

II. Fonction carré

📺 Vidéo <https://youtu.be/B3mM6LYdsF8>

1. Définition

La fonction carré f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

2. Variations

Propriété :

La fonction carré f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ et croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Démonstration :

- Soient a et b deux nombres réels quelconques positifs tels que $a < b$. Comparons les images $f(a)$ et $f(b)$ pour savoir si la fonction conserve ou change l'ordre :

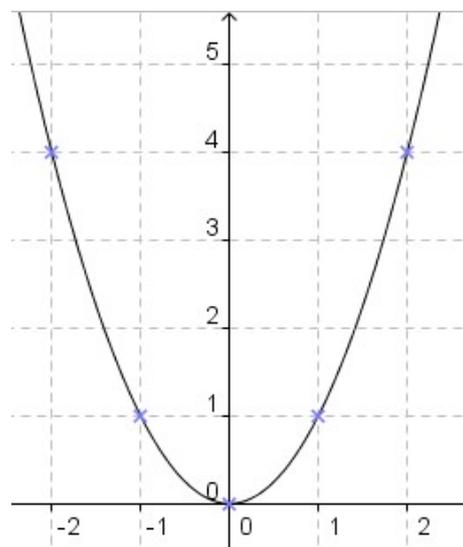
$$f(b) - f(a) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$$

Or $b - a > 0$, $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $f(b) - f(a) \geq 0$ ce qui prouve que $f(a) \leq f(b)$ et donc que f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty; 0]$ est prouvée de manière analogue en choisissant a et b deux nombres réels quelconques négatifs tels que $a < b$ on a alors $b - a < 0$

3. Représentation graphique

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4



Remarques :

- 1) Le tableau de valeurs n'est pas un tableau de proportionnalité. La fonction carrée n'est donc pas une fonction linéaire.
- 2) Attention aux parenthèses : $-1^2 \neq (-1)^2$
- 3) Dans un repère (O, I, J), la courbe de la fonction carré est appelée une parabole de sommet O.
- 4) Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction carré est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

4. Comparer des carrés

exemple : comparer les nombres suivants

$5,12^2$ et $5,13^2$ $(-5,12)^2$ et $(-5,13)^2$ $(-7,3)^2$ et $5,7^2$

- $0 < 5,12 < 5,13$ $5,12$ et $5,13$ sont deux réels positifs, or sur $[0; +\infty[$ la fonction carré est croissante, donc elle conserve l'ordre :

$$0^2 < 5,12^2 < 5,13^2 \qquad \text{réponse : } 5,12^2 < 5,13^2$$

- $0 > -5,12 > -5,13$ $-5,12$ et $-5,13$ sont deux réels négatifs, or sur $] -\infty ; 0]$ la fonction carré est décroissante, donc elle change l'ordre :

$$0^2 < (-5,12)^2 < (-5,13)^2 \qquad \text{réponse : } (-5,12)^2 < (-5,13)^2$$

- $-7,3$ et $5,7$ sont deux nombres réels, avec $-7,3 < 0$ et $5,7 > 0$
or la fonction carré n'est pas monotone sur \mathbb{R}
On ne peut pas passer directement aux images dans l'inégalité.

On essaye de se ramener au cas où les deux nombres dont on veut comparer les carrés sont de même signe.

Ainsi on peut dire que $(-7,3)^2 = 7,3^2$

$0 < 5,7 < 7,3$ or la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$, donc
Elle conserve l'ordre :

$$0^2 < 5,7^2 < (-7,3)^2 \qquad \text{réponse : } 5,7^2 < (-7,3)^2$$