# Chapitre 9 : Primitives

## I – Notion de primitive

**Définition 1:** On appelle **primitive d'une fonction** $f$ définie sur un intervalle I une fonction $F$ dérivable sur I telle que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathrm{I},\ F'(x) = f(x)$$

Primitive d'une fonction : exemple

La fonction $F : x \mapsto x^2 + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2x$.

La fonction $F$ est une primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction $G : x \mapsto x^2 - 2$ est aussi une primitive de $f$.

**Propriété 1:** Si $F$ est une primitive de $f$ sur I alors toutes les primitives de $f$ sont les fonctions $G$ définies sur I par :

$$\text{Pour tout } x \in \mathrm{I},\ G(x) = F(x) + k\ ,\ k \in \mathbb{R}$$

Primitives d'une fonction : démonstration

**Existence :**
Si $F$ est un primitive de $f$ sur I alors $F$ est dérivable sur I telle que $F'(x) = f(x)$.
Donc $G$ est dérivable sur I telle que $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$
Donc $G$ est une primitive de $f$ sur I.

**Unicité :**
Si $G$ est une primitive de $f$ sur I alors $G$ est dérivable sur I telle que $G'(x) = f(x)$
Donc $G'(x) = F'(x)$ soit $(G - F)'(x) = 0$ donc $G - F$ est une fonction constante soit $(G - F)(x) = k,\ k \in \mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathrm{I}$, $G(x) = F(x) + k$

Conséquence : Il existe une **unique primitive** $G$ de $f$ sur I telle que $G(x_0) = y_0$ , $x_0 \in \mathrm{I}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$.

Calcul d'une primitive particulière : exemple 1

Soit $G$ la primitive de la fonction $f : x \mapsto 2x$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule lorsque $x = 1$.

D'après la propriété 1, Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $G(x) = F(x) + k$ , $k \in \mathbb{R}$

Donc $G(x) = x^2 + 1 + k$

De plus, $G$ s'annule lorsque $x = 1$ c'est-à-dire que $G(1) = 0$.

$$G(1) = 1^2 + 1 + k = 0 \quad \text{donc} \quad k = -2$$

Donc Pour tout $x \in \mathrm{I}$, $G(x) = x^2 + 1 - 2$

Calcul d'une primitive particulière : exemple 2

Soit $H$ la primitive de la fonction $h : x \mapsto \mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule lorsque $x = 0$.
une primitive de $h$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \mathrm{e}^x$
alors toutes les primitives de $h$ sont les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x + k$ , $k \in \mathbb{R}$
Donc $H(x) = \mathrm{e}^x + k$ De plus, $H$ s'annule lorsque $x = 0$ c'est-à-dire que $H(0) = 0$.
$H(0) = 1 + k = 0$ donc $k = -1$ Donc Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $H(x) = \mathrm{e}^x - 1$

## II – Calcul de primitive

| Fonction $f$ | Primitive $F$ | Définie sur I |
|---|---|---|
| $x \mapsto 0$ | $x \mapsto k$ , $k \in \mathbb{R}$ | $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^n$ , $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ | $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ | $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ , $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ | $x \mapsto -\dfrac{1}{(n-1)\,x^{n-1}}$ | $\mathrm{I} = ]-\infty\,;0[ \cup ]0\,;+\infty[$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $x \mapsto \sqrt{x}$ | $\mathrm{I} = ]0\,;+\infty[$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ | $x \mapsto \ln x$ | $\mathrm{I} = ]0\,;+\infty[$ |
| $x \mapsto \mathrm{e}^x$ | $x \mapsto \mathrm{e}^x$ | $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ |

Remarque : Pour vérifier une formule de primitive, il suffit de la dériver.

| Fonction | Primitive (avec $c \in \mathbb{R}$) |
|---|---|
| $u' + v'$ | $u + v + c$ |
| $k\,u'$ | $k\,u + c$ , $k \in \mathbb{R}$ |
| $\dfrac{u'}{u^2}$ | $-\dfrac{1}{u} + c$ |
| $u'u^n$ , $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ | $x \mapsto \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$ |
| $x \mapsto \dfrac{u'}{u^n}$ , $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$ | $x \mapsto \dfrac{-1}{(n-1)\,u^{n-1}} + c$ |
| $x \mapsto \dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ | $2\sqrt{u} + c$ |
| $x \mapsto u'\,\mathrm{e}^u$ | $\mathrm{e}^u + c$ |

Calcul de primitive : exemple

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto (2x+1)^3$ . On appelle $F$ une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$.

On cherche d'abord la formule à appliquer ; ici, c'est la forme $u'u^n$ avec $n = 3$ .

1 - On construit la formule :

On pose $u(x) = 2x+1$ d'où $u'(x) = 2$ et $n = 3$ donc $f = u^n$ .

Pour utiliser la formule, il faut faire apparaître $u'$ dans l'expression de $f$.

$u' \times u^n = 2 \times u^n$ donc $f = u^n = \dfrac{1}{2} \times 2 \times u^n = \dfrac{1}{2} \times \left(u'u^n\right)$

2 - On applique la formule :

$$F = \frac{1}{2} \times \frac{u^{n+1}}{n+1} + c = \frac{1}{2} \times \frac{u^{3+1}}{3+1} + c = \frac{1}{2} \times \frac{u^4}{4} + c = \frac{u^4}{8} + c \quad \text{donc pour tout } x \in \mathbb{R},\ F(x) = \frac{(2x+1)^4}{8} + c$$

3 - Vérification :

$$F'(x) = \frac{1}{8} \times 4 \times (2x+1)^3 \times 2 = (2x+1)^3 = f(x)\,.$$