Chapitre 4 : suites numériques

I Vocabulaire et notations

1. Définition :

Une suite numérique est une liste de nombres réels qui sont numérotés par des entiers naturels, en commençant en général par 0 ou 1.

Exemple : On considère la série de nombres suivants :

3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11

La série précédente compte 5 termes.

Le premier terme de cette liste de valeurs est 3

2 - Suites numériques et fonctions :

a) Définition :

une suite numérique est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels (ou sur une partie de $\mathbb{N}$) et à valeurs dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

une suite est souvent désignée par une lettre ; par exemple u, v, w

$$U : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & U(n) \end{array}$$

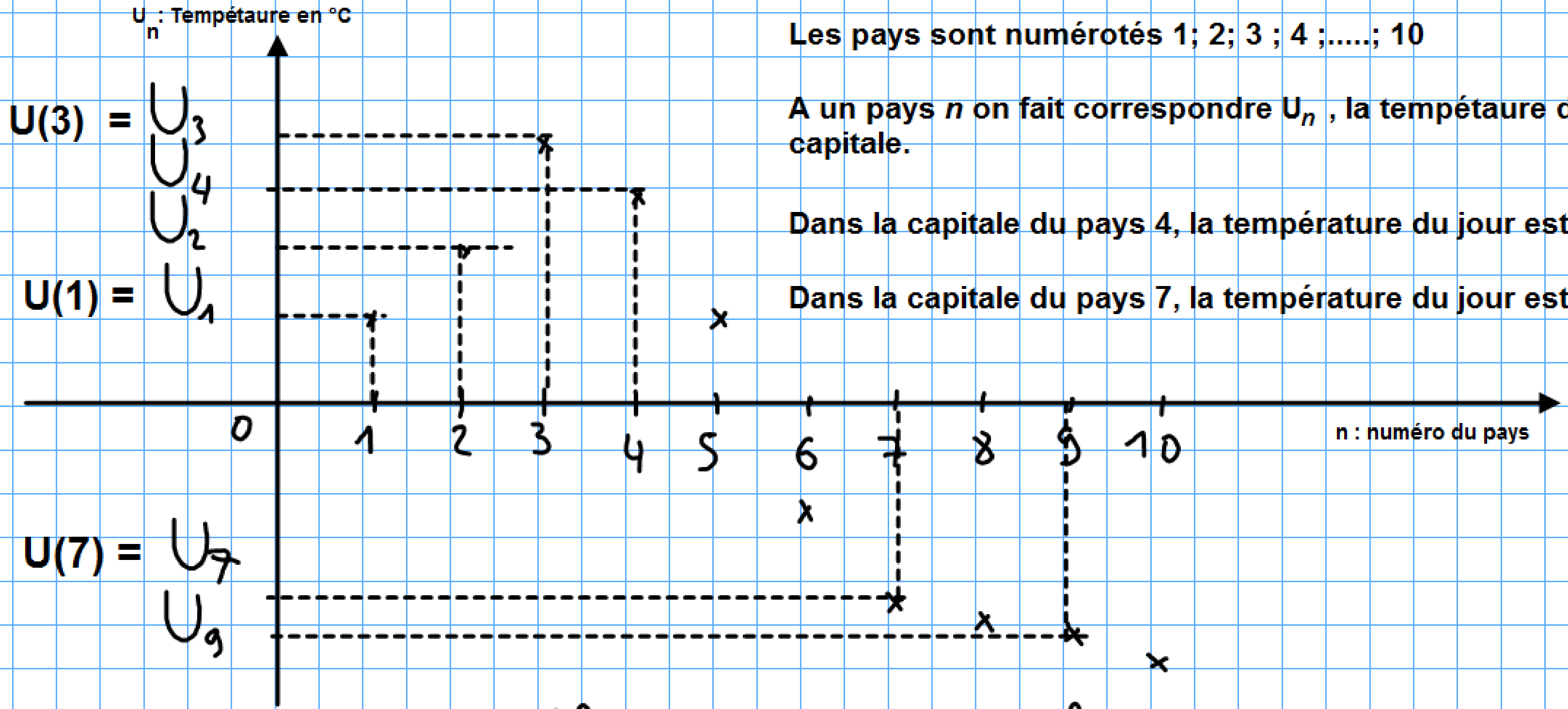
on peut donc calculer $U(0)$, $U(1)$, $U(2)$, mais pas $U(-1{,}27)$ ni $U(3{,}12)$ ou encore $U(-2)$ car $-1{,}27$; $3{,}12$; -2 ne sont pas des nombres entiers naturels. On ne calcule les images que des nombres positifs, sans virgule.

b) Notation d'une suite

$U(n)$ ou encore U_n est le terme général de la suite U notée encore (U_n)

c) représentation graphique : température dans les capitales de différents pays un jours donné

La représentation graphique d'une suite n'est pas une courbe mais un nuage de points.



Les pays sont numérotés 1; 2; 3 ; 4 ;.....; 10

A un pays *n* on fait correspondre U_n , la tempétaure du jour dans sa capitale.

Dans la capitale du pays 4, la température du jour est U_4 = 2,4°C

Dans la capitale du pays 7, la température du jour est U_7 = - 2,2°C

<u>remarque</u> si n est obligatoirement un nombre entier, U_n son image peut tout à fait être un nombre réel (à virgule).

<u>exemple</u> : On considère la suite (U_n) définie par $U(n) = U_n = 3n^2 + n - 1,2$

$U(2) = 3\times(2)^2 + 2 - 1,2 = 3\times4 + 2 - 1,2 = 12,8$

3. Définition d'une suite de façon explicite

On dit qu'une suite est définie de façon explicite lorsque l'on connaît le terme général de la suite, c'est à dire l'expression algébrique de la fonction.
On peut donc calculer un terme de la suite en remplaçant par une valeur de n.

Exemple : On considère la suite (U_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $U_n = n^2 - 5$

Dressons le tableau de valeurs de cette suite : cela consiste à donner des valeurs à la variable n, et à calculer les images successives pour chaque valeur de n.

pour $n = 0$ on a $U_0 = 0^2 - 5 = 0 - 5 = -5$

$U_{0,7}$ n'existe pas car $0,7 \notin \mathbb{N}$

$U_1 = 1^2 - 5 = 1 - 5 = -4$

$U_2 = 2^2 - 5 = 4 - 5 = -1$

$$U_3 = 3^2 - 5 = 9 - 5 = 4$$

$$U_4 = 4^2 - 5 = 16 - 5 = 11$$

$$U_5 = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$$

d) Vocabulaire : U_0 ; U_1 ; U_2 ; U_3 ; U_4 et U_5 sont les 6 premiers termes de la suite (U_n)

0 est le rang du terme U_0.

U_1 est le terme de rang 1

Le terme de rang 5 est U_5.

Le premier terme de la suite est U_0.

U_4 est le 5e terme de la suite.

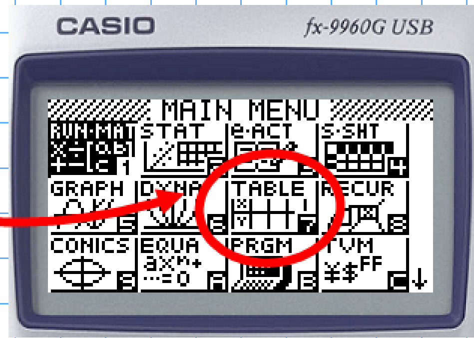
De façon générale, le terme de rang n est U_n.

Remarque : Lorsque la suite est définie de façon explicite, on connaît l'expression de U_n en fonction de n.

Méthode : savoir utiliser sa calculatrice pour générer les différents termes d'une suite $U_n = f(n)$

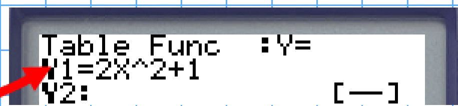
On considère la suite (U_n), $n \in \mathbb{N}$ telle que $U_n = 2n^2 + 1$.

avec la calculatrice en mode TABL …

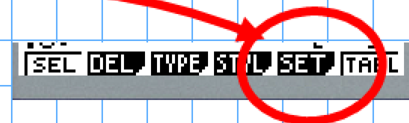


on rentre l'expression algébrique de la fonction associée à la suite (U_n).

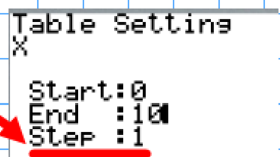
Ici $f(x) = 2x^2 + 1$ …

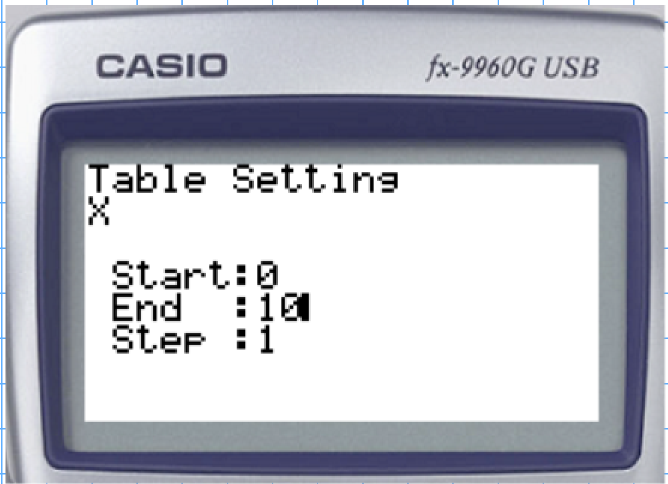


on paramètre la calculatrice …



pour qu'elle génère les images de $x = 0$ à $x = 10$, de 1 en 1





n U_n

X	Y1
0	1
1	3
2	9
3	19
4	33
5	51
6	73
7	99
7	99
8	129
9	163
10	201

d'après le tableau de valeurs, on a :

$U_0 = 1$
$U_1 = 3$
$U_2 = 9$
$U_3 = 19$
⋮
$U_8 = 129$

• quel est le terme de rang 7 ? Combien vaut-il ?

Le terme de rang 7 est $U_7 = 99$.

• quel est le 10^e terme ? Combien vaut-il ?

Le 10^e terme est $U_9 = 163$. U_9 est le 10^e terme, mais c'est le terme de rang 9.

4. Définition d'une suite par récurrence :

Une suite est définie par récurrence, lorsque chaque terme se calcule à partir de la connaissance du terme précédent, et que le premier terme est donné.

exemple : Soit (v_n) la suite définie par : $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = v_n - 3 \end{cases}$

Le 1^{er} terme est v_0 ; le $2^{ème}$ terme est v_1.

Pour obtenir v_1 il faut remplacer n par 0 dans la relation précédente

ainsi $v_1 = v_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

Pour obtenir v_2 il faut remplacer n par 1 ; on a donc

$v_2 = v_1 - 3 = -1 - 3 = -4$; de même $v_3 = v_2 - 3 = -4 - 3 = -7$.

La forme récurrente n'est pas pratique, car pour obtenir v_{28}, il faut calculer tous les termes jusqu'à v_{27} avant de pouvoir écrire que $v_{28} = v_{27} - 3$.

Méthode : compter des intervalles et un nombre de termes.

exemple : $U_7 \longrightarrow U_8 \longrightarrow U_9 \longrightarrow U_{10} \longrightarrow U_{11} \longrightarrow U_{12}$

on dénombre 5 flèches (5 intervalles) en revanche, la suite de nombres de U_7 à U_{12} compte $5+1=6$ termes

de même de U_{35} à U_{48}, on dénombre $48-35=13$ intervalles, mais il y a $13+1=14$ termes.

Suites particulières : Lorsque le mécanisme est toujours le même entre 2 termes consécutifs d'une suite, on a affaire à une suite particulière : arithmétique ou géométrique.

II Suites arithmétiques

1. Définition

Une suite est dite arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même quantité r appelée raison de la suite.

$$\xrightarrow{+7\times 3}$$

exemple :

$$\underset{2}{U_0} \xrightarrow[+r]{+3} \underset{5}{U_1} \xrightarrow[+r]{+3} \underset{8}{U_2} \xrightarrow[+r]{+3} \underset{11}{U_3} \xrightarrow[+r]{+3} \underset{14}{U_4} \xrightarrow[+r]{+3} \underset{17}{U_5} \xrightarrow[+r]{+3} \underset{20}{U_6} \xrightarrow[+r]{+3} \underset{23}{U_7}$$

Pour passer de U_0 à U_7 combien de fois a-t'on ajouté $+3$? On applique le point méthode : il y a donc $7-0=7$ flèches ; donc de U_0 à U_7 on a ajouté 7 fois $(+3)$: $+3+3+3\dots+3 = +7\times 3$

Le schéma indique que $U_7 = U_0 + 7\times r$

2) Forme récurrente

On définit une suite par récurrence lorsque l'on établit le mécanisme permettant de passer d'un terme quelconque au suivant.

$$U_n \xrightarrow{+r} U_{n+1}$$

Pour une suite arithmétique $\boxed{U_{n+1} = U_n + r}$ pour tout n

Méthode : Pour montrer qu'une suite est arithmétique, il suffit d'établir que la quantité $U_{n+1} - U_n$ est constante : elle ne dépend pas de n. Cette quantité correspond à la raison de la suite

Application : On définit la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5, \text{ pour tout } n \end{cases}$

a) Montrer que la suite est arithmétique

b) Calculer U_4

Réponse : pour tout n, $U_{n+1} = U_n + 5$

$U_{n+1} - U_n = 5$: la quantité $U_{n+1} - U_n$ est constante et vaut toujours 5, ce qui prouve que (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = 5$ et de premier terme $U_0 = 2$.

$$U_0 \xrightarrow{+5} U_1 \xrightarrow{+5} U_2 \xrightarrow{+5} U_3 \xrightarrow{+5} U_4 \qquad (+4\times 5 \text{ de } U_0 \text{ à } U_4)$$

$U_1 = U_0 + 5 = 2 + 5 = 7$ $\qquad$ $U_3 = U_2 + 5 = 12 + 5 = 17$

$U_2 = U_1 + 5 = 7 + 5 = 12$ $\qquad$ $U_4 = U_3 + 5 = 17 + 5 = 22$

on remarque que $U_4 = U_0 + 4 \times 5$

3) Sens de variation

Dans une suite arithmétique, si la raison r est strictement positive les termes successifs vont en augmentant : la suite est croissante.

exemple : $U_0 \xrightarrow{+2} U_1 \xrightarrow{+2} U_2 \xrightarrow{+2} U_3 \quad \dots \quad U_n \xrightarrow{+2} U_{n+1}$

$\quad\quad\quad\;\; 5 \qquad\quad 7 \qquad 9 \qquad 11 \qquad\qquad U_n \qquad U_n + 2$

$U_{n+1} > U_n$ la suite est croissante.

- Si la raison est nulle, la suite est constante
- Si la raison est négative, la suite est décroissante

exemple :

$$U_0 \xrightarrow{-2} U_1 \xrightarrow{-2} U_2 \xrightarrow{-2} U_3 \xrightarrow{-2} \dots U_n \xrightarrow{-2} U_{n+1}$$

$$20 \quad 18 \quad 16 \quad 14 \quad \dots \quad U_n \quad U_n - 2$$

Les termes diminuent, la suite est décroissante

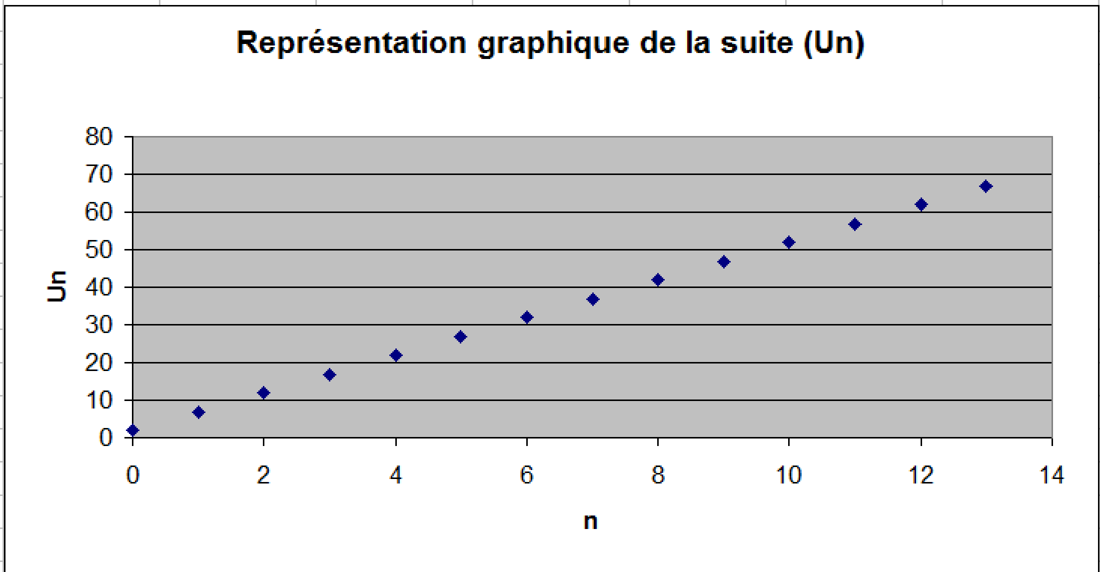
4) représentation graphique :

Le graphique d'une suite arithmétique est un nuage de points alignés.

exemple : On définit la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n + 5, \text{ pour tout } n \end{cases}$

B3 f_x =B2+5

	A	B
1	n	Un
2	0	2
3	1	7
4	2	12
5	3	17
6	4	22
7	5	27
8	6	32
9	7	37
10	8	42
11	9	47
12	10	52
13	11	57
14	12	62
15	13	67



$U_{n+1} = U_n + 5$

5. Forme explicite : expression de U_n en fonction de n

La forme explicite permet de calculer n'importe quel terme de la suite, en connaissant simplement le premier terme et la raison.

- si le 1er terme est U_0.

$$U_0 \xrightarrow{+r} U_1 \xrightarrow{+r} U_2 \xrightarrow{+r} U_3 \xrightarrow{+r} \cdots \xrightarrow{+r} U_n$$

$$U_0 \xrightarrow{\quad + n \times r \quad} U_n$$

$\boxed{U_n = U_0 + n \times r}$ pour tout n (1)

- si le 1er terme est U_1, on enlève une flèche : il en reste donc $n-1$

$\boxed{U_n = U_1 + (n-1) \times r}$ pour tout n (2)

- si le 1er terme est U_p, on enlève une flèche : il en reste donc $n-p$

$\boxed{U_n = U_p + (n-p) \times r}$ pour tout n (3)

III Suites géométriques

1) Définition :

une suite est géométrique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même quantité q appelée raison de la suite.

Cette définition permet de caractériser la suite de façon récurrente

$$U_n \xrightarrow{\times q} U_{n+1}$$

le schéma se lit : $\boxed{U_{n+1} = U_n \times q}$ forme récurrente.

Exemple : placement à intérêts composés

Un ouvrier dépose en 2002 ses économies sur un compte rémunéré à 2,3% par an. Le capital versé lors de l'ouverture du compte est de 1000 €.

On appelle C_n le capital obtenu l'année $(2002 + n)$.

a) à quoi correspondent C_0, C_1, C_2 ?
Calculez C_0, C_1, C_2

b) Montrez que C_0, C_1, C_2 sont les termes d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

c) Par un schéma, conjecturer le mécanisme permettant d'obtenir C_n.

a) C_n est le capital de l'année $(2002+n)$: pour $n=0$, on obtient :

C_0 est le capital de l'année $(2002+0)$ soit l'année 2002.

pour obtenir la signification de C_1, on remplace n par 1 : pour $n=1$

C_1 est le capital de l'année $(2002+1)$ soit l'année 2003

De même, C_2 correspond au capital de l'année $(2002+2)$ soit 2004.

	C_0	$\xrightarrow{+2,3\%}$	C_1	$\xrightarrow{+2,3\%}$	C_2	$\xrightarrow{+2,3\%}$	C_3
	1000 €		1023 €				
en	2002		2003		2004		2005

$$C_0 \xrightarrow{+2,3\%} C_1 \xrightarrow{+2,3\%} C_2 \xrightarrow{+2,3\%} C_3$$

1000 € | 1023€ | 1046,53€ |
en 2002 | 2003 | 2004 | 2005

- Calculons les intérêts perçus en 2003 : ils sont de 2,3% des 1000€ de départ

$$\frac{2,3}{100} \times 1000 = 23€$$

le capital acquis en 2003 est donc de 1023€

$C_1 = 1023€$

- Calculons les intérêts perçus en 2004 : ils sont de 2,3% des 1023€ de 2003

$$\frac{2,3}{100} \times 1023 = 23,53€$$

le capital acquis en 2004 est donc de $1023 + 23,53 = 1046,53€$

$C_2 = 1046,53€$

b) On remarque qu'augmenter de 2,3% revient à multiplier par

$$c = 1 + t = 1 + \frac{2,3}{100} = 1 + 0,023 = 1,023$$

$$\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, "+2,3\%"] \arrow[r, bend left, "\times 1,023"] & C_1 \arrow[r, "+2,3\%"] \arrow[r, bend left, "\times 1,023"] & C_2 \arrow[r, "+2,3\%"] \arrow[r, bend left, "\times 1,023"] & C_3 \end{tikzcd}$$

on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même quantité $q = 1{,}023$ donc (C_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}023$.

c) Pour conjecturer la valeur du capital acquis en $(2002+n)$, on présente un schéma.

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, "+2{,}3\%"] \arrow[r, bend right, "\times 1{,}023"'] \arrow[rr, bend right=50, "\times 1{,}023^2"'] \arrow[rrr, bend right=60, "\times 1{,}023^3"'] \arrow[rrrr, bend right=70, "\times 1{,}023^4"'] \arrow[rrrrr, bend left=40, "\times 1{,}023^n"] & C_1 \arrow[r, "+2{,}3\%"] \arrow[r, bend right, "\times 1{,}023"'] & C_2 \arrow[r, "+2{,}3\%"] \arrow[r, bend right, "\times 1{,}023"'] & C_3 \arrow[r, "+2{,}3\%"] \arrow[r, bend right, "\times 1{,}023"'] & C_4 \arrow[r, dashed, "\dots"] & C_n \arrow[r, "+2{,}3\%"] & C_{n+1}
\end{tikzcd}$$

de C_0 à C_n on dénombre n évolutions, donc le coefficient multiplicateur global va être

$$\underbrace{1{,}023 \times 1{,}023 \times 1{,}023 \times \dots \times 1{,}023}_{n \text{ facteurs}} = 1{,}023^n$$

on a donc établi que $C_n = C_0 \times 1{,}023^n$

Par exemple, pour obtenir le capital acquis en 2025, on utilise la formule explicite précédente dans laquelle on remplace n par 23

En effet C_n est le capital en $2002 + \boxed{n}$, pour obtenir l'année 2025, on fait $2002 + \boxed{23}$: $n = 23$

$$C_{23} = C_0 \times 1{,}023^{23} = 1000 \times 1{,}023^{23} = 1687{,}1 \text{ €}$$

2. Sens de variation d'une suite géométrique

Soit (U_n) une suite géométrique de premier terme $U_0 > 0$ et de raison $q > 0$.

- si $0 < q < 1$: alors la suite (U_n) est décroissante
- si $q = 1$: alors la suite (U_n) est constante.
- si $q > 1$: alors la suite (U_n) est croissante.

3 - Forme explicite d'une suite géométrique : expression de U_n en fonction de n

Pour une suite géométrique (U_n) de premier terme U_0 et de raison q, on a le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd} U_0 \arrow[r, "\times q"'] \arrow[rrrrrr, bend right, "\times q^n"'] & U_1 \arrow[r, "\times q"'] & U_2 \arrow[r, "\times q"'] & U_3 \arrow[r, "\times q"'] & U_4 & \cdots \arrow[r, "\times q"'] & U_n \end{tikzcd}$$

il y a n flèches arrondies

$$\boxed{U_n = U_0 \times q^n}$$

- si le 1er terme de la suite est U_1, alors il y a une évolution de moins et le coefficient multiplicateur global est q^{n-1}

$$\begin{tikzcd} U_1 \arrow[r, "\times q"'] \arrow[rrrrr, bend right, "\times q^{n-1}"'] & U_2 \arrow[r, "\times q"'] & U_3 \arrow[r, "\times q"'] & U_4 & \cdots \arrow[r, "\times q"'] & U_n \end{tikzcd}$$

$$\boxed{U_n = U_1 \times q^{n-1}}$$

- de la même façon, si le 1er terme est U_p on a $\boxed{U_n = U_p \times q^{n-p}}$

exemple : si on connaît U_7 et que l'on cherche U_{12} : $p=7$ $n=12$

$U_{12} = U_7 \times q^5$ $(5 = 12-7)$

$$U_7 \xrightarrow{\times q} U_8 \xrightarrow{\times q} U_9 \xrightarrow{\times q} U_{10} \xrightarrow{\times q} U_{11} \xrightarrow{\times q} U_{12}$$