III Systèmes

Cours

1 Système de deux équations linéaires à deux inconnues

$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ -x + 4y = -6 \end{cases}$ est un **système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y.**

Le couple $(2\,;\,-1)$ est **solution** de ce système parce que $3 \times 2 + (-1) = 5$ et $-2 + 4 \times (-1) = -6$.

2 Graphique et système de deux équations linéaires à deux inconnues

Un système est représenté par deux droites dans le plan rapporté à un repère.

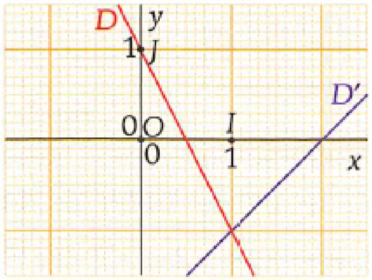
Les solutions du système sont les couples de coordonnées des points communs à ces deux droites.

Résoudre le système consiste à trouver tous ces couples.

Exemples :

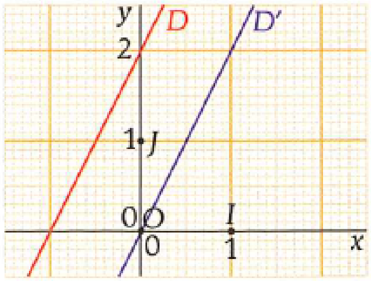
$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -2x + 2y = -4 \end{cases}$ s'écrit $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = x - 2 \end{cases}$.

Les droites D et D' d'équations $y = -2x + 1$ et $y = x - 2$ sont sécantes au point $I(1\,;-1)$.
Le système a un couple solution : $(1\,;-1)$.



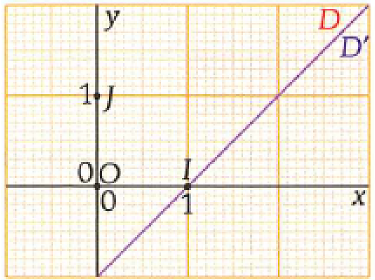
$\begin{cases} 4x - 2y = -4 \\ -4x + 2y = 0 \end{cases}$ s'écrit $\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = 2x \end{cases}$.

Les droites D et D' d'équations $y = 2x + 2$ et $y = 2x$ sont strictement parallèles.
Le système n'a pas de solution.



$\begin{cases} -x + y = -1 \\ 6x - 6y = 6 \end{cases}$ s'écrit $\begin{cases} y = x - 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$.

Les droites D et D' d'équations $y = x - 1$ et $y = x - 1$ sont confondues. Le système a une infinité de couples solutions : ce sont les coordonnées des points de la droite D.



3. Résolution par substitution

Soit le système (S) : $\begin{cases} 2x + y = 1 & (L_1) \\ -2x + 2y = -4 & (L_2) \end{cases}$

(L_1) : $y = -2x + 1$

(L_1) dans (L_2) : $-2x + 2(-2x + 1) = -4$

$\Leftrightarrow -2x - 4x + 2 = -4$

$\Leftrightarrow -6x + 2 = -4$

$\Leftrightarrow -6x = -4 - 2$

$\Leftrightarrow -6x = -6$

$\Leftrightarrow \dfrac{-\cancel{6}x}{-\cancel{6}} = \dfrac{-6}{-6}$

$\Leftrightarrow \boxed{x = 1}$

on remplace x par sa valeur dans (L_1) :

$y = -2 \times 1 + 1 = -2 + 1 = -1$ $\boxed{y = -1}$

Vérification :

(L_1) : $2 \times (1) + (-1) = 2 - 1 = 1$ ✓

(L_2) : $-2 \times (1) + 2 \times (-1) = -2 - 2 = -4$ ✓

<u>Application</u> : Résoudre par substitution le système suivant.

$$(S) : \begin{cases} x - y = 3 & (L_1) \\ 3x + 2y = 5 & (L_2) \end{cases}$$

$(L_1) : x = y + 3$

(L_1) dans (L_2) : $3x(y+3) + 2y = 5$

$\iff 3y + 9 + 2y = 5$

$\iff 5y + 9 = 5$

$\iff 5y = 5 - 9$

$\iff 5y = -4$

$\iff \dfrac{\cancel{5}y}{\cancel{5}} = -\dfrac{4}{5}$

$\boxed{y = -0{,}8 = -\dfrac{4}{5}}$

on remplace y par sa valeur dans (L_1) $x = -0{,}8 + 3 = 2{,}2$ $\boxed{x = 2{,}2}$

<u>Vérification</u> :

(L_1) : $2{,}2 - (-0{,}8) = 2{,}2 + 0{,}8 = 3$ ✓

(L_2) : $3 \times 2{,}2 + 2 \times (-0{,}8)$

$= 6{,}6 - 1{,}6 = 5$ ✓

4. Résolution par combinaison linéaire

Exemple : résoudre par combinaison linéaire le système suivant

$$(S) : \begin{cases} 2x - 3y = -6 & (L_1) \quad \times 5 \\ 3x + 5y = 29 & (L_2) \quad \times 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - 15y = -30 & (L'_1) \\ 9x + 15y = 87 & (L'_2) \end{cases}$$

$(L'_1) + (L'_2)$: $19x = 57$

$x = \dfrac{57}{19} = 3$

$\boxed{x = 3}$

dans (L_1) : $2 \times 3 - 3y = -6$

$\Leftrightarrow 6 - 3y = -6$

$\Leftrightarrow -3y = -6 - 6$

$\Leftrightarrow -3y = -12$

$\Leftrightarrow y = \dfrac{-12}{-3} = 4$

$\boxed{y = 4}$

Vérification :

(L_1) : $2 \times 3 - 3 \times 4 = 6 - 12 = -6$ ✓

(L_2) : $3 \times 3 + 5 \times 4 = 9 + 20 = 29$ ✓