Savoir-faire

OBJECTIF 2 Connaître une primitive de $x \mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.
Une primitive de $x \mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$ sur I est $x \mapsto e^{u(x)}$.

EXERCICE RÉSOLU D

1. Trouvez une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto (-2x+3)\,e^{-x^2+3x+1}$.

2. Trouvez une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \mapsto 2x^2\,e^{x^3+2}$.

Méthode

1. On essaie de se ramener à une formule de primitive du cours : une primitive de $e^u u'$ est e^u.

2. On utilise à nouveau le fait qu'une primitive de $u'e^u$ est e^u.
On fait apparaître $u'(x)$ dans l'écriture de $g(x)$: $g(x) = \square \times 3x^2 \times e^{x^3+2}$ puis on écrit le coefficient convenable dans la case.

Solution

1. Posons $u(x) = -x^2 + 3x + 1$.
On a $u'(x) = -2x + 3$.
Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction F définie par $F(x) = e^{-x^2+3x+1}$.

2. Posons $u(x) = x^3 + 2$.
On a $u'(x) = 3x^2$.
$g(x) = \dfrac{2}{3} \times 3x^2 \times e^{x^3+2}$.
Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction G définie par $G(x) = \dfrac{2}{3}\,e^{x^3+2}$.

À votre tour

98 Primitive imposée

Pour les fonctions f suivantes, déterminez la primitive F, sur $\mathbb{R}$, telle que $F(x_0) = y_0$.

a) $f(x) = x^2 + 1$ $\quad x_0 = 2 \quad y_0 = 1$

b) $f(x) = e^{3x}$ $\quad x_0 = 0 \quad y_0 = 2$

c) $f(x) = e^{-4x+1}$ $\quad x_0 = \dfrac{1}{4} \quad y_0 = 5$

d) $f(x) = xe^{x^2}$ $\quad x_0 = 1 \quad y_0 = e$

99 Pour les fonctions f suivantes, déterminez la primitive sur I dont la courbe représentative passe par le point A donné.

a) $f(x) = 2x^2 - 3$ $\quad I = \mathbb{R} \quad A(2\,;4)$

b) $f(x) = \dfrac{5}{x}$ $\quad I =]0\,;+\infty[\quad A(1\,;3)$

c) $f(x) = \dfrac{6}{x^2}$ $\quad I =]-\infty\,;0[\quad A(-2\,;4)$

88 **Vrai ou faux ?**

Les fonctions f et g sont-elles deux primitives d'une même fonction sur l'intervalle I ? Justifiez votre réponse.

a) $f(x) = (x^2 + 2x)^2$; $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$; $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x - 11}{x + 2}$; $\mathrm{I} =]-\infty ; -2[$.

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; $g(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + 1}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

88 **a)** Oui, car $g(x) = f(x) - 1$.

b) Oui, car $g(x) = \dfrac{x^2 - 1 - 5(x + 2)}{x + 2} = f(x) - 5$.

c) Non, car $g(x) = f(x) + \dfrac{4}{x^2 + 1}$ et $\dfrac{4}{x^2 + 1}$ dépend de x.

EXERCICES

93 **Tangente à la courbe d'une primitive**

F est une primitive de f sur $[-2 ; 7]$.

On sait que $f(1) = 4$ et $\mathrm{F}(1) = 3$.

1. Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse 1 ?

2. Écrivez une équation de cette tangente.

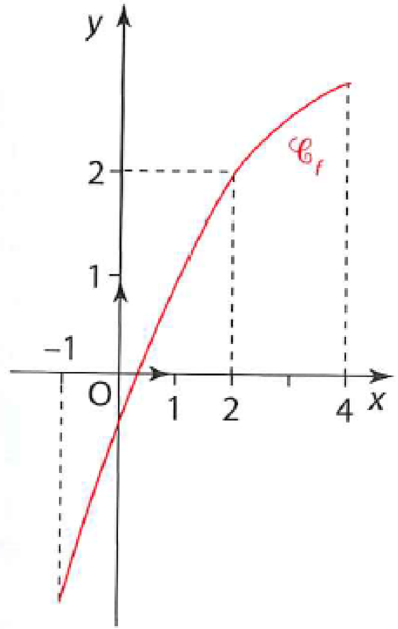
93 **1.** $\mathrm{F}'(1) = f(1) = 4$.

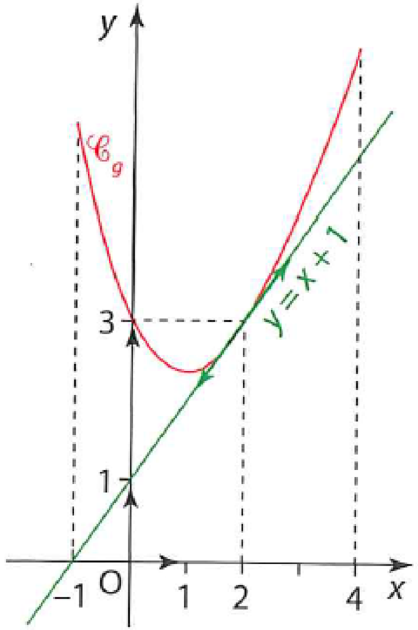
2. La tangente passe par le point $\mathrm{A}(1 ; 3)$ et a pour coefficient directeur 4. D'où son équation : $y = 4x - 1$.

95 f est une fonction et F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
La droite d'équation $y = 1 - x$ est tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse 3.
Déterminez $f(3)$.

95 $f(3) = \mathrm{F}'(3) = -1$.

94 Les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-1\,;\,4]$ sont dessinées ci-dessous. La droite d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 2.





1. Quel est le nombre dérivé de g en $x = 2$?

2. Que vaut $f(2)$?

3. Pourquoi la fonction g ne peut-elle être une primitive de f sur l'intervalle $[-1\,;\,4]$?

94 **1.** $g'(2) = 1$.

2. $f(2) = 2$.

3. On devrait avoir $g'(2) = f(2)$, ce qui n'est pas le cas.