Chapitre 11 : Lois à densité

Remarque: dans tout ce qui suit, les repères sont supposés orthogonaux.

I Loi à densité sur un intervalle

1. Variable aléatoire continue

Définition 1

Une variable aléatoire définie sur l'univers Ω d'une expérience aléatoire est dite **continue** lorsqu'elle peut prendre comme valeurs tous les nombres réels d'un intervalle I.

Exemple

Jean attend son bus. Il est certain que son bus arrivera dans moins de 10 minutes. Soit X son temps d'attente (en minutes).

La variable aléatoire X est continue car elle peut prendre comme valeurs **tous** les nombres réels de l'intervalle [0;10[.

Par exemple, X=1,3 signifie que le bus arrive au bout de 1 minute et 18 secondes (car $0{,}3\times60=18$).

2. Fonction de densité sur un intervalle [a ;b]

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle [a ;b].

f est une **densité** si et seulement si

- f est continue sur [a ;b].
- f est positive sur [a ;b].
- l'aire de la partie du plan délimitée par les droites verticales $x = a$; $x = b$; $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses vaut 1, autrement dit : $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Exemple

Soit f la fonction définie par $f(x) = 0{,}003x^2$ sur [0;10].
Montrer que f est une densité.

Corrigé

La fonction f est dérivable, et par là, f est **continue**.
De plus, la fonction f est **positive** (c'est le produit d'un nombre positif par un carré).
Par conséquent, f étant positive et continue, l'aire située entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses vaut:

$$\mathscr{A}=\int_0^{10} f(x)dx$$

Or: $\displaystyle\int_0^{10} f(x)dx=\int_0^{10} 0,003x^2dx=\left[0,003\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}=0,003\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}=\frac{0,003}{3}(10^3-0^3)=1$

Donc: $\mathscr{A}$**=1**
Finalement, les trois conditions suffisantes sont vérifiées, et par là, f est bien une **densité**.

Application : déclic page 214, exercices n°19 et 20

3. Loi de probabilité d'une variable aléatoire continue

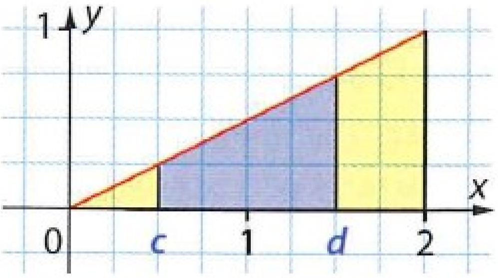
a. Définition 3

Soit X une variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle I=[a ;b].

X* suit la loi de densité *f si :

pour tout intervalle J=[c ;d] inclus dans I, $p(X\in J)$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}$,
où $\mathscr{D}$ est le domaine situé entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses pour x dans J.

$$p(x\in[c;d])=p(c\le X\le d)=\int_c^d f(x)dx$$



b. Propriété 1

Soit X une variable aléatoire continue de densité f à valeurs dans l'intervalle I.

Pour tous réels a et b de I avec $a\le b$, on a: $p(a\le X\le b)=\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Remarques:

- ✓ $p(X=a)=0$
- ✓ $p(a\le X\le b)=p(a<X\le b)=p(a\le X<b)=p(a<X<b)$

On prolonge souvent f à $\mathbb{R}$ tout entier en la supposant nulle ailleurs qu'en I.

Exemple

Chaque jour, Jean prend le bus pour se rendre au lycée.
Il a constaté que son temps d'attente X (en minutes) suit une loi de densité f définie par :
$f(x)=0{,}003x^2$ sur [0;10].
Jean arrive à l'arrêt de bus.
1. Quelle est la probabilité qu'il attende moins de 7 minutes.
2. Quelle est la probabilité que son temps d'attente soit compris entre 7 et 9 minutes.

Corrigé

1. La probabilité cherché est: $p(\ 0\leq X\leq 7\ )= \int_0^7 f(x)dx = \int_0^7 0{,}003x^2 dx = \left[0{,}003\frac{x^3}{3}\right]_0^7 =$

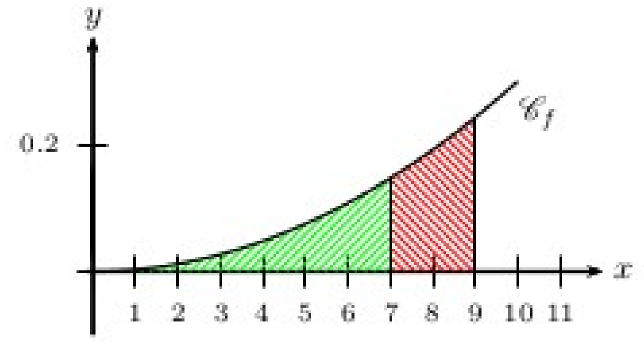
$0{,}003\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^7 = \frac{0{,}003}{3}(7^3-0^3) = 0{,}343$
Soit: $p(\ 0\leq X\leq 7\ )= 0{,}343$.

2. La probabilité cherché est: $p(\ 7\leq \mathrm{X}\leq 9\ )= \int_7^9 f(x)dx = \int_7^9 0{,}003x^2 dx = \left[0{,}003\frac{x^3}{3}\right]_7^9 =$

$0{,}003\left[\frac{x^3}{3}\right]_7^9 = \frac{0{,}003}{3}(9^3-7^3) = 0{,}386$

Soit: $p(\ 7\leq \mathrm{X}\leq 9\ )= 0{,}386$.

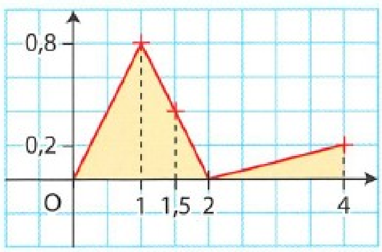
La densité f est représentée ci-dessous.
Les aires des parties hachurées (en unités d'aires) correspondent aux probabilités cherchées.



Application :

Énoncé

1. f est la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 4] par la courbe ci-contre.
Vérifier que l'aire, en unités d'aire, du domaine coloré est égale à 1.
2. X est une variable aléatoire continue à valeurs dans l'intervalle [0 ; 4] dont la loi de probabilité a pour densité la fonction f précédente. Calculer :
a) $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$ **b)** $P(X < 1)$ **c)** $P_{(1\leqslant X\leqslant 2)}(1{,}5 \leqslant X \leqslant 2{,}5)$



Solution

1. En unités d'aire, l'aire du triangle isocèle est $\frac{2 \times 0,8}{2}$ c'est-à-dire 0,8.

L'aire du triangle rectangle est $\frac{2 \times 0,2}{2}$ c'est-à-dire 0,2.

Donc l'aire du domaine coloré est $0,8 + 0,2 = 1$.

2. a) $P(1 \leqslant X \leqslant 2) = \int_1^2 f(t)\,dt = \frac{1 \times 0,8}{2} = 0,4$.

b) $P(X < 1) = P(0 \leqslant X \leqslant 1) = \int_0^1 f(x)\,dt = \frac{1 \times 0,8}{2} = 0,4$.

c) $P_{(1 \leqslant X \leqslant 2)}(1,5 \leqslant X \leqslant 2,5) = \frac{P((1 \leqslant X \leqslant 2) \cap (1,5 \leqslant X \leqslant 2,5))}{P(1 \leqslant X \leqslant 2)}$.

Or $(1 \leqslant X \leqslant 2) \cap (1,5 \leqslant X \leqslant 2,5) = (1,5 \leqslant X \leqslant 2)$.

Donc $P_{(1 \leqslant X \leqslant 2)}(1,5 \leqslant X \leqslant 2,5) = \frac{P(1,5 \leqslant X \leqslant 2)}{0,4}$.

$P_{(1 \leqslant X \leqslant 2)}(1,5 \leqslant X \leqslant 2,5) = \frac{\frac{0,4 \times 0,5}{2}}{0,4} = 0,25$.

Méthode

- La fonction f est continue et positive sur l'intervalle $[0;4]$ et son intégrale sur cet intervalle est égale à 1.
Cela justifie que l'on puisse l'utiliser comme densité de probabilité d'une variable aléatoire continue à valeurs dans $[0;4]$.
- $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$ est l'aire du domaine $\{M(x;y) ; 1 \leqslant x \leqslant 2$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Ce domaine est un triangle rectangle d'aire $\frac{1 \times 0,8}{2}$.