x}{2}$.
$4^{\frac{x}{3}} \times 4^{\frac{2x}{3}} = 4^{\frac{x}{3}+\frac{2x}{3}} = 4^x$.
Donc $B(x) = \dfrac{1}{2} \cdot 4^x + \dfrac{1}{2} \cdot 4^x$.
D'où $\mathbf{B(x) = 4^x}$.

Mise en pratique

Pour les exercices 6 à 13
Simplifiez les expressions suivantes :

6 $A(x) = 3^{2x-1} + 2(3^{2x+1})$.

7 $B(x) = 2^{x+\frac{1}{2}} + 3\left(2^{\frac{x}{3}} \times 2^{\frac{2x}{3}}\right)$.

8 $C(x) = 0{,}2^{x-3} \times 0{,}2^{x+3}$.

9 $D(x) = \dfrac{1}{3}(7^{-2} \times 7^{2-x})$.

10 $E(x) = 2(0{,}25^{x-y} \times 0{,}25^{x+y})$.

11 $F(x) = \dfrac{3^{2x+2}}{3^{3x+1}} \times 3^x$.

12 $G(x) = 1{,}7^{\frac{5}{2}} \times 1{,}7^{x+\frac{1}{2}}$.

13 $H(x) = 1{,}1^{3x+1} - 1{,}1^{2x} \times 1{,}1^{2+x}$.

OBJECTIF 4 Calculer la dérivée d'une fonction de la forme $x \longmapsto e^{u(x)}$

Si la fonction u est dérivable sur un intervalle I, alors la fonction $f : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $f'(x) = e^{u(x)} \cdot u'(x)$.

EXERCICE RÉSOLU D

On pose $f(x) = e^{-x^2}$.

1. a) Précisez l'ensemble de définition de f.

b) Calculez la dérivée de la fonction f.

c) Étudiez le sens de variation de f et dressez un tableau de variation.

2. Construisez la courbe représentative de f.

Méthode

1. a) On remarque que $f(x)$ est de la forme $e^{u(x)}$.

b) Pour calculer $f'(x)$, ne pas oublier de multiplier par $u'(x)$.

c) Le sens de variation de f est donné par le signe de la dérivée.
Le tableau de variation permet de résumer les résultats précédents.

2. Pour construire la courbe représentative de f, on calcule les coordonnées de quelques points de cette courbe.

Remarque
La courbe semble symétrique par rapport à la droite des ordonnées. Il en est bien ainsi car, pour tout réel x, $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$, donc deux points d'abscisses opposées ont même ordonnée.

Solution

1. a) $f(x) = e^{u(x)}$, où $u(x) = -x^2$.
La fonction u et la fonction exponentielle sont définies sur $\mathbb{R}$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

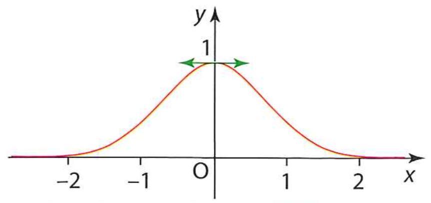
b) $u'(x) = -2x$, donc $f'(x) = e^{-x^2} \times (-2x)$.

c) e^{-x^2} est toujours positif. Donc $f'(x)$ est du signe de $-2x$.
D'où : si $x < 0$, $f'(x) > 0$ donc f strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$;
si $x > 0$, $f'(x) < 0$ donc f strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	1	↘	

La fonction admet un maximum en zéro.

2. $f(0) = 1$, $f(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0{,}37$,
$f(-1) = e^{-1} \approx 0{,}37$,
$f(2) = e^{-4} \approx 0{,}018$, $f(-2) = e^{-4} \approx 0{,}018$.



Mise en pratique

Pour les exercices 14 et 15

1. a) Précisez l'ensemble de définition de f.

b) Calculez la dérivée de la fonction f.

c) Étudiez le sens de variation de f et dressez son tableau de variation.

2. Construisez la courbe de f.

14 $f(x) = e^{-x}$.

15 $f(x) = e^{-x^2+2x}$.

Pour se tester

Exercices interactifs

16 Questions sur le cours

Complétez comme il convient.

1. La dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \mapsto \ldots\ldots$.

2. $q^a \times q^b = q^{\cdots\cdots}$ (pour q réel positif).

3. $\frac{q^a}{q^b} = q^{\cdots\cdots}$ (pour q réel positif).

4. $q^{-a} = \frac{1}{q^{\cdots\cdots}}$ (pour q réel positif).

5. $(q^a)^n = q^{\cdots\cdots}$ (pour q réel positif).

17 Vrai ou faux

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

1. Si $a < b$, et $q > 1$, alors $q^a < q^b$.

2. Si u est une fonction dérivable sur I, alors pour tout x de I, la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est la fonction $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

3. Pour q réel positif, $q^\pi > q^2$.

4. $e^\pi > e^{2-\pi}$.

5. Pour q réel positif, $q^{a \times b} = q^a + q^b$.

6. Pour q réel positif, $q^{a+b} = q^a + q^b$.

18 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3^{4+2x}$, alors $f(x)$ peut s'écrire :
a) $(3^2)^2 \times \frac{1}{3^{2x}}$ **b)** $(3^{x+2})^2$ **c)** $3^4 + 3^{2x}$.

2. Si $0 < a < b$, alors :
a) $\frac{0{,}7^a}{0{,}7^b} < 1$ **b)** $0{,}72^{2a} < 0{,}72^{2b}$ **c)** $0{,}7^a < 1$.

3. Pour q réel positif supérieur à 1, l'inéquation : $q^{3x+1} < q^{-2x+3}$ admet comme ensemble solution :
a) $S =]-\infty ; 0{,}4[$
b) $S =]0{,}4 ; +\infty[$
c) $S =]-\infty ; 0{,}4]$.

4. Si f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x+1}$, alors sa fonction dérivée f' est définie par :
a) e^{1-x} **b)** $-e^{1-x}$ **c)** e^{x-1}.

19 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. Pour tout réel x, pour q réel positif, $(q^{3x+1})^2$ est égal à :
a) q^{9x^2+1} **b)** q^{9x^2+2x+1} **c)** q^{6x+2}.

2. Pour tout réel x, pour q réel positif, $\frac{q^{3x}}{q^{-2x}}$ est égal à :
a) $q^{-\frac{3}{2}}$ **b)** q^{5x} **c)** $(q^x)^5$.

3. Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2+2x}$, sa fonction dérivée f' est définie par :
a) $f'(x) = (-2x+2)e^{-x^2+2x}$
b) $f'(x) = \frac{(-2x+2)e^{-x^2}}{e^{-2x}}$
c) $f'(x) = e^{-2x+2}$.

4. Pour q réel supérieur à 1 :
a) $q^{7,2} > q^{7,1}$ **b)** $q^7 > 1$ **c)** $q^7 < q^{7,1}$.

Voir les corrigés p. 361

Utiliser sa calculatrice

→ Pour comparer deux courbes

20 Densité de population urbaine

Un modèle de densité urbaine est une formule qui lie la densité de population (en nombre de personnes par unité de surface) à la distance x au centre de la ville (en unité de longueur).

Vue aérienne de l'agglomération lyonnaise.

A Un premier exemple : Lyon

Pour la ville de Lyon, notons $L(x)$ la densité de population en nombre d'habitants par km², en fonction de la distance x, en km, au centre de la ville. D'après un modèle de densité, on a :

$$L(x) = 23\,349e^{-0{,}3x}$$

(*source : rapport de l'INRETS*).

1. Calculez la densité urbaine :

a) pour une distance de 2 km du centre ville ;

b) au centre ville ;

c) pour une distance de 10 km du centre ville.

2. Calculez la dérivée L′ de la fonction L et pour $x \in [0\,;12]$, construisez le tableau de variation de L.

3. Donnez l'allure de la courbe représentative de la fonction L pour $x \in [0\,;12]$.

B Un second exemple : Marseille

Pour la ville de Marseille, notons $M(x)$ la densité de population en nombre d'habitants par km², en fonction de la distance x, en km, au centre de la ville.
D'après un modèle de densité, on a : $M(x) = 11\,880e^{-0{,}22x}$.

1. a) Quelle est la densité de population au centre ville de Marseille ?

b) Quelle est-elle à une distance de 10 km du centre ?

2. Donnez l'allure de la courbe représentative de la fonction M.

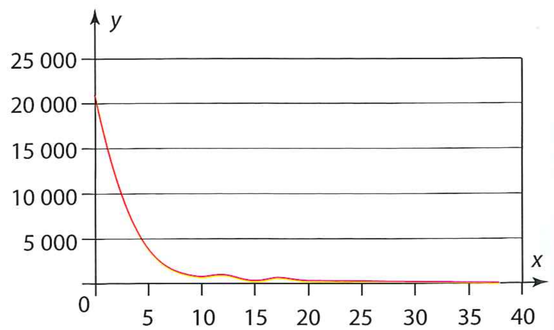
C Analyse comparative

1. Faites tracer simultanément sur l'écran de votre calculatrice les deux courbes représentant les fonctions L et M pour $x \in [0\,;12]$.

2. Graphiquement, donnez une valeur approchée de la distance x_0 pour laquelle $L(x_0) = M(x_0)$.

3. À l'aide du graphique, faites une analyse des densités urbaines à Lyon et à Marseille dans un rayon de 12 km du centre de ces villes.

Remarque. *En général, le modèle décrit précédemment est proche de la réalité. Par exemple, pour la ville de Lyon, la courbe ci-contre représente la densité de population réelle en fonction de la distance au centre-ville. Vous pouvez vérifier que cette courbe est très voisine de celle que vous avez obtenue dans la partie* **A**.

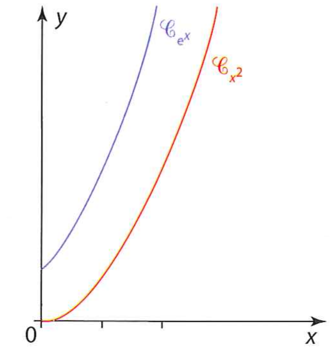


Utiliser Geogebra

→ Pour résoudre une équation

21 Fonction exponentielle et fonction puissance

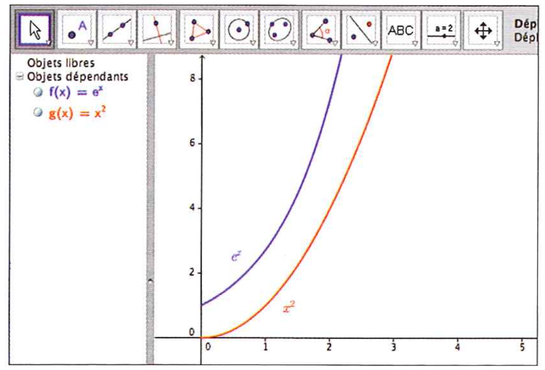
On se propose de résoudre le problème suivant :
Existe-t-il un nombre x positif tel que $e^x = x^2$?



A À la recherche d'une conjecture

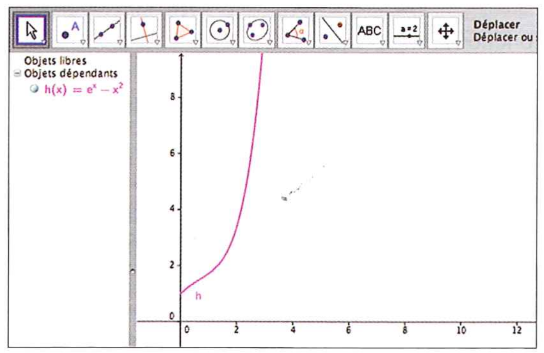
Donnez l'allure de la représentation graphique de la fonction exponentielle et celle de la fonction carré pour x positif.
Vérifiez que ces représentations graphiques ont l'allure ci-contre.
Il semble que les deux courbes ne se rencontrent pas.

B Une conjecture plus précise



1. À l'aide du logiciel GeoGebra, faites tracer pour x positif les courbes d'équation $y = e^x$ et $y = x^2$ et vérifiez que vous obtenez l'écran ci-contre (la courbe bleue représente la fonction exponentielle et la courbe rouge la fonction carré.)

2. Modifiez l'échelle et vérifiez que les deux courbes s'écartent de plus en plus quand x devient de plus en plus grand.



3. a) À l'aide du logiciel GeoGebra, faites tracer la courbe d'équation $y = e^x - x^2$ et vérifiez que vous obtenez l'écran ci-contre.

b) Expliquez pourquoi l'allure de la courbe obtenue est en cohérence avec le résultat de la question **2.** ci-dessus.

C Une démonstration à présent

Posons $f(x) = e^x - x^2$. On se propose de démontrer que, pour x positif, $f(x)$ ne s'annule jamais.
Pour cela nous allons étudier les variations de la fonction f.

1. a) Calculez $f'(x)$.

b) Tracez dans un même repère la courbe d'équation $y = e^x$ et droite d'équation $y = 2x$.

c) Expliquez pourquoi il existe un unique réel x_0 tel que le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'équation $y = e^x$ au point d'abscisse x_0 soit égal à 2.

2. On sait que la fonction exponentielle est située au-dessus de chacune de ses tangentes (voir chapitre 5, p. 126).
Déduire de ce qui précède que pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) > 0$.

3. Dressez le tableau de variation de f sur $[0\,;+\infty[$ et déduisez-en que pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) > 0$.

Entraînement

DE TÊTE

22 Calculez :

a) $\dfrac{(2^3)^2}{2^6}$. b) $0{,}7^{-1} \times 0{,}7$.

c) $e^2 \times e^{-2}$. d) $(2^2 + 1)^2$.

23 q est un réel positif. Calculez :

a) $\dfrac{q^2 \times q^3}{q}$. b) $\left((q^2)^2\right)^2$. c) $\left((q^{-1})^2\right)^{-2}$.

24 Vérifiez sans l'aide de la calculatrice les égalités suivantes :

$4^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{3}}$; $8^{\frac{1}{3}} = 32^{\frac{1}{5}}$; $27^{\frac{5}{3}} = 3^5$;

$\dfrac{2^3}{2^{-3}} = 4^3$; $16^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{8}$; $27^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{3}\right)^9$.

D'UNE SUITE À UNE FONCTION

25 **1.** Expliquez pourquoi la suite (u_n) définie pour tout naturel n par $u_n = \left(\dfrac{5}{3}\right)^n$ est géométrique ; précisez son premier terme et sa raison.

2. Placez dans un repère orthogonal les huit premiers points de la représentation graphique de (u_n) (on prendra pour unités 2 cm en abscisse et 0,1 cm en ordonnée).

3. Tracez dans ce repère une représentation de la fonction $f : x \mapsto \left(\dfrac{5}{3}\right)^x$.

26 **1.** Expliquez pourquoi la suite (u_n) définie pour tout naturel n par $u_n = 2 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ est géométrique. Précisez son premier terme et sa raison.

2. Placez dans un repère orthogonal les douze premiers points de la représentation graphique de (u_n) (unités : 1 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée).

3. Tracez dans ce repère une représentation de la fonction $f : x \mapsto 2 \times \left(\dfrac{3}{4}\right)^x$.

27 **Augmentation de population**

Le 1er janvier 2012, la population d'un pays s'élevait à 30 millions d'habitants. On estime que l'augmentation de la population pour les quinze années à venir sera de 2 % par an.

1. Calculez la population au 1er janvier 2013, puis au 1er janvier 2022.

Les résultats seront donnés en millions et arrondis à 10^{-3}.

2. Quelle est l'augmentation en pourcentage entre la population au 1er janvier 2012 et la population au 1er janvier 2022 ?

Le résultat sera arrondi à 0,1 %.

3. À l'aide de la calculatrice, déterminez l'année à partir de laquelle la population dépassera 36 millions d'habitants.

4. Représentez la fonction $f : x \mapsto 1{,}02^x$ et retrouvez le résultat de la question **3.**.

TRANSFORMATION D'EXPRESSIONS

28 q est un réel positif. Simplifiez chacune des expressions suivantes :

$$A = \left(\frac{1}{q^{0,3}}\right)^{-2} ;\quad B = \left(\frac{1}{q^2}\right)^{-\frac{1}{4}} \times q ;\quad C = \frac{q^{\frac{2}{3}}}{q^{\frac{1}{6}}}.$$

29 q est un réel positif.

Simplifiez chacune des expressions suivantes :

$$A = \sqrt{\sqrt{q}} ;\quad B = \left(q^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{4}} ;\quad C = q^{\frac{1}{2}} \times \left(q^2\right)^3.$$

30 q est un réel positif.

Simplifiez chacune des expressions suivantes.

$$A = \left(\frac{1}{q}\right)^{\frac{2}{3}} \times q^{\frac{2}{3}} ;\quad B = \frac{\left(q^2\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(q^3\right)^{\frac{1}{2}}}{q^{\frac{1}{6}}} ;\quad C = \left((q^{-0,2})^2\right)^3 \times q^{0,4}.$$

31 Simplifiez les expressions suivantes :

$$A = \frac{e^3 \times e^{-1}}{e^7} ;\quad B = \frac{\left(e^{-2}\right)^3 \times e^{-5}}{\left(e^2\right)^2} ;\quad C = \frac{1}{e^{0,3}} \times \frac{1}{e}.$$

32 Simplifiez les expressions suivantes :

a) $\dfrac{e^{7x} \times e^x}{e^8}$ b) $\dfrac{e^{7x} \times e^{-7}}{e^x}$;

c) $\dfrac{1}{e^{3x+1}} \times e^{-x-3}$.

33 Vérifiez les égalités suivantes :

a) $(e^x + 1)(e^x - 1) = e^{2x} - 1$;

b) $(e^x + 1)^2 = e^{2x} + 2e^x + 1$;

c) $(e^{x-3} - 2)(e^x + 1) = e^{2x-3} + e^{x-3} - 2e^x - 2$.

34 Vérifiez les égalités suivantes :

a) $e^{1-x} \times e^{3x-2} = \dfrac{1}{e} e^{2x}$;

b) $(e^x - e^{-x})^2 = e^{2x} + \dfrac{1}{e^{2x}} - 2$;

c) $\dfrac{90}{2 + e^{-x}} = 90 \times \dfrac{e^x}{2e^x + 1}$.

35 Vérifiez que pour tout réel x :

$$\frac{2,5}{e^{0,5x-1}} + 2e \times \frac{0,5x}{e^{0,5x}} = (2,5 + x)e^{-0,5x+1}.$$

36 Rangez, sans utiliser la calculatrice, dans l'ordre croissant les nombres :

$$A = 2e^{-50} ;\quad B = -2e^{\frac{3}{2}} ;\quad C = -2e^{\sqrt{3}}.$$

37 Comparez, sans l'aide de la calculatrice, les nombres :

$$A = e^{5\pi+2} ;\quad B = \frac{e^{5\pi}}{e^{-3}} ;\quad C = \left(e^{5\pi}\right)^2.$$

38 Comparez, sans l'aide de la calculatrice, les nombres :

$$A = \frac{e^5}{-e^\pi + 1} \quad \text{et} \quad B = \frac{e^{\frac{11}{2}}}{-e^\pi + 1}.$$

39 Comparez, sans l'aide de la calculatrice, les nombres :

$$A = \frac{e^\pi + 1}{2 - e} \quad \text{et} \quad B = \frac{e^3 + 1}{2 - e}.$$

ÉQUATIONS – INÉQUATIONS – SYSTÈMES

Pour les exercices 40 à 43

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations :

40 a) $2^x = 8$; b) $2^x = 4^{x+1}$.

41 a) $0{,}81^{x+1} = 1$; b) $1{,}39^{2x} = 1$.

42 a) $27 \times 3^x = 3^{2-x}$; b) $3^{x^2} = 9$.

43 a) $(2^x + 1)(2^x - 1) = 0$; b) $2^x(2^{2x} - 1) = 2^x$.

Pour les exercices 44 à 47

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations :

44 a) $e^{x+1} = 1$; b) $e^{2x+1} = e$.

45 a) $e^{3x-1} = e^x$; b) $(e^x + 1)^2 = 1$.

46 a) $e^{x(x+1)} = 1$; b) $e^{x-3} = e^{2-3x}$.

47 a) $e^{5x} = e^{(x^2+1)}$; b) $e^x = \dfrac{1}{e^{x+1}}$.

Pour les exercices 48 à 51

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les inéquations :

48 a) $1{,}25^{x-1} < 1{,}25$; b) $4{,}1^{3x} < 4{,}1^{x+1}$.

49 a) $0{,}72^x \leqslant 0{,}72$; b) $0{,}72^{3x} < 0{,}72^{x+1}$.

50 a) $2^{3x} < 4^{2x+1}$; b) $27^{-x} \geqslant 3^{x+2}$.

51 a) $\left(0{,}25^x + 1\right)^2 > 1$; b) $(0{,}25^x + 1)(0{,}25^x - 1) \leqslant 0$.

Pour les exercices 52 à 55

Résolvez les inéquations :

52 a) $e^{3x-1} \leqslant e^{2x}$; b) $e^{x+1} > 1$.

53 a) $e^{x^2} > 1$; b) $e^{x^2} \leqslant e^4$.

54 a) $(e^x + 1)(e^x - 1) < 0$; b) $e^{2x} - e^{x+1} \geqslant 0$.

55 a) $e^{x^2} > e^{2x^2-x}$; b) $e^{x-1} > \dfrac{1}{e^x}$.

Pour les exercices 56 et 57

Résolvez les systèmes proposés :

56 a) $\begin{cases} 3 \times 2^x + 4 \times 2^y = 10 \\ 2^x - 2^y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^x + 2^y = 6 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{cases}$

57 a) $\begin{cases} 2 \times 2^x - \dfrac{1}{4} \times 4^y = 3 \\ \dfrac{1}{2} 2^x + \dfrac{1}{16} \times 4^y = \dfrac{5}{4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3^x + 3 \times 2^y = 15 \\ 3 \times 3^x - 2^y = 5 \end{cases}$

58 Résolvez les systèmes proposés :

a) $\begin{cases} e^x + 3e^y = 1 + 3e \\ -3e^x + 2e^y = 2e - 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2e^x - e^y = 2 - \dfrac{1}{e} \\ e^x + 3e \times e^y = 4 \end{cases}$

DÉRIVÉES DE FONCTIONS AVEC $x \mapsto e^x$

Pour les exercices 59 à 67
Précisez l'ensemble de définition de la fonction indiquée et calculez sa dérivée.

59 **a)** $f : x \mapsto 3x^2 - e^x$; **b)** $f : x \mapsto e^x + 2$.

60 **a)** $f : x \mapsto \dfrac{1}{e^x}$; **b)** $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} + 3e^x$.

61 **a)** $f : x \mapsto xe^x$; **b)** $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x}$.

62 **a)** $f : x \mapsto \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$; **b)** $f : x \mapsto \dfrac{x}{e^x - 1}$.

63 **a)** $f : x \mapsto 3 + \dfrac{2e^x}{e^x - 1}$; **b)** $f : x \mapsto (e^x)^2$.

64 **a)** $f : x \mapsto (x^2 - 3x)e^x$; **b)** $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x}{e^x}$.

65 **a)** $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{2}(x^2 - 1)$; **b)** $f : x \mapsto \dfrac{e^x + 2}{1 - e^x}$.

66 **a)** $f : x \mapsto \sqrt{x} + 3e^x$; **b)** $f : x \mapsto \dfrac{x(1 - e^x)}{e^x}$.

67 **a)** $f : x \mapsto e^x\sqrt{1 - x}$; **b)** $f : x \mapsto e^x\sqrt{x}$.

68 On considère les fonctions f et g définies pour $x \neq 0$ par :
$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$
1. a) Représentez dans un même repère orthonormal, les fonctions f et g.
b) Donnez un encadrement par deux entiers naturels consécutifs de l'abscisse du point d'intersection des deux courbes.
2. On pose $d(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$. Calculez la dérivée $d'(x)$.
3. Étudiez les variations de d sur $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$ et dressez son tableau de variation sur $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$.
4. Montrez que l'équation $d(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2} ; 1\right]$. Donnez un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
5. En déduire le signe de $d(x)$ suivant les valeurs de x.
6. Comparez avec les résultats du **1.b)**.

69 f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f : x \mapsto (x - 1)e^x \quad \text{et} \quad g : x \mapsto \frac{e}{2}(x^2 - 1).$$
1. À l'aide d'un logiciel de tracé de courbes ou de votre calculatrice, vérifiez que les courbes représentatives de f et de g semblent admettre une tangente commune au point d'abscisse 1.
2. Calculez $f'(x)$ et $g'(x)$.
3. Démontrez que les représentations graphiques de f et de g dans un même repère admettent une tangente commune au point d'abscisse 1.

70 f est la fonction définie sur $]-\infty ; 2[$ par $f(x) = \dfrac{2e^x}{2 - x}$ et $\mathscr{C}$ une représentation graphique de f.
1. Calculez $f'(x)$ et étudiez son signe.
2. Dressez le tableau de variation de f.
3. Tracez $\mathscr{C}$.

FONCTIONS $x \mapsto e^{u(x)}$

71 Calculez la dérivée des fonctions suivantes :
a) $f : x \mapsto 5e^{-x} + x^2$;
b) $g : x \mapsto e^{3x-4}$;
c) $h : x \mapsto e^{x^2 - x} + \dfrac{3}{4}x^4$.

72 Pour chacune des fonctions suivantes, calculez la dérivée puis dressez le tableau de variation.
a) $f : x \mapsto e^{-x} + 2$;
b) $f : x \mapsto e^{-x} - e^x$;
c) $f : x \mapsto \dfrac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}$.

73 Étudiez les variations des fonctions suivantes et donnez l'allure de leur courbe représentative.
a) $f : x \mapsto \dfrac{e^{1-x}}{x^2 + 1}$;
b) $f : x \mapsto xe^{x^2}$;
c) $f : x \mapsto \dfrac{e^{x+1}}{x}$.

74 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2 - 2x}$.
1. Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variation.
2. Tracez la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

ÉTUDES DE FONCTIONS

75 f et g sont deux fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ par :
$$f(x) = 8e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^x + 7.$$
1. Étudiez les variations de f et de g.
2. Tracez les représentations graphiques $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et de g dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 5 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée).
3. Précisez les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$.

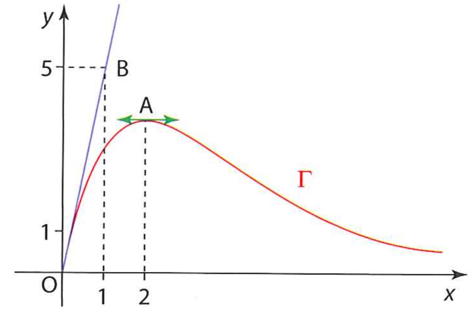
76 f est la fonction définie sur $]-1 ; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + x}$, et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique.
1. a) Calculez $f'(x)$ et étudiez son signe.
b) Dressez le tableau de variation de f.
2. Donnez l'allure de la courbe $\mathscr{C}$.

77 **Chaînette**
f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$
1. Déterminez les dérivées des fonctions f et g, puis exprimez f' en fonction de g et g' en fonction de f. Dressez leur tableau de variation.
2. Que représente la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$h(x) = f(x) + g(x) \,?$$
3. Montrez que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = \dfrac{e^{2x} + 1}{2e^x}$ et que $g(x)$ peut s'écrire $g(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{2e^x}$.
4. Déterminez les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives de f et de g avec les axes du repère.
5. Montrez que $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$.
6. Tracez les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Remarque. *Les fonctions f et g sont des fonctions de référence en mathématiques, respectivement appelées **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique**.*

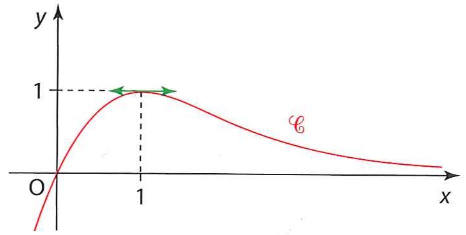
***Un pont himalayen.** Un câble fixé à ses deux extrémités, prend naturellement la forme d'une **chaînette**, courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.*

78 Le graphique ci-dessous donne, dans un repère orthogonal, la courbe représentative Γ d'une fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ et dérivable sur cet intervalle.
On précise que :
– l'origine O du repère appartient à Γ ;
– la droite D passant par O et par le point B de coordonnées (1 ; 5) est tangente en O à Γ ;
– la tangente au point A d'abscisse 2 de Γ est parallèle à l'axe des abscisses.



1. En utilisant le graphique et les renseignements donnés ci-dessus :
a) Précisez $f(0)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
b) Précisez le sens de variation de f ; dressez son tableau de variation.
2. On suppose que la fonction f est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = (ax + b)e^{cx}$, où a, b, c sont trois réels.
a) En utilisant $f(0)$, calculez b.
b) Calculez $f'(x)$.
c) En utilisant $f'(0)$ et $f'(2)$, calculez a et c.

79 Le graphique ci-dessous donne, dans un repère orthonormal, la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On suppose que f est définie par $f(x) = xe^{ax+b}$, où a et b sont deux réels.
En utilisant le graphique, calculez a et b.



80 f est la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x(e^x + a) + b$ où a et b sont deux constantes réelles.
Les renseignements connus sur f sont donnés dans le tableau de variation ci-dessous.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$

1. Calculez $f'(x)$ en fonction de a.
2. Déterminez a et b en vous aidant des informations contenues dans le tableau ci-dessus.

81 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(e^{-x} + 1)$.
On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan (unité graphique : 2 cm).

Partie A

g est la fonction définie, pour tout réel x, par :

$$g(x) = e^{-x}(1 - x) + 1.$$

1. Étudiez les variations de g puis dressez son tableau de variation.

2. Déduisez-en le signe de $g(x)$ pour tout réel x.

Partie B

1. Calculez $f'(x)$.
À l'aide de la question **A.2.** dressez le tableau de variation de f.

2. Déterminez une équation de la tangente T_0 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3. Tracez $\mathscr{C}$ et T_0.

82 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.
Déterminez les deux réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax + b)e^{-x}$ admette la fonction f pour fonction dérivée.

83 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x} - x - 1$.

1. Déterminez la fonction dérivée de f.

2. Résolvez $f'(x) > 0$.

3. Déduisez-en le tableau de variation de f.

4. Après avoir calculé $f(0)$ donnez le signe de f pour $x \in \mathbb{R}$.

84 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x - 1 + \dfrac{2}{e^{x} + 1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, d'unité 2 cm.

1. Montrez que pour tout x, $f'(x) = \dfrac{e^{2x} + 1}{(e^{x} + 1)^2}$.

2. Déduisez-en le sens de variation de f.

3. Déterminez une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

4. Représentez f.

85 f est la fonction définie sur $[0\,;50]$ par :

$$f(x) = (x - 15)^2 e^{-\frac{x}{3}}.$$

On note f' la fonction dérivée de f sur $[0\,;50]$.

1. Montrez que $f'(x) = \dfrac{1}{3}(x - 15)(21 - x)e^{-\frac{x}{3}}$.

2. Étudiez le signe de f' sur $[0\,;50]$.

3. Dressez le tableau de variation de f sur $[0\,;50]$.

86 **Éléphantes africaines**
On connaît la fonction de croissance qui donne approximativement la masse $f(t)$ en kg, à l'âge de t années, des éléphantes africaines. Son expression est :

$$f(t) = 2\,600(1 - 0{,}51e^{-0{,}075t})^3.$$

On l'appelle *fonction de Von Bertalanffy*.

1. Évaluez la masse en kilogrammes d'un nouveau-né, d'une éléphante de 4 ans, de 10 ans.

2. Calculez la dérivée de f à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

2. Construisez le tableau de variation de f sur $[0\,;80]$.

3. Construisez la courbe de croissance d'une éléphante africaine sur $[0\,;80]$.

87 **Prix d'équilibre. Notion d'élasticité**
On appelle *élasticité de y par rapport à x*, la fonction $x \mapsto x\dfrac{y'}{y}$ où y' est la fonction dérivée de y. On la note $E_{\frac{y}{x}}$.

1. Calculez $E_{\frac{y}{x}}$ pour chacune des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto y = ax + b$;

b) $x \mapsto y = e^{x}$.

c) $x \mapsto y = e^{ax+b}$.

2. On considère un produit pour lequel, en fonction du prix unitaire p (en euros) la demande est donnée par $f(p) = (2{,}5 + p)e^{-0{,}5p+1}$ et l'offre par $g(p) = 0{,}3p + 1$.

a) Construisez dans un même repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ les représentations graphiques de f et de g (unité graphique : 1 cm) sur $[0\,;10]$.

b) On pose pour tout p de $[0\,;10]$, $h(p) = f(p) - g(p)$.
Montrez que pour tout $p \in [0\,;10]$, $h'(p)$ est strictement négatif.

c) Déduisez-en que l'équation $h(x) = 0$ admet dans $[0\,;10]$ une solution unique notée p_0 et donnez un encadrement de p_0 d'amplitude 10^{-2}.

d) Donnez une interprétation économique de p_0.

e) Vérifiez que pour un prix de 3,10 €, si le prix augmente de 1 %, la demande diminue de 1 % environ.

3. La fonction E, appelée **élasticité de la demande**, est définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par $E(x) = x\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

a) Vérifiez que, pour tout x de $[0\,;10]$, $E(x) = \dfrac{-0{,}5x^2 - 0{,}25x}{x + 2{,}5}$.

b) Résolvez dans $[0\,;10]$ l'équation $E(x) = -1$.

c) Donnez une valeur approchée à 10^{-2} par défaut de la solution.

Remarque. *L'élasticité de la demande est un concept économique qui permet de mesurer le degré de sensibilité de la demande aux variations de prix (élasticité-prix). Une élasticité de −1 signifie qu'une augmentation des prix de 1 % diminue la quantité demandée de 1 %.*

88 **BAC** **Coût de fabrication**
Une entreprise fabrique chaque mois x tonnes d'un certain produit, avec x appartenant à l'intervalle $]0\,;6]$. Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros pour une production mensuelle de x tonnes est donné par $C(x)$, où C est la fonction définie par :

$$C(x) = \frac{0{,}01e^{x} + 2}{x}.$$

1. À l'aide de la calculatrice :

a) conjecturez en terme de variations l'évolution du coût moyen de fabrication sur l'intervalle $]0\,;6]$;

b) estimez le minimum du coût moyen de fabrication et la production mensuelle correspondante ;

c) dites s'il est possible d'atteindre un coût moyen de fabrication de 4 000 euros. On précisera la méthode utilisée.

2. On désigne par C′ la fonction dérivée de la fonction C. Montrez que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;6]$:

$$C'(x) = \frac{0{,}01xe^{x} - 0{,}01e^{x} - 2}{x^2}.$$

3. On considère la fonction f définie sur $]0\,;6]$ par :

$$f(x) = 0{,}01xe^{x} - 0{,}01e^{x} - 2.$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f.

a) Vérifiez que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;6]$, $f'(x) = 0{,}01xe^{x}$.

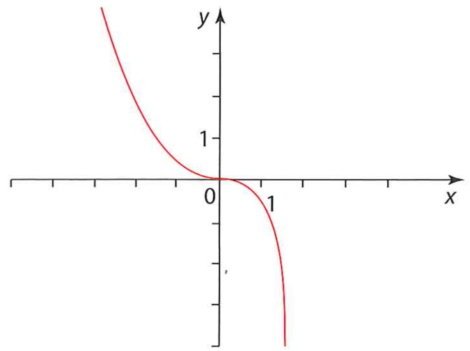
b) Justifiez que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;6]$.

c) Justifiez que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α appartenant à l'intervalle $[4\,;5]$.
Donnez la valeur arrondie au dixième du nombre réel α.

d) Déduisez des résultats précédents le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;6]$.

4. À l'aide des questions précédentes, justifiez que le minimum du coût moyen de fabrication est obtenu pour une production mensuelle de α tonnes du produit.

89 **BAC** On considère la fonction numérique f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait : $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - x^2e^{x-1}$. On note f' sa fonction dérivée.
Le graphique ci-après est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthogonal.



1. Quelle conjecture pourrait-on faire concernant le sens de variation de f sur l'intervalle $[-3\,;2]$ en observant cette courbe ?
Dans la suite du problème, on va s'intéresser à la validité de cette conjecture.

2. Calculez $f'(x)$ et vérifiez que $f'(x) = xg(x)$ où :

$$g(x) = 1 - (x + 2)e^{x-1} \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

3. Étude du signe de $g(x)$ suivant les variations de x.

a) Calculez $g'(x)$ et étudiez son signe suivant les valeurs du nombre réel x.

b) En déduire le sens de variation de la fonction g, puis dressez son tableau de variation.

c) Montrez que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Justifiez que $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$.

d) Déterminez le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

4. Sens de variation de la fonction f.

a) Étudiez le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f.

c) Que pensez-vous de la conjecture de la question **1.** ?

90 **BAC** On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.
On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$.
On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

x	2		3		10		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de f	$-\infty$	↗	6	↘	−5	↗	3

On suppose de plus que $f(5) = 0$, que $f'(5) = -2$ et que $f(2,5) = 0$.

1. À l'aide du tableau, répondre aux questions suivantes. Aucune justification n'est demandée.

a) Donnez une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 3.

b) Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$ sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$?

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]2\,;+\infty[$ par $g(x) = e^{f(x)}$.

a) Calculez $g(5)$.

b) Déterminez le sens de variation de g sur l'intervalle $[3\,;10]$, en justifiant la réponse.

c) Déterminez une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse 5.

91 BAC **1.** Dans cette question aucune justification n'est demandée.

On souhaite tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f satisfaisant les conditions suivantes :

– la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;6]$;

– le maximum de la fonction f est 5, il est atteint pour $x = 0$;

– le minimum de la fonction f est 1 ;

– la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;6]$.

On note f' la fonction dérivée de f et on sait que $f'(0) = -3$, $f(6) = 3$ et $f'(6) = 2$.

Le signe de la fonction dérivée f' de f est donné par le tableau suivant :

x	0		4		6
Signe de $f'(x)$		−	0	+	

a) Dressez le tableau de variations de la fonction f.
On fera figurer dans le tableau les images par f de 0, de 4 et de 6.

b) Donnez l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 6.

c) Tracez dans un repère la courbe représentative d'une fonction satisfaisant toutes les conditions ci-dessus.
On placera les points d'abscisses 0, 4, 6 et on tracera les tangentes à la courbe en ces points.

2. Dans cette question toute réponse doit être justifiée.
On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;6]$ par $g(x) = e^{f(x)}$.

a) Déterminez le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0\,;6]$.
Dressez le tableau de variation de la fonction g.
On précisera les valeurs de $g(0)$, $g(4)$ et $g(6)$.

b) Déterminez $g'(0)$.

92 BAC **Réserves de pétrole**

Certains scientifiques estiment que les futures découvertes de pétrole dans le monde peuvent être modélisées, à partir de l'année 2011, grâce à la fonction f définie sur l'intervalle $[11\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 17\,280e^{-0{,}024x}$$

de sorte que $f(x)$ représente, en billions de barils (millions de millions de barils), l'estimation de la quantité de pétrole qui sera découverte au cours de l'année $2000 + x$.

1. Calculez l'estimation du nombre de barils de pétrole à découvrir en 2011 d'après ce modèle (on arrondira le résultat au billion près).

2. a) Étudiez les variations de la fonction f sur l'intervalle $[11\,;+\infty[$.

b) Dressez son tableau de variations.

3. Selon ce modèle, peut-on envisager qu'au cours d'une même année, 15 000 billions de barils de pétrole soient découverts ?
Si oui, déterminez, en justifiant, cette (ces) année(s). Si non, justifiez la réponse.

4. Selon ce modèle, peut-on envisager qu'au cours de chaque année à partir de 2011, au moins 6 000 billions de barils de pétrole soient découverts ?
Si oui, justifiez la réponse.
Si non, déterminez, en justifiant, l'année pour laquelle les découvertes de pétrole deviendront strictement inférieures à 6 000 billions de barils.

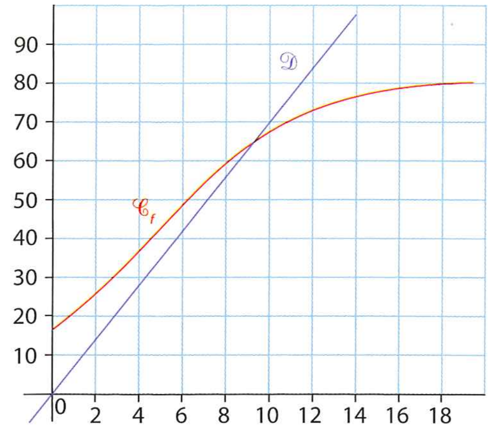
93 BAC **Thermomètres pour bébés**

A. Étude d'une fonction

Soit f la fonction dérivable définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{80}{1 + 4e^{-0{,}3x}}$.

Dans un repère orthogonal, on note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et $\mathscr{D}$ la droite d'équation $y = 7x$.

On admet que la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\mathscr{D}$ se coupent en un seul point d'abscisse x_0 et on donne $x_0 \approx 9{,}02$.



1. Calculez $f(0)$ et la valeur arrondie au centième de $f(20)$.

2. Démontrez que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3. Montrez que pour tout x appartenant à $[0\,;+\infty[$, on a $f(x) < 80$. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = 80$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

4. À l'aide du graphique, déterminez, selon les valeurs de x, le signe de $7x - f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

B. Interprétation économique

Une entreprise peut produire chaque jour au maximum 2 000 thermomètres de bain pour bébé.

On note x le nombre de centaines de thermomètres produits chaque jour travaillé, x appartenant à l'intervalle $[0\,;20]$.

On suppose que le coût total de production par jour, exprimé en centaines d'euros, est égal à $f(x)$, où f est la fonction définie dans la **partie A**.

1. Déterminez le montant des « coûts fixes », c'est-à-dire le montant des coûts lorsque la quantité produite est nulle.

2. Le coût total de production des thermomètres peut-il atteindre 8 100 € par jour ? Justifiez.

3. Le prix de vente d'un thermomètre est fixé à 7 €. La recette journalière exprimée en centaines d'euros, est donc donnée par $R(x) = 7x$.
Pour quelles productions journalières de thermomètres l'entreprise réalise-t-elle un bénéfice ? Justifiez.

POUR LA LOGIQUE

Pour les exercices 94 et 95

Pour chacune des propriétés suivantes dites si elle est vraie ou fausse et justifiez votre réponse.

94 On note E l'ensemble des réels x tels que $(e^x)^2 = e^{2x}$.

1. $E = \mathbb{R}$.

2. $E \subset [0\,;+\infty[$.

3. $[0\,;+\infty[\subset E$.

4. $]-\infty\,;0] \cup [0\,;+\infty[\subset E$.

5. $E \cap]1\,;+\infty[\subset [1\,;+\infty[$.

95 **1.** $\exists x \in]-\infty\,;0[$ tel que $e^x \geqslant 1$.

2. $\exists x \in]-\infty\,;0]$ tel que $e^x \geqslant 1$.

3. $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $e^x \geqslant 1$.

96 Démontrez que la propriété indiquée est fausse :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \neq x + 1$.

2. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{2} \times e^x = 0$.

Un peu d'histoire

Chercheurs d'hier

▸ Grégoire de Saint-Vincent et l'exponentielle

Une fois établi le calcul différentiel, la fonction exponentielle est devenue la fonction essentielle des mathématiques.

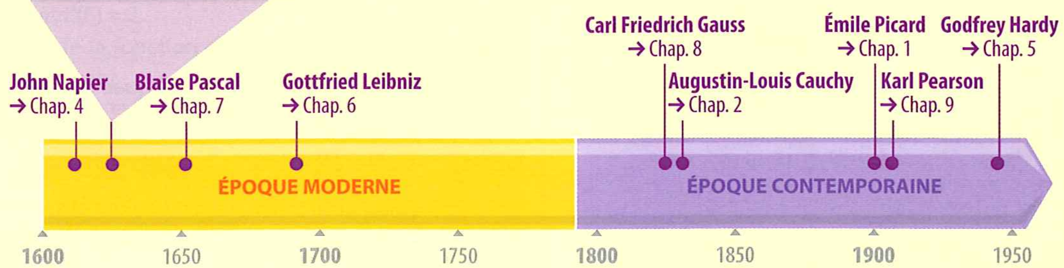
En effet, cette fonction est égale à sa dérivée. La fonction exponentielle est donc un modèle pour bien des phénomènes, par exemple les phénomènes de diffusion, lorsque la vitesse de diffusion est proportionnelle à la concentration. Cela permet en particulier la description de l'effet d'un médicament.

Gregoire de Saint-Vincent
1584 - 1667

C'est avec le *Traité des infiniment petits* de Léonard Euler en 1748 qu'apparaît une définition de la fonction exponentielle.

Bien plus tôt, sans doute vers 1625, une définition rigoureuse de a^b fut obtenue par Grégoire de Saint-Vincent pour des nombres positifs a et b quelconques.

Grégoire de Saint-Vincent entre très jeune dans la Compagnie de Jésus, et se forme au Collège jésuite de Rome, où il devient un élève de Clavius (l'inspirateur du calendrier grégorien décidé en 1582 et qui fixa l'année tropique à 365,242 jours). Grégoire a trouvé des résultats nouveaux et corrects, comme Newton et Leibniz le reconnaissent : par exemple, une définition de l'exponentielle. Il a aussi défini le logarithme naturel comme primitive de la fonction $\frac{1}{x}$.



À la même époque

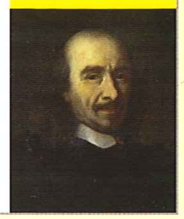
Richelieu
(1585 - 1642)

En France

Principal ministre de Louis XIII, Richelieu sera l'artisan de la montée en puissance de la France en Europe et d'une conception de l'État-nation reposant sur l'autorité de l'institution monarchique.

À la même époque

Pierre Corneille
(1606 - 1684)



En Littérature

Le Cid est représenté pour la première fois en 1637. La pièce connaît un grand succès et vaut à Corneille d'être anobli, malgré les vives polémiques qu'elle a suscitées.

Sur le Web
http://serge.mehl.free.fr/chrono/GregoireStVincent.html
http://www.gap-system.org/~history/Biographies/Saint-Vincent.html

Accompagnement personnalisé

Soutien

Utilisation de la propriété AB = 0 ⇔ A = 0 ou B = 0

97 On se propose de résoudre l'équation :
$$e^x(e^x - 1) = 0.$$

➡ *L'équation se présente sous la forme AB = 0.*
On utilise la propriété importante suivante :
$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

1. Expliquez pourquoi $e^x(e^x - 1) = 0$ équivaut à $e^x = 0$ ou $e^x = 1$.

➡ *Il est utile de connaître la courbe représentative de la fonction exponentielle.*
• La courbe ne coupe jamais la droite des abscisses. Donc e^x ne s'annule jamais.
• $e^0 = 1$ et 0 est le seul réel dont l'image est 1.

2. Résolvez l'équation $e^x(e^x - 1) = 0$.

98 On se propose de résoudre l'équation :
$$(x^2 - 4)\, e^{2x} = 0.$$

➡ *L'équation se présente sous la forme AB = 0. On utilise la propriété importante suivante :*
$AB = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$.

1. Expliquez pourquoi $(x^2 - 4)\, e^{2x} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ ou $e^{2x} = 0$.

➡ *Il faut savoir que e^a ne s'annule pour aucune valeur de a.*

2. Résolvez l'équation $(x^2 - 4)\, e^{2x} = 0$.

➡ *Attention ! L'équation $x^2 - 4$ admet comme solution $x = 2$ mais ce n'est pas la seule. Pour bien le comprendre, remarquez que $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$.*

Équation du type $e^{u(x)} = e^{v(x)}$

99 On se propose de résoudre l'équation : $e^{5x} = e^{x^2}$.

➡ *On utilise la propriété fondamentale suivante :*
$e^{u(x)} = e^{v(x)}$ équivaut à $u(x) = v(x)$.

1. Expliquez pourquoi $e^{5x} = e^{x^2}$ équivaut à $5x = x^2$.

➡ *Attention ! On pourrait être tenté de simplifier par x et d'écrire $5x = x^2$ équivaut à $5 = x$.*
Ceci est faux car si $x = 0$, on ne peut simplifier par x.

2. Expliquez pourquoi $5x = x^2 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0$.

3. Résolvez l'équation proposée.

100 On se propose de résoudre l'équation $e^{5x} = e^{x+1}$.

1. Expliquez pourquoi $e^{5x} = e^{x+1}$ équivaut à $5x = x + 1$.

2. Résolvez l'équation proposée.

Approfondissement

101 **Fonctions f telles que $\forall x, \forall y, f(x + y) = f(x)f(y)$**

On se propose d'étudier quelques propriétés des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous x et y dans $\mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x) \times f(y)$ (R).

➡ *La relation (R) doit faire penser à la propriété fondamentale de la fonction exponentielle.*

1. Démontrez que la fonction $x \mapsto e^x$, et plus généralement les fonctions $x \mapsto e^{ax}$, où a est un réel donné, satisfont à la relation (R).

2. Supposons qu'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfait à la relation (R).

➡ *Au début de la propriété (R) on peut lire : « pour tous x et y dans $\mathbb{R}$ ». Il est utile de penser à particulariser, c'est-à-dire à écrire cette relation pour des valeurs de x et de y judicieusement choisies en fonction de la propriété que l'on veut établir.*
Utilisez ce procédé pour les questions qui suivent.

a) Démontrez que si la fonction f s'annule en un point x_0, alors f est la fonction nulle.

b) Démontrez que $f(0) = 1$.

➡ *Particularisez en prenant $y = 0$ dans la relation (R).*

c) Démontrez que pour tout réel a, $f(a) > 0$.

➡ *Particularisez en prenant $x = y = \frac{a}{2}$ dans la relation (R).*

Commentaire. *On peut démontrer que les seules fonctions f dérivables qui vérifient la relation (R) sont les fonctions $x \mapsto e^{ax}$, avec $a \in \mathbb{R}$.*

102 **Par symétrie**

On considère la fonction $f : x \mapsto x\,e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}$ une représentation graphique de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Étudiez les variations de f.

b) Donnez l'allure de $\mathscr{C}$.

2. g est la fonction dont la représentation graphique se déduit de $\mathscr{C}$ par symétrie de centre O.
Exprimez $g(x)$ en fonction de x.

3. h est la fonction dont la représentation graphique se déduit de $\mathscr{C}$ par symétrie d'axe $(O ; \vec{i})$.
Exprimez $h(x)$ en fonction de x.

EXERCICES

Le jour du BAC

103 Exercice commenté

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant des conseils.

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (x^2 - x + 1)e^{-x}.$$

On note $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal.
On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

1. a) Démontrez que, pour tout nombre réel x,
$f'(x) = (-x^2 + 3x - 2)e^{-x}$.

b) Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'ensemble des nombres réels.

2. Donnez une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en son point d'abscisse 0.

3. On prend comme unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 20 cm sur l'axe des ordonnées.
Tracez la droite (T) et la courbe $(\mathscr{C}_f)$ sur l'intervalle $[0\,;8]$ dans le plan (P).

4. Déterminez graphiquement le nombre de solutions sur l'intervalle $[0\,;8]$ de l'équation $f(x) = 0{,}4$.

Analyser l'énoncé

On reconnaît les étapes d'une classique étude de fonction : calcul de la dérivée, étude des variations, tracé de la courbe représentative.

Conseils

1. a) On utilise la formule :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Nous sommes en présence d'une fonction de la forme $x \mapsto e^{u(x)}$.

b) Pour l'étude du signe de $f'(x)$, n'oubliez pas que, pour tout réel a, $e^a > 0$.

2. On peut utiliser la formule donnant une équation de la tangente à une courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse x_0 :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Ici $x_0 = 0$.

4. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0{,}4$ est égal au nombre de points d'intersection de la courbe $(\mathscr{C}_f)$ et de la droite d'équation $y = 0{,}4$.

Attention !

La dérivée de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ n'est pas égale à $x \mapsto e^{-x}$.

Remarque

Sur l'axe des ordonnées, l'unité est « grande » : on peut contrôler que tous les points de la courbe sont visibles avec les unités choisies dans l'énoncé.

→ Voir les corrigés p. 361

EXERCICES

104 BAC Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions posées, une seule des trois réponses est exacte.
Aucune justification n'est demandée.

1. La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-2x+1}$.
On note f' sa fonction dérivée.

a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-2}$.

b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-2x+1}$.

c) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = -2e^{-2x+1}$.

2. On donne le tableau de variation d'une fonction g définie et continue sur l'intervalle $[-5\,;12]$.

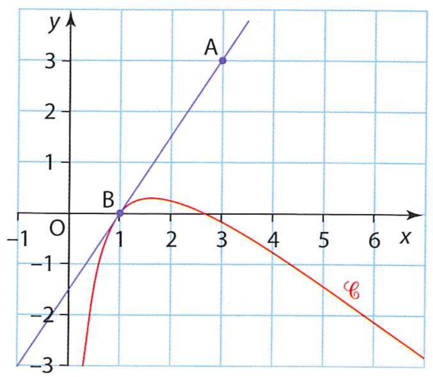
x	-5		2		8		12
$g(x)$	-3	↘	-8	↗	1	↘	0

a) L'équation $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[-5\,;12]$.

b) Pour tout x appartenant à l'intervalle $[-5\,;12]$, $g(x) < 0$.

c) Sur $[-5\,;12]$ f prend une fois et une seule toute valeur de l'intervalle $[f(-5)\,;f(12)]$.

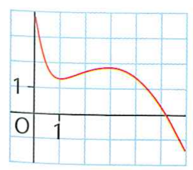
3. La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$. La droite (AB), tracée sur le graphique, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 1.

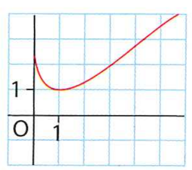


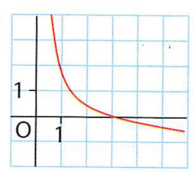
On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

a) $h'(1) = 0$ **b)** $h'(1) = 1{,}5$ **c)** $h'(1) = -\dfrac{2}{3}$.

4. Une seule des trois courbes ci-après est la représentation graphique d'une fonction H dont la dérivée est h. Précisez laquelle.







105 BAC Le but de cet exercice est de déterminer le bénéfice maximum réalisable pour la vente d'un produit « alpha » fabriqué par une entreprise. Toute l'étude porte sur un mois complet de production.
Le coût marginal de fabrication du produit « alpha » par l'entreprise est modélisé par la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1\,;20]$ par :

$$C_m(q) = 4 + (0{,}2q^2 - 2q)e^{-0{,}2q},$$

q étant la quantité exprimée en tonnes et $C_m(q)$ son coût exprimé en milliers d'euros.

1. La fonction coût total est modélisée par la fonction C_T définie sur l'intervalle $[1\,;20]$ par :

$$C_T(q) = 4q - q^2e^{-0{,}2q}.$$

Vérifiez que pour tout $q \in [1\,;20]$, $C'_T(q) = C_m(q)$.

2. La fonction coût moyen, notée C_M, est la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;20]$ par :

$$C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}.$$

a) Vérifiez que $C_M(q) = 4 - qe^{-0{,}2q}$.

b) Déterminez la fonction dérivée C'_M de la fonction C_M.

c) Pour quelle production mensuelle q_0 (exprimée en tonnes) l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal ? Quel est ce coût ? Pour cette production q_0, quelle est la valeur du coût marginal ?

3. On suppose que l'entreprise vend toute sa production mensuelle.
Chaque tonne du produit « alpha » est vendu 4 000 euros.
On désigne par $R(q)$ la recette mensuelle obtenue pour la vente de q tonnes du produit « alpha » et par $B(q)$ le bénéfice mensuel en milliers d'euros ainsi réalisé.
Les représentations graphiques des fonctions recette et coût total sont données ci-dessous.
Estimez graphiquement, en précisant votre démarche, le bénéfice maximal que l'on peut espérer sur le mois étudié.