III. Fonction inverse

Vidéo https://youtu.be/Vl2rIbFF22Y

1. Définition

La fonction inverse f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

Remarques :

- $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ désigne l'ensemble des nombres réels sauf 0, c'est-à-dire]-∞ ;0[U]0 ;+∞[. On peut aussi noter cet ensemble $\mathbb{R}^*$.
- La fonction inverse n'est pas définie en 0.

2. Variations

Propriété :

La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Remarque :

La variation d'une fonction ne peut s'étudier que sur un intervalle.
On ne peut donc pas évoquer de décroissance sur]-∞ ; 0[U]0 ; +∞[qui n'est pas un intervalle mais conclure de manière séparée que la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0[$ et décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Démonstration :

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs avec $a < b$. Comparons les images $f(a)$ et $f(b)$ pour savoir si la fonction conserve ou change l'ordre :

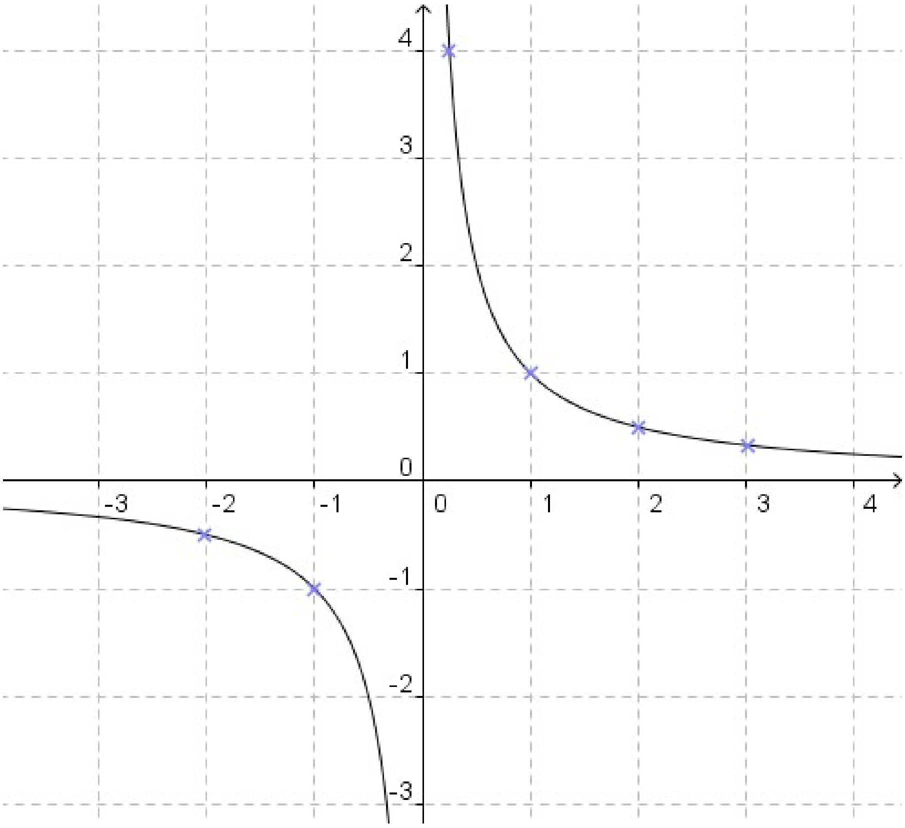
- $f(b)-f(a)=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-b}{ab}$.

Or $a > 0$, $b > 0$ et $a-b<0$. Donc $f(b)-f(a)\leq 0$, par conséquent $f(a)\geq f(b)$: f change l'ordre. f est ainsi décroissante sur $]0;+\infty[$.

- La décroissance sur l'intervalle $]-\infty;0[$ est prouvée de manière analogue.

3. Représentation graphique

x	-2	-1	0,25	1	2	3
$f(x)$	-0,5	-1	4	1	0,5	$\frac{1}{3}$



Remarques :

1) Dans un repère (O, I, J), la courbe de la fonction inverse est une hyperbole de centre O.

2) La courbe de la fonction inverse est symétrique par rapport à l'origine.

5. Comparer des inverses

exemple : comparer les nombres suivants

$\frac{1}{5{,}12}$ et $\frac{1}{5{,}13}$ $\qquad$ $\frac{1}{-5{,}12}$ et $\frac{1}{-5{,}13}$ $\qquad$ $\frac{1}{-7{,}3}$ et $\frac{1}{5{,}7}$

- $0 < 5{,}12 < 5{,}13$ $\qquad$ 5,12 et 5,13 sont deux réels positifs, or sur $[0;+\infty[$ la fonction inverse est décroissante, donc elle change l'ordre :

  réponse : $\frac{1}{5{,}12} > \frac{1}{5{,}13}$

- $0 > -5,12 > -5,13$ $\quad$ $-5,12$ et $-5,13$ sont deux réels négatifs, or sur $]-\infty\,;0]$ la fonction inverse est décroissante, donc elle change l'ordre :

  réponse : $\dfrac{1}{-5,12} < \dfrac{1}{-5,13}$

- $-7,3$ et $5,7$ sont deux nombres réels, avec $-7,3 < 0$ et $5,7 > 0$
  or la inverse carré n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$ (elle n'est pas continue !)
  On ne peut pas passer directement aux images dans l'inégalité.

  En revanche, l'inverse d'un réel négatif est un réel négatif, l'inverse d'un réel positif est un réel positif
  Ainsi on peut dire que $\dfrac{1}{-7,3} < 0$ $\quad \dfrac{1}{5,7} > 0$
  réponse : $\dfrac{1}{-7,3} < \dfrac{1}{5,7}$