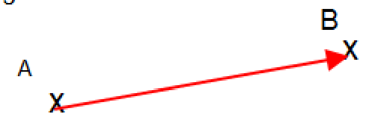
Chapitre 7 : vecteurs dans le plan

Définition : translation

Soient A et B deux points distincts du plan. La transformation qui déplace A en B par glissement sans rotation est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$



1 Qu'est-ce qu'un vecteur ?

Définition :
Un **vecteur** est un objet mathématique caractérisé par :
- sa **direction**
- son **sens** sur cette direction
- sa **longueur**, appelée aussi **norme**, donnée par un nombre positif.

Notation : les vecteurs seront souvent notés par les lettres u, v, w... surmontées d'une **flèche** : par exemple on parlera du vecteur $\overrightarrow{u}$.

Attention : on ne peut pas "montrer" un vecteur du plan : la flèche que l'on dessine n'est pas le vecteur, elle en est un **représentant**. On peut en dessiner autant que l'on veut, placés n'importe où dans le plan, pour représenter le vecteur $\overrightarrow{u}$

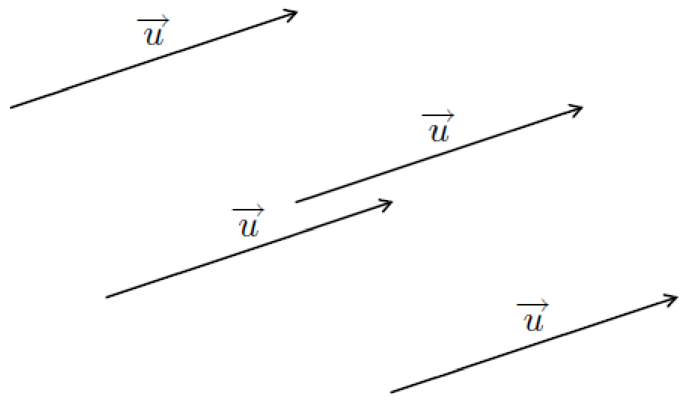


Illustration :

les deux flèches ci-dessous représentent un vecteur $\overrightarrow{u}$:

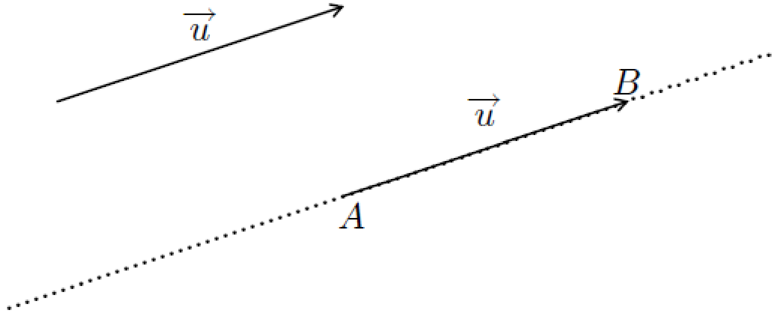
la seconde flèche est le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'**origine** A et d'**extrémité** B ; on notera $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

La **direction** de $\overrightarrow{u}$ est celle de la droite (AB),

son **sens** est de A vers B,

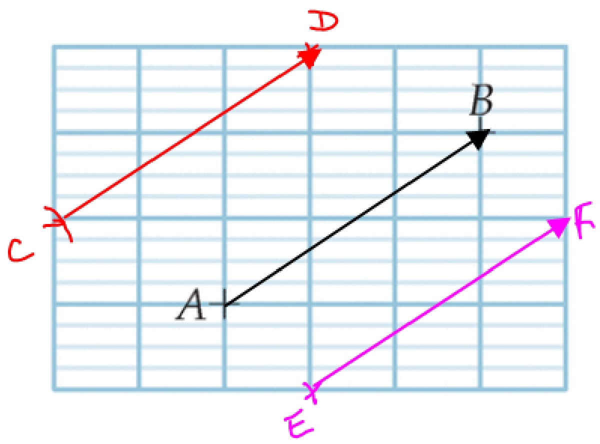
sa **norme** est égale à la **distance** AB.

On notera d'ailleurs ainsi la norme de $\overrightarrow{u}$: $\|\overrightarrow{u}\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$



Application :

Exercice 1 : Construire 2 représentants du vecteur de la translation qui transforme A en B.

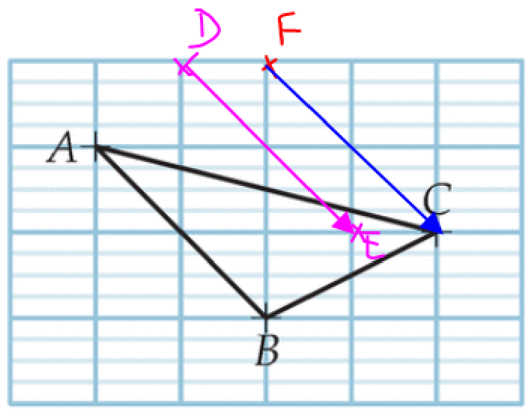


$\overrightarrow{CD}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CD}$ est le représentant d'origine C du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{EF}$ est le représentant d'extrémité F de $\overrightarrow{AB}$

Exercice 2 : Construire 2 représentants du vecteur de la translation qui transforme A en B.

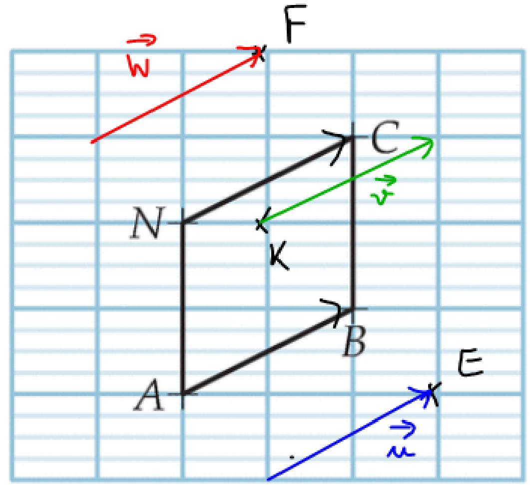


$\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{FC}$ sont 2 représentants de $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{DE}$ est le représentant d'origine D du vecteur $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{FC}$ est le représentant d'extrémité C du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 3 : Construire 3 représentants du vecteur de la translation qui transforme A en B.



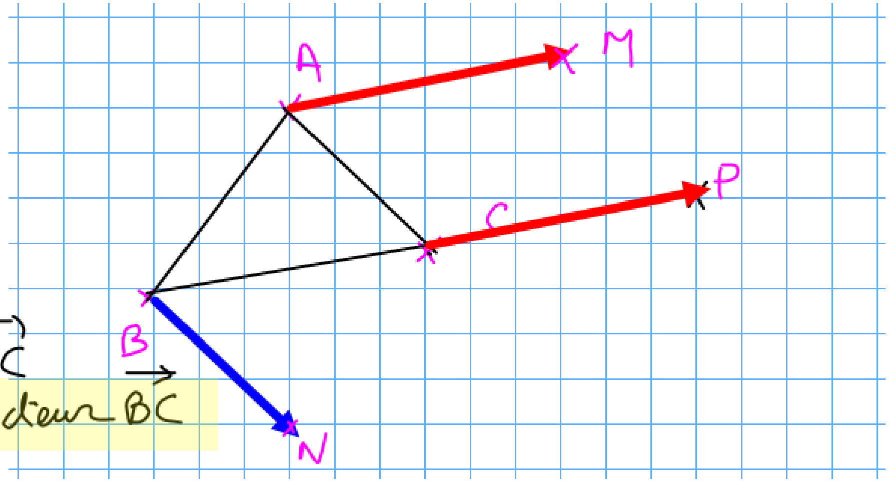
- $\overrightarrow{NC}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$

C est l'image de N par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

- $\vec{u}$ est le représentant d'extrémité E du vecteur $\overrightarrow{AB}$
- $\vec{v}$ est le représentant d'origine K de $\overrightarrow{AB}$
- $\vec{w}$ est le représentant d'extrémité F de $\overrightarrow{AB}$

Exercice 4 : Construire un triangle ABC

a) Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$.
b) Construire le point N tel que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AC}$.
c) Construire le point P tel que $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BC}$.



Dans chaque cas, illustrer la construction par une phrase utilisant les mots image, vecteur, représentant, translation ;

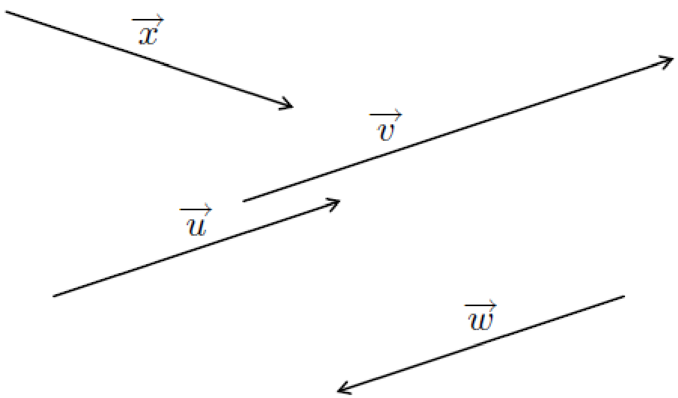
- $\overrightarrow{AM}$ est le représentant d'origine A du vecteur $\overrightarrow{BC}$
  M est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$
- $\overrightarrow{BN}$ est le représentant d'origine B de AC
  N est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$
- $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BC} \iff C = m[BP]$

2 Quand peut-on dire que deux vecteurs sont égaux ?

La définition qui suit coule de source :

Définition :
Deux vecteurs seront dits **égaux** si et seulement si ils ont **même direction**, **même sens** et **même norme**.

Par exemple :

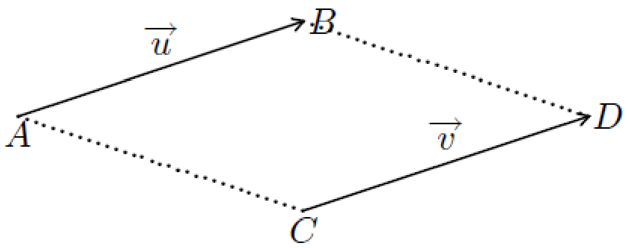


- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{x}$ ne sont pas égaux, car ils n'ont pas la même direction.
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas égaux, car ils n'ont pas la même norme.
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas égaux, car ils n'ont pas le même sens.

En pratique on utilise souvent le théorème suivant pour démontrer que des vecteurs sont égaux :

Théorème :
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, de représentants respectifs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
On a : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Illustration :



Remarque :
Cette propriété est une **équivalence** ; elle peut se décomposer en deux propriétés distinctes :
- **Si** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ **alors** $ABDC$ est un parallélogramme.
- **Si** $ABDC$ est un parallélogramme **alors** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

Le théorème suivant découle directement du précédent, en y adjoignant la propriété des diagonales du parallélogramme :

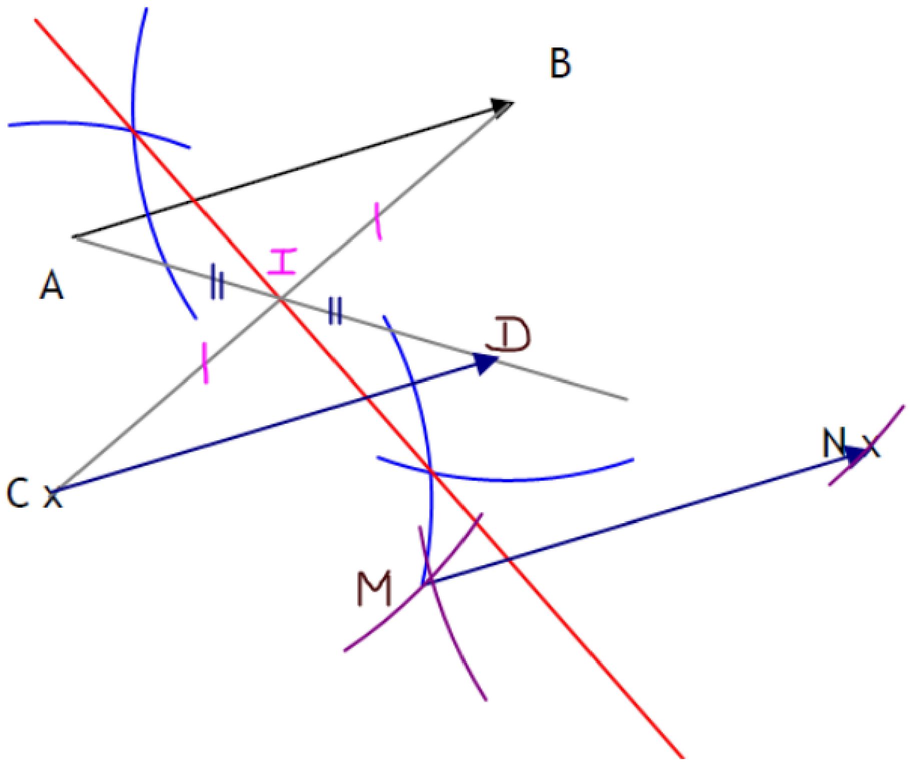
Théorème :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow [AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu

METHODES :

M 1- Construire un représentant d'un vecteur

Enoncé : a) Construire le représentant d'origine C du vecteur $\overrightarrow{AB}$ **en utilisant un milieu.**

b) Construire le représentant d'extrémité N du vecteur $\overrightarrow{AB}$ **en utilisant le compas.**



Explications :

- Nommons D l'extrémité du vecteur cherché.

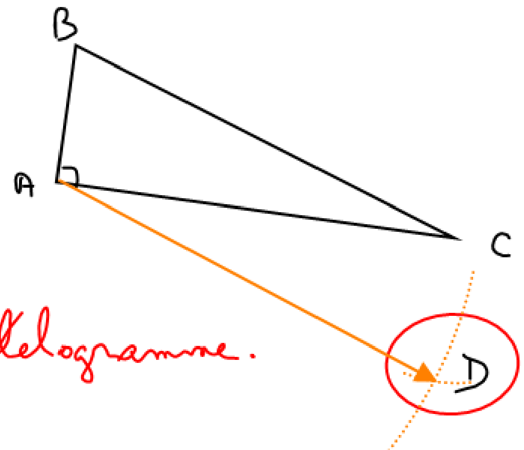
On a alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
On en déduit que les segments [AD] et [AC] ont même milieu I.

- Nommons M l'origine du vecteur cherché.

On a alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}$
On en déduit que ABNM est un parallélogramme. Par conséquent :
d'une part AB = MN ; d'autre part AM = BN

méthode : avec le compas, on reporte à partir de N la distance AB, puis on reporte à partir de A la distance BN. On obtient 2 arcs de cercle qui se coupent en M.

Exercice 5 : construire un triangle ABC rectangle en A.
Construire le représentant d'origine A de $\overrightarrow{BC}$

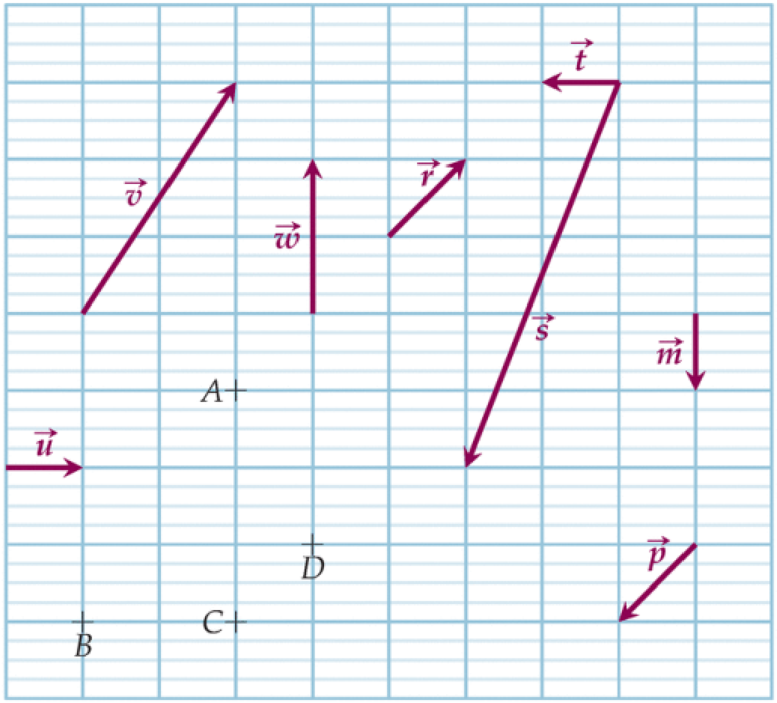


Soit $\overrightarrow{AD}$ le représentant d'origine A de $\overrightarrow{BC}$
Construisons le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$
$\Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme.

méthode :
avec le compas, on reporte à partir de A la distance BC, puis on reporte à partir de C la distance AB. On obtient 2 arcs de cercle qui se coupent en D.

17 À partir de la figure ci-dessous, citer un vecteur :

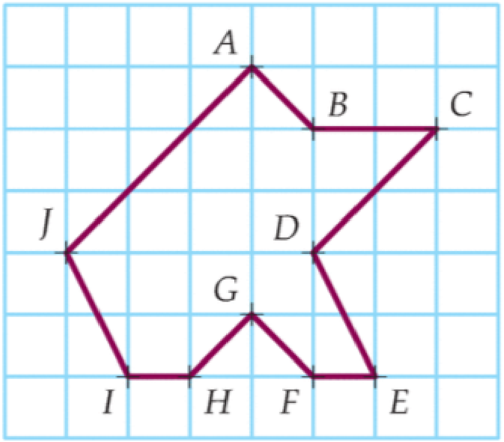
1) opposé à $\overrightarrow{CD}$; $\vec{p} = -\overrightarrow{CD}$
2) de même direction et de même sens que $\overrightarrow{AC}$: $\vec{m}$
3) de même direction que $\overrightarrow{BC}$ mais de sens contraire : $\vec{t}$
4) égal au vecteur $\overrightarrow{BA}$. $\overrightarrow{BA} = \vec{v}$



25 Compléter les égalités en n'utilisant que les points de la figure ci-dessous.

1) $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB}$
2) $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{HF}$
3) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$
4) $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{EE} = \vec{0}$
5) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$
6) $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$

$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EE} = \vec{0}$

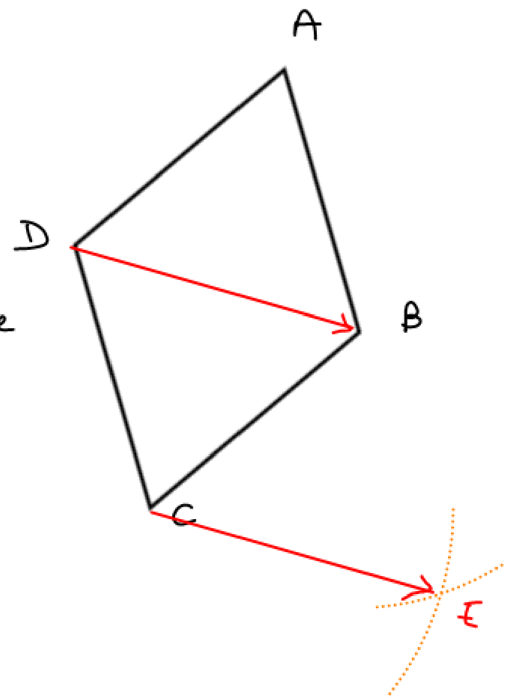


Exercice 6 : construire un losange ABCD.
Construire le représentant d'extrémité C de $\overrightarrow{BD}$

Soit $\overrightarrow{EC}$ le représentant d'extrémité C de $\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{BD} \iff \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DB}$

$\iff$ BDCE est un parallélogramme

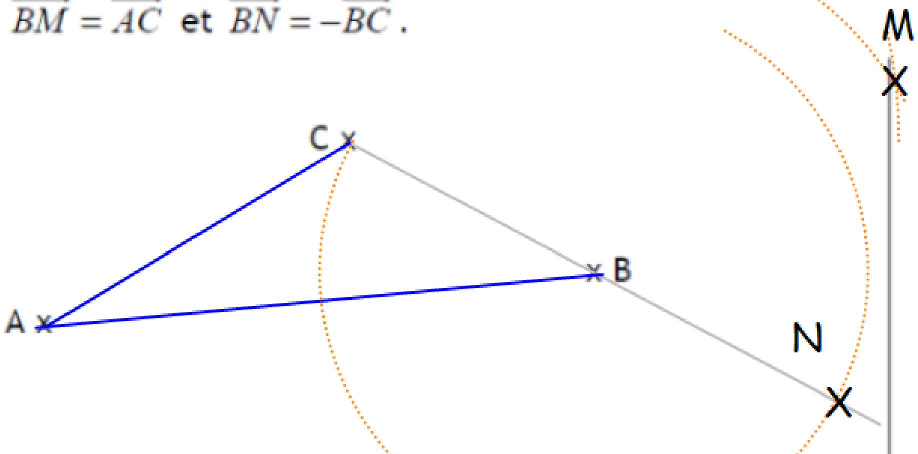


méthode :
on construit au compas le parallélogramme BDCE en reportant à partir de C la longueur BD et en reportant à partir de B la longueur DC

M 2- Placer un point défini par une égalité vectorielle

Enoncé :

ABC est un triangle quelconque. Construire les points M et N vérifiant :
$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{BC}$.



méthode :
on construit au compas le parallélogramme BMCA en reportant à partir de C la longueur AB et en reportant à partir de B la longueur AC.

Le point M est à l'intersection des 2 arcs de cercle.

On construir le point N par demi-tour du point C autour de B

Explications :

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$ équivaut à BMCA est un parallélogramme.

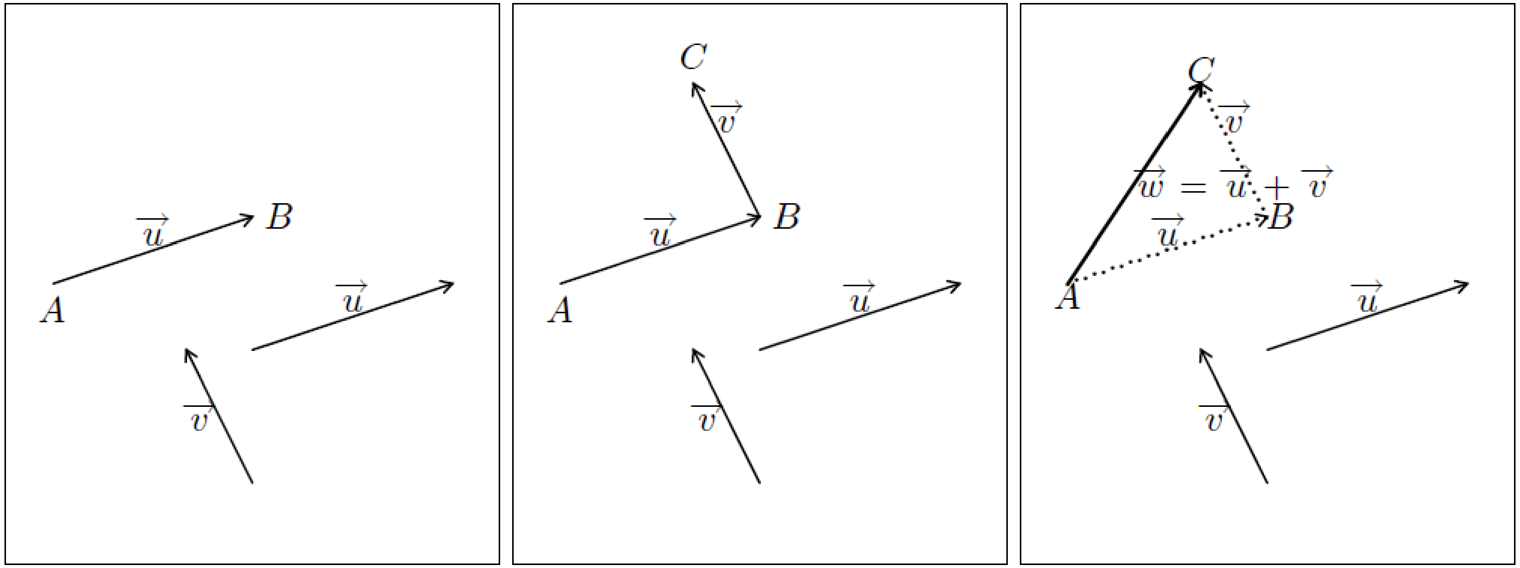
$\overrightarrow{BN} = -\overrightarrow{BC}$ donc on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont même direction ; par conséquent, les points B, N et C sont alignés.

Or, les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont de même norme et de sens opposé, donc le point N est le symétrique du point C par rapport à B.

3 Comment additionner (ou soustraire) deux vecteurs

Définition :
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs ; on définit le vecteur $\overrightarrow{w}$ **somme** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de la façon suivante :
Soit A un point du plan ; on trace le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A : il a pour extrémité B.
Puis on trace le représentant de $\overrightarrow{v}$ d'origine B : il a pour extrémité C. **Alors $\overrightarrow{AC}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$, somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.**
On notera $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$

Illustration :

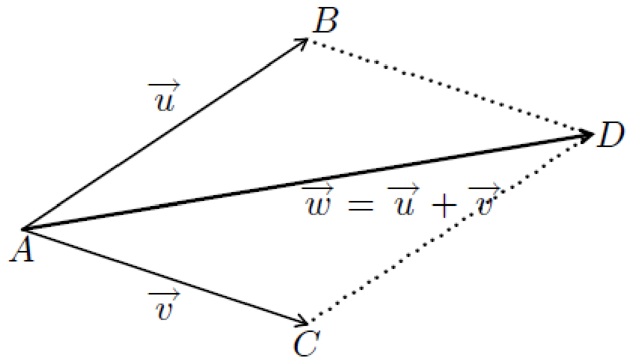


Relation de Chasles :
D'après ce qui vient d'être vu, on a toujours la relation suivante, appelée relation de Chasles :
Pour tous points A, B, C du plan, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Exemples :
si A, E, G, M, N et P sont des points du plan, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ $\quad$ $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{EA}$

Règle du parallélogramme :
$ABDC$ est un parallélogramme (éventuellement aplati) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$

Illustration :



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

Remarque :
Ceci nous donne une autre méthode de construction du vecteur somme $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$; pour cela, soit A un point du plan ; on trace le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A : il a pour extrémité B. Puis on trace le représentant de $\overrightarrow{v}$ d'origine A : il a pour extrémité C. Enfin on trace le point D tel que $ABDC$ forme un parallélogramme. **Alors $\overrightarrow{AD}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{w}$, somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.**

27 Écrire le plus simplement possible.

1) $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}$

2) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BD}$

3) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}$

4) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DB}$

5) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{EM} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{EC}$

6) $-\overrightarrow{AU} + \overrightarrow{SH} - \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{MU}$

1) $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DB}$

2) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB}$
$= 2\overrightarrow{DB}$

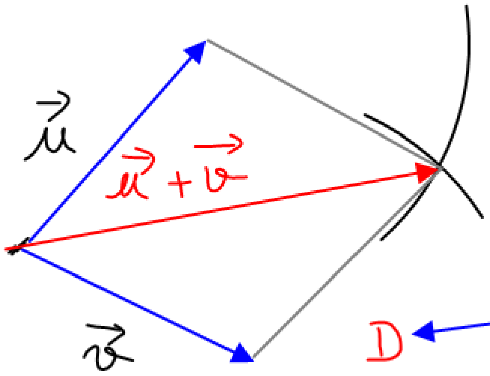
3) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{DM}$
$= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$

4) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}+\cancel{\overrightarrow{BD}}+\cancel{\overrightarrow{DB}} = \overrightarrow{CB}$

5) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{EM}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EM}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{EE} = \overrightarrow{0}$

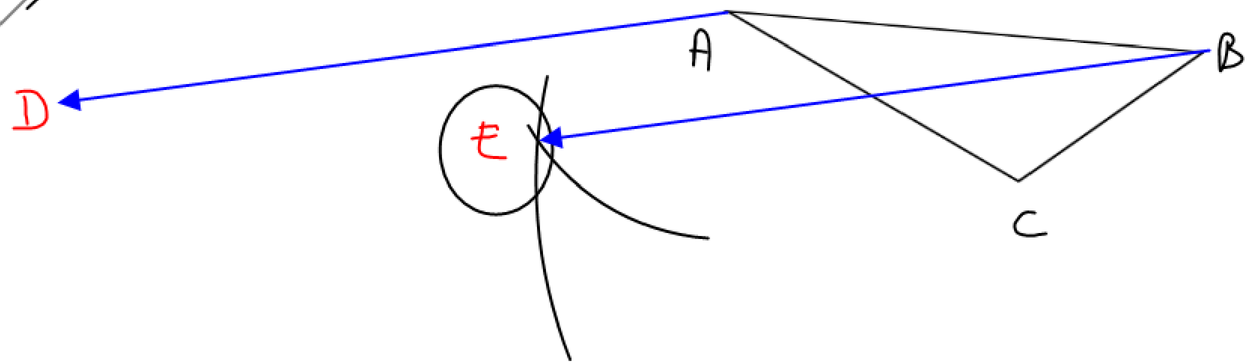
6) $\overrightarrow{UA}+\overrightarrow{SH}+\overrightarrow{TS}+\overrightarrow{MU} = \overrightarrow{TS}+\overrightarrow{SH}+\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{UA} = \overrightarrow{TH}+\overrightarrow{MA}$

Règle du parallélogramme : somme de 2 vecteurs ayant même origine



__Application :__

soit ABC un triangle. Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}$



$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE}$

Méthode :

On doit effectuer la somme de 2 vecteurs ayant la même origine.
On applique la règle du parallélogramme.

On construit donc le point E tel que BAEC est un parallélogramme.

AB = EC
BC = AE

Ensuite, on construit le point D tel que $\overrightarrow{AD}$ est le repésentant d'origine A de $\overrightarrow{BE}$. D est tel que ADEB est un parallélogramme.

AD = EB
AB = DE

Il existe un vecteur différent des autres, dont tous les représentants ont l'origine et l'extrémité confondues : par exemple $\overrightarrow{AA}$, ou $\overrightarrow{FF}$...
Or la relation de Chasles nous permet d'écrire que, par exemple, $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FF}=\overrightarrow{EF}$. L'addition de ce vecteur ne modifie donc pas le vecteur de départ.

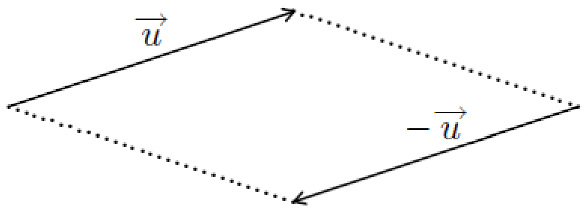
Par analogie avec le calcul sur les nombres, on appelle ce vecteur le **vecteur nul, et on le note** $\overrightarrow{0}$.
On a ainsi $\overrightarrow{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{MM}=$ ... quels que soient les points A, B, M du plan. Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est le seul vecteur qui a une norme nulle ; ses directions et sens ne sont pas définis.

Enfin, toujours d'après la relation de Chasles, on peut écrire $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{0}$ pour tous points A et B du plan.

Là encore par analogie avec le calcul numérique, il est légitime de dire que le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est le **vecteur opposé** au vecteur $\overrightarrow{AB}$. Si on a $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}$, alors on note $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{u}$.

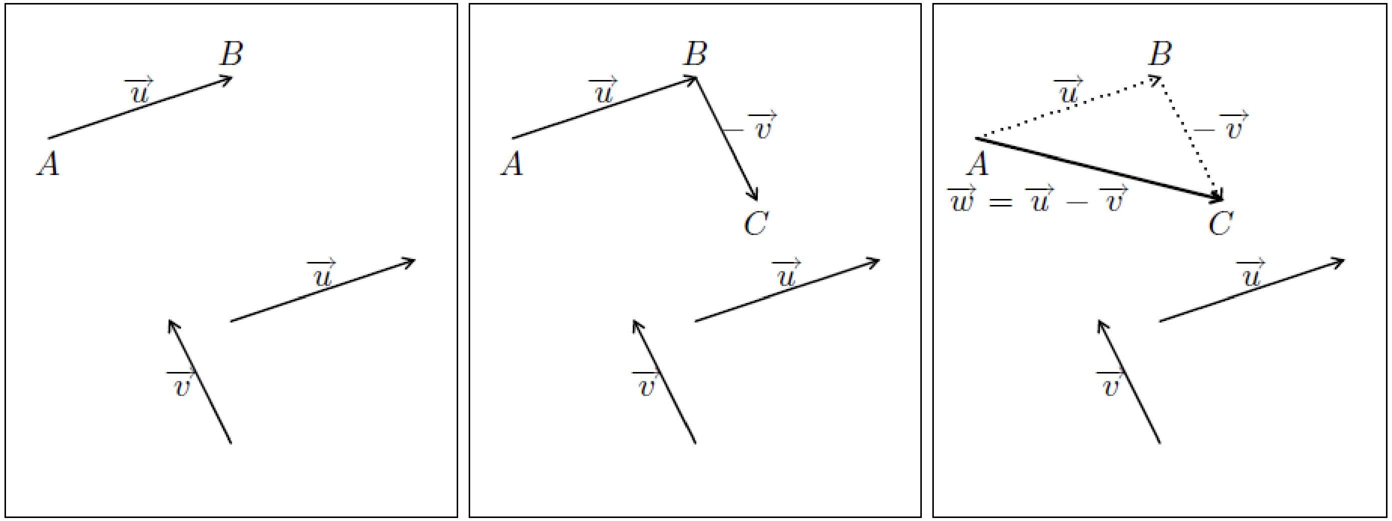
Définition :
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur non nul, alors l'**opposé du vecteur** $\overrightarrow{u}$, noté $-\overrightarrow{u}$, est le vecteur qui a **la même direction** que $\overrightarrow{u}$, **la même norme** que $\overrightarrow{u}$, mais **le sens opposé** à $\overrightarrow{u}$.

Illustration :



Nous pouvons maintenant, toujours et encore par analogie avec le calcul numérique (où vous avez appris que **soustraire** un nombre revient à **ajouter son opposé**) :

Définition :
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs ; on définit le vecteur $\overrightarrow{w}$ **différence** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ comme somme du vecteur $\overrightarrow{u}$ et de l'opposé du vecteur $\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$



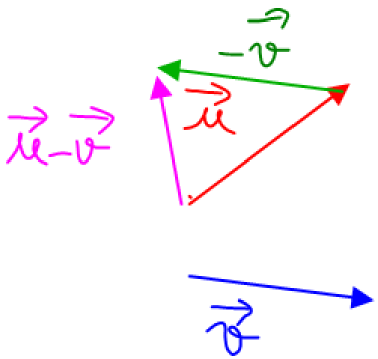
Propriétés de l'addition des vecteurs :

- Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ on a $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$.
  Autrement dit, dans une somme de vecteurs, on peut permuter les deux vecteurs.
- Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ on a $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$.
  Autrement dit, pour additionner trois vecteurs, on peut commencer par additionner les deux vecteurs que l'on veut avant d'ajouter le troisième.

Application : différence de 2 vecteurs

Tracer un représentant du vecteur $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$

$$\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$$



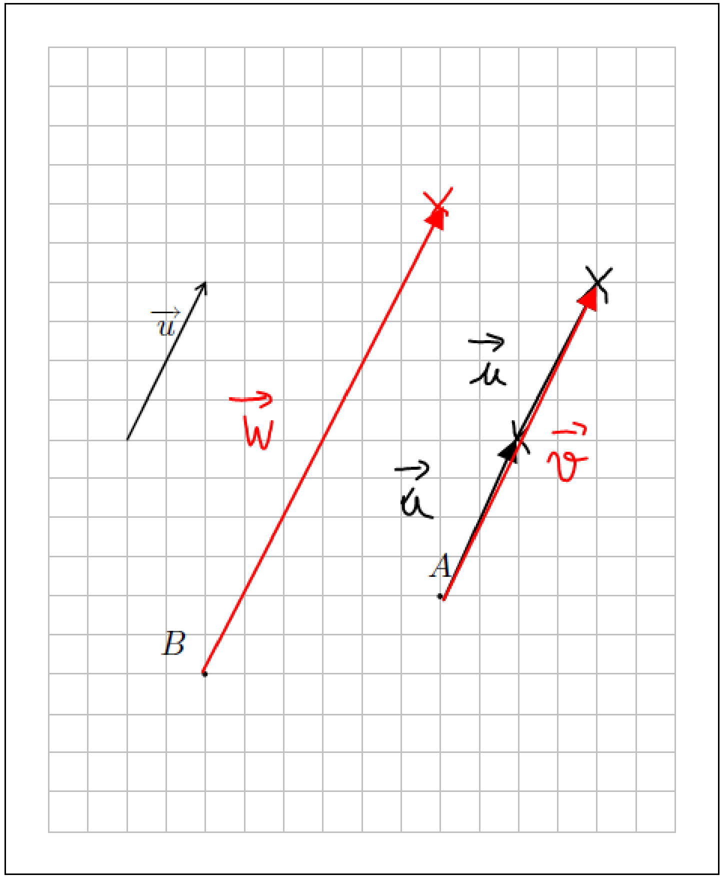
Méthode :

On place à l'extrémité de $\overrightarrow{u}$ un représentant du vecteur $-\overrightarrow{v}$.
On effectue ensuite la somme $\overrightarrow{u} + (-\overrightarrow{v})$ à l'aide de la relation de Chasle.

4 Comment multiplier un vecteur par un réel

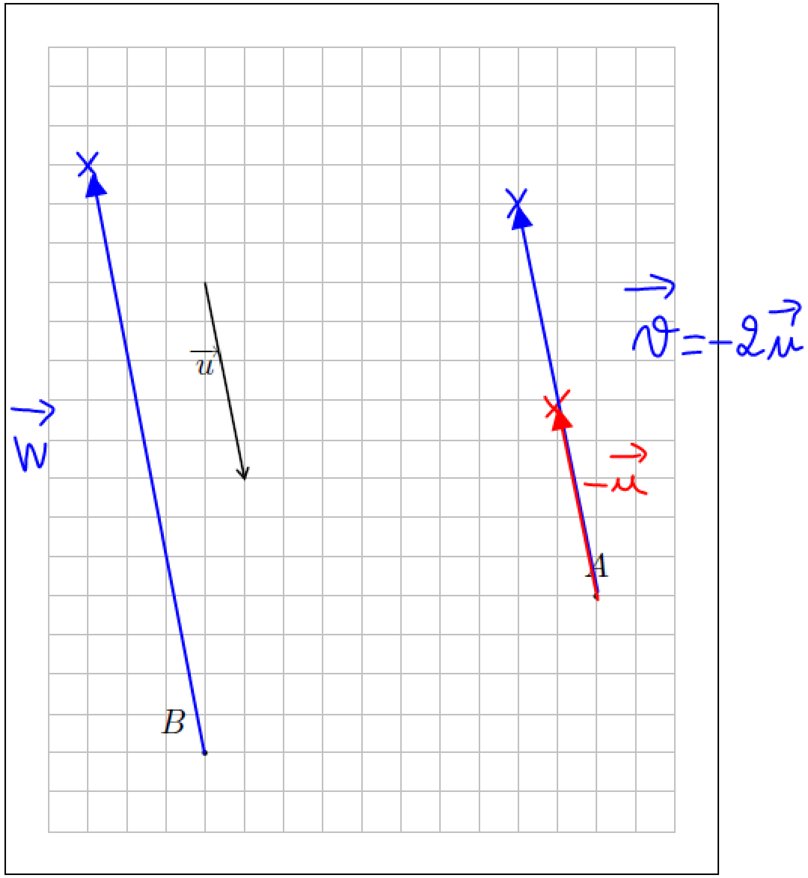
Introduction :

Construisez le représentant du vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}$ d'origine A, puis le représentant du vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}$ d'origine B.



Par analogie avec l'addition des nombres, on notera $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w} = 3\overrightarrow{u}$.
Le vecteur $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u}$ a la **même direction** que $\overrightarrow{u}$, il a le **même sens** que $\overrightarrow{u}$, mais sa **norme est deux fois plus grande**.

Construisez le représentant du vecteur $\overrightarrow{v} = (-\overrightarrow{u}) + (-\overrightarrow{u})$ d'origine A, puis le représentant du vecteur $\overrightarrow{w} = (-\overrightarrow{u}) + (-\overrightarrow{u}) + (-\overrightarrow{u})$ d'origine B.



Par analogie avec l'addition des nombres, on notera $\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w} = -3\overrightarrow{u}$.
Le vecteur $\overrightarrow{v} = -2\overrightarrow{u}$ a la **même direction** que $\overrightarrow{u}$, mais il a un **sens opposé** à celui $\overrightarrow{u}$, et sa **norme est deux fois plus grande**.

Définition :
Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul, et k un nombre réel non nul. Alors on définit le vecteur $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ de la façon suivante :

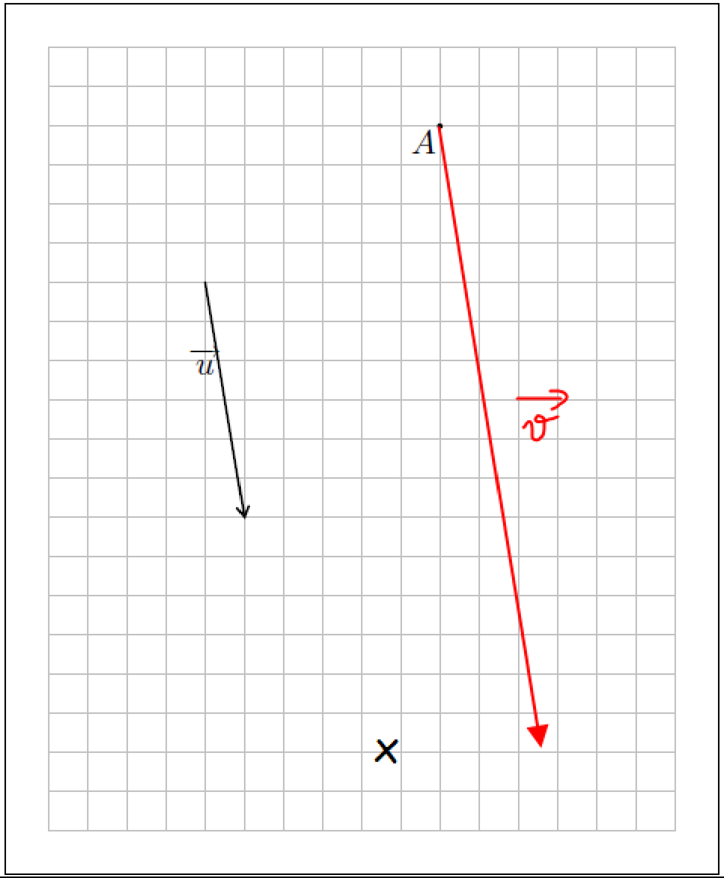
$\overrightarrow{v}$ a la **même direction** que $\overrightarrow{u}$

et

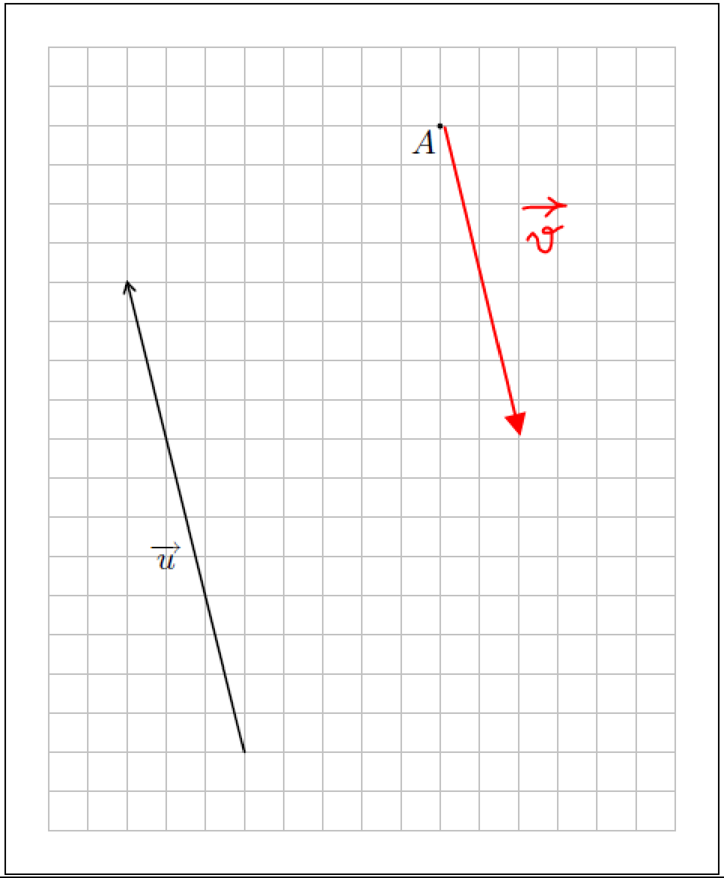
Si $k > 0$	**Si** $k < 0$
alors $\overrightarrow{v}$ est de **même sens** que $\overrightarrow{u}$, et de **norme égale à** k **fois celle de** $\overrightarrow{u}$.	alors $\overrightarrow{v}$ est de **sens opposé** à $\overrightarrow{u}$, et de **norme égale à** $-k$ **fois celle de** $\overrightarrow{u}$.

Par exemple :

Le vecteur $\overrightarrow{v} = \frac{5}{2}\overrightarrow{u}$ a
- la même direction que $\overrightarrow{u}$,
- le même sens que $\overrightarrow{u}$
- et une norme égale à $\frac{7}{2}$ fois celle de $\overrightarrow{u}$:



Le vecteur $\overrightarrow{v} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{u}$ a
- la même direction que $\overrightarrow{u}$,
- le sens opposé à celui de $\overrightarrow{u}$
- et une norme égale à $\frac{2}{3}$ fois celle de $\overrightarrow{u}$:



Quelques propriétés...

- Pour tout nombre réel k et pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, on a :
  $k\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ et $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
- Distributivité : Pour tous réels k, k', et pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{u'}$, on a
  $k(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u'}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{u'}$ et $k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u} = (k + k')\overrightarrow{u}$.

Par exemple :
$2\overrightarrow{u} + 5\overrightarrow{u} = (2+5)\overrightarrow{u} = 7\overrightarrow{u}$
$2(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = 2\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}$
$2(3\overrightarrow{u} - 2\overrightarrow{v}) - (6\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = 6\overrightarrow{u} - 4\overrightarrow{v} - 6\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} = 0\overrightarrow{u} - 5\overrightarrow{v} = -5\overrightarrow{v}$