Savoir-faire

Vérifier une primitive proposée

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)e^x + 2$.

a) Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (x - 2)e^x + 2x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (e^x + 2)x - 2e^x + 5$ est-elle une primitive de f sur $\mathbb{R}$?

c) Déterminer la primitive H de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -2 en -1.

Solution

a) $F = u \times v + w$ avec pour tout nombre réel x :

$u(x) = x - 2$ $\quad$ $v(x) = e^x$ $\quad$ $w(x) = 2x$

$u'(x) = 1$ $\quad$ $v'(x) = e^x$ $\quad$ $w'(x) = 2$

Pour tout nombre réel x,

$F'(x) = 1 \times e^x + (x-2)e^x + 2 = (x-1)e^x + 2 = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout nombre réel x :

$$G(x) - F(x) = (e^x + 2)x - 2e^x + 5 - (x-2)e^x - 2x$$
$$= xe^x + 2x - 2e^x + 5 - xe^x + 2e^x - 2x$$
$$= 5$$

Donc, pour tout x, $G(x) = F(x) + 5$ et G est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

c) H est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, donc pour tout x :

$$H(x) = F(x) + C = (x-2)e^x + 2x + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

Or, $H(-1) = -2$, c'est-à-dire $-3e^{-1} - 2 + C = -2$ soit $C = 3e^{-1}$.

Donc, pour tout x, $H(x) = (x-2)e^x + 2x + 3e^{-1}$.

Méthode

Pour vérifier que F est une primitive de f sur I, on vérifie que :

- F est dérivable sur I ;
- $F'(x) = f(x)$ sur I.

- Pour justifier que deux fonction F et G sont primitives d'une même fonction sur I, il suffit d'établir que $G(x) - F(x)$ est une constante sur I.

- Pour déterminer la primitive H telle que $H(-1) = -2$:
- on écrit toutes les primitives $F + C$;
- on détermine C pour que $H(-4) = -2$).

À votre tour

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 8.$$

a) Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 - 2x(x-4) + 1$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) La fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (x^2 + 8)(x - 2)$ est-elle une primitive de f sur $\mathbb{R}$?

c) Déterminer la primitive H de f sur $\mathbb{R}$ telle que $H(0) = -5$.

84 Considérons la fonction f, définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x \ln x$$

et la fonction g, définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 \ln x.$$

1. Calculez $g'(x)$.

2. Déduisez-en une primitive de f sur $[1\,;+\infty[$.

86 Modifier l'écriture

f est la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 1}{(x+1)^2}.$$

1. Trouvez deux nombres A et B tels que $2x^2 + 4x - 1$ s'écrive sous la forme $A(x+1)^2 + B$.

Déduisez-en une nouvelle écriture de $f(x)$.

2. Trouvez une primitive de f sur $]-1\,;+\infty[$.

88 Vrai ou faux ?

Les fonctions f et g sont-elles deux primitives d'une même fonction sur l'intervalle I ? Justifiez votre réponse.

a) $f(x) = (x^2 + 2x)^2$; $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x+2}$; $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x - 11}{x+2}$; $I =]-\infty\,;-2[$.

c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; $g(x) = \dfrac{x+4}{x^2+1}$; $I = \mathbb{R}$.

EXERCICES

84 **1.** $\forall x \in [1\,;+\infty[$, $g'(x) = 2x \ln x + x$.

2. $\forall x \in [1\,;+\infty[$, $f(x) = g'(x) - x$.

Donc $F(x) = g(x) - \dfrac{x^2}{2} = x^2 \ln x - \dfrac{x^2}{2} = x^2\left(\ln x - \dfrac{1}{2}\right)$.

86 **1.**
$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x - 1 &= 2(x^2 + 2x) - 1 \\ &= 2[(x+1)^2 - 1] - 1 \\ &= 2(x+1)^2 - 3. \end{aligned}$$

D'où $\forall x \in]-1\,;+\infty[$, $f(x) = 2 - \dfrac{3}{(x+1)^2}$.

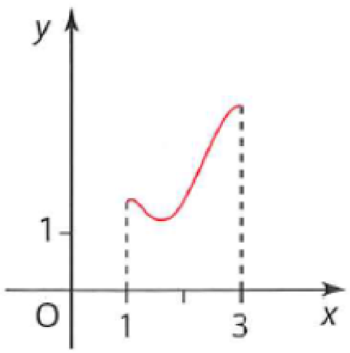
2. $F(x) = 2x + \dfrac{3}{x+1}$.

88 **a)** Oui, car $g(x) = f(x) - 1$.

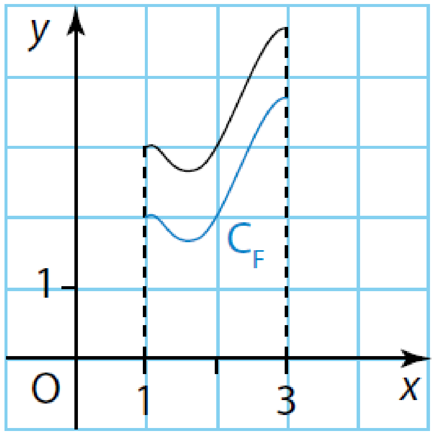
b) Oui, car $g(x) = \dfrac{x^2 - 1 - 5(x+2)}{x+2} = f(x) - 5$.

c) Non, car $g(x) = f(x) + \dfrac{4}{x^2+1}$ et $\dfrac{4}{x^2+1}$ dépend de x.

89 *f* est une fonction continue sur [1 ; 3] et F est une primitive de *f* sur cet intervalle.
Voici la courbe représentative de F.
Recopiez ce dessin et tracez, en expliquant, la courbe d'une autre primitive de *f* sur [1 ; 3].

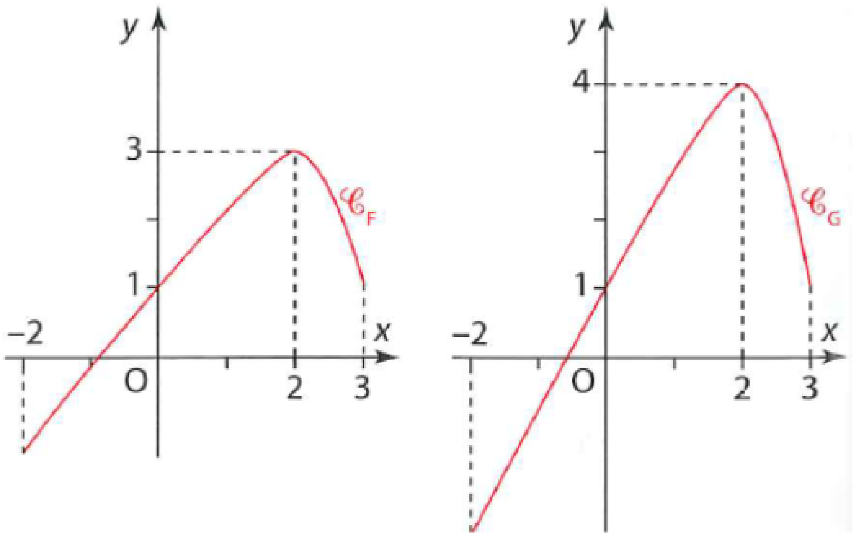


89



Toute autre primitive de f sur [1 ; 3] est de la forme F + C. D'où, pour obtenir la courbe d'une autre primitive, il suffit d'effectuer sur la courbe de F une translation de vecteur $C\vec{j}$ où $C \in \mathbb{R}^*$.

90 Pourquoi les fonctions F et G dont les courbes représentatives ont été dessinées ci-dessous ne peuvent-elles pas être toutes deux des primitives de la même fonction f ?



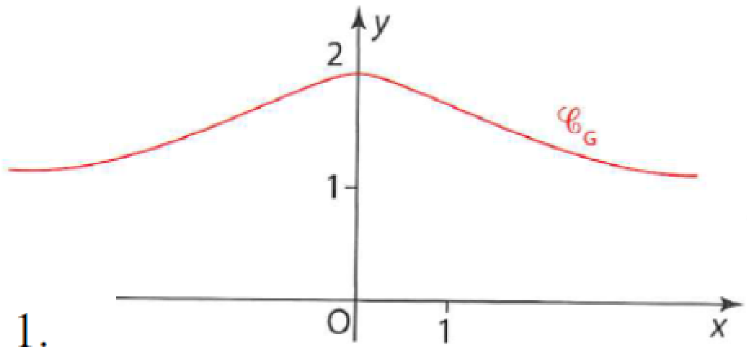
91 F et G sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
On sait que $F(1) = 3$; $G(1) = 5$ et $F(2) = 4$.
Calculez $G(2)$.

92 Une primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f est définie par :

$$F(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

1. Quelle est la valeur de $F(0)$?

2. Voici la courbe représentative d'une autre primitive G de f. Donnez l'expression de $G(x)$.



90 $G(0) - F(0) = 0$, alors que $G(2) - F(2) = 4 - 3 = 1$.
F et G ne diffèrent donc pas d'une constante.

91 $G(1) - F(1) = 2$. Donc $G(2) - F(2) = 2$. Or $F(2) = 4$; donc $G(2) = 6$.

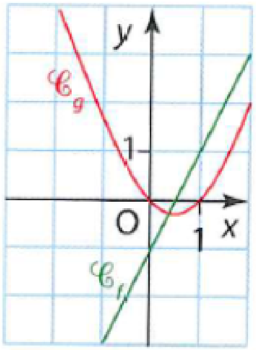
92 **1.** $F(0) = 1$.

2. $G(0) = 2 = F(0) + 1$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$,

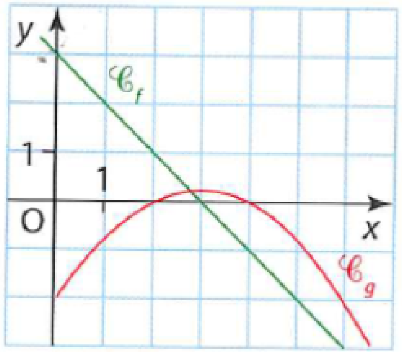
$$G(x) = F(x) + 1 = \frac{1}{x^2 + 1} + 1.$$

97 Cherchez l'intrus

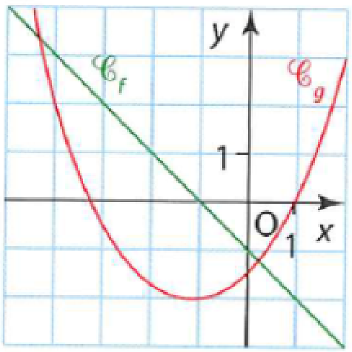
a)



b)



c)



Les trois dessins ci-dessus représentent chacun deux fonctions f et g. Dans deux d'entre eux, l'une des fonctions est une primitive de l'autre.
Dites lesquels en justifiant votre choix.

97 $\mathscr{C}_g$ étant, dans chaque dessin, une droite non parallèle à $(0x)$, ce sont les fonctions g qui sont susceptibles d'être des primitives des fonctions f.
Dans le dessin **c)**, $\forall x \in \left]-\infty\,;-1\right[$, $f(x) > 0$, alors que sur cet intervalle g est décroissante. D'où g n'est pas une primitive de f.

autre analyse :

f est une fonction affine donc *g* est une fonction polynôme du second degré.
$f(x)=ax+b \quad g(x)=ax^2/2+bx+c$
Le sens de variation de f dépend du signe de a, et l'orientation de la parabole dépend du signe de a.
L'intrus est le dessin c), car on a $a>0$ pour la parabole tournée vers le haut et $a<0$ pour la fonction affine décroissante.