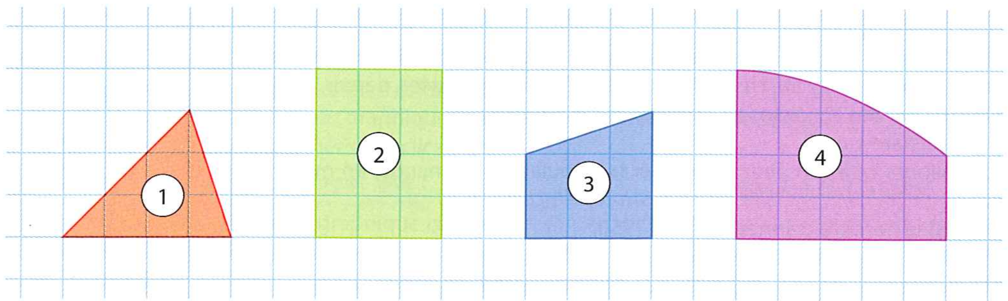
Partir d'un bon pied

Voir corrigés en fin de manuel

A Vrai ou faux ? – Calculer une aire

Voir AP page 161

Ci-dessous, un carreau du quadrillage représente 1 cm :



Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier par un calcul.

1. L'aire du domaine ① est égale à 6 cm².
2. L'aire du domaine ③ est égale à la moitié de l'aire du domaine ②.
3. L'aire du domaine ④ est inférieure à 20 cm².
4. L'aire du domaine ③ est égale à 7,5 .

B QCM – Dériver une fonction

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.

1. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$. Alors pour tout réel x :

a. $f'(x) = 3x - 4$. **b.** $f'(x) = 6x - 4$. **c.** $f'(x) = 6x + 1$.

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 6x^2 + 2x - 1$.
La fonction g est la dérivée de la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

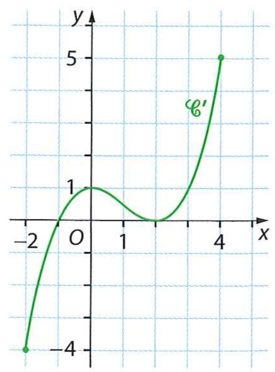
a. $G(x) = 12x + 2$. **b.** $G(x) = 6x^3 + 2x^2 - x$. **c.** $G(x) = 2x^3 + x^2 - x + 3$.

3. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (2x - 3)\,e^{-0,5x}$. Alors pour tout réel x :

a. $h'(x) = -e^{-0,5x}$. **b.** $h'(x) = (-x + 0,5)\,e^{-0,5x}$. **c.** $h'(x) = (3,5 - x)\,e^{-0,5x}$.

C Vrai ou faux ? – Utiliser un graphique

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.
On donne ci-contre la courbe représentative $\mathscr{C}'$ de la fonction dérivée f' .
Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier.



1. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-2 ; 0]$.
2. La fonction f admet un maximum en 2.
3. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur 1.
4. Le tableau de variations de f sur l'intervalle $[-2 ; 4]$ est :

x	-2	-1	4
$f(x)$	↘		↗

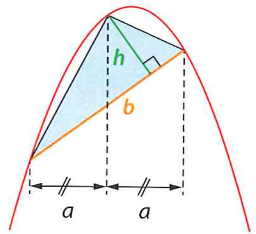
Intégration

D'hier à aujourd'hui

La méthode d'exhaustion

On considère une surface, d'aire S inconnue. On cherche à montrer que l'aire S est égale à un nombre A donné.
La méthode d'exhaustion consiste à encadrer S par des aires de polygones, inscrits et circonscrits à la surface, de façon aussi précise qu'on le souhaite, puis à démontrer, en utilisant l'encadrement, qu'on ne peut avoir ni $S < A$, ni $S > A$. Il reste alors que l'aire S est égale à A. Ce procédé est déjà connu au IVe siècle avant J.-C. Les Grecs ne calculent alors pas directement des aires, mais le rapport de deux aires. Ainsi, Euclide (325-265 av. J.-C.), dans le livre XII de ses *Eléments*, énonce que l'aire du disque de diamètre d est proportionnelle à l'aire du carré de côté d . La démonstration utilise la méthode d'exhaustion, en approchant le cercle par des polygones réguliers inscrits et circonscrits.

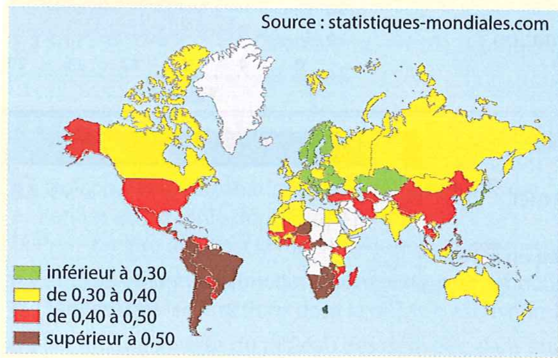
Euclide (vêtu d'une toge rouge) démontre un théorème, avec un compas. Détail de *L'École d'Athènes* (1510), de Raphaël.



Dans son traité *La quadrature de la parabole*, Archimède (287-212 av. J.-C.) démontre que l'aire d'un segment de parabole, c'est-à-dire l'aire de la surface située entre une parabole et l'une de ses cordes, est égale à 4/3 de l'aire du triangle inscrit dans celle-ci, ayant même base b et même hauteur h. L'une de ses preuves est géométrique et utilise des triangles inscrits et la méthode d'exhaustion. Malheureusement, cette démarche nécessite de connaître *a priori* le résultat final. Mais il a aussi fait une démonstration par de la mécanique abstraite : ce rapport de 4/3 aurait été trouvé en *pesant* un arc de parabole.

Voir exercices 119 page 171

Il faut attendre le XVIIe siècle pour que Newton et Leibniz, fondateurs du calcul différentiel et intégral, mettent en évidence la réciprocité des deux problèmes : celui des tangentes, c'est-à-dire la dérivation, et celui des aires, c'est-à-dire l'intégration.



Carte du monde de l'indice de Gini des revenus (2010).

Aujourd'hui, les calculs d'aires et d'intégrales ont de nombreuses applications.
En économie, l'indice de Gini, égal au rapport de deux aires, permet d'étudier la répartition des richesses, des revenus, etc., d'un pays. Il est compris entre 0 et 1. Lorsqu'il est nul, la répartition est égalitaire ; lorsqu'il vaut 1, la répartition est totalement inégalitaire.

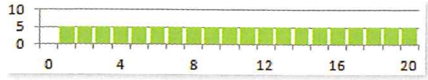
Tout corps plongé dans un flux d'emmerdements pivote de façon à lui offrir sa surface maximale.

Pierre Dac

Activité 1 Approcher une somme TICE

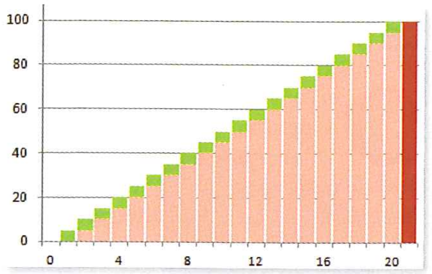
PARTIE A Aire sous une fonction constante : somme de recettes

Une poudre de produit chimique est vendue 5 € le kg.


Graphique 1

1 **a.** Calculer la recette totale si on vend 6 kg de poudre.
b. Quelle est la somme des recettes unitaires de 1 à 20 kg ?

2 **a.** Pour toute vente de x kg de poudre, x variant de 1 à 20 kg, exprimer la recette totale $F(x)$.
Interpréter graphiquement cette recette totale sur le **graphique 1** ci-contre.
b. Retrouver $F(6)$ sur le **graphique 2** ci-contre, puis $F(20)$.
Justifier que le rectangle rouge du **graphique 2** est la somme de tous les rectangles verts du **graphique 2**, ou du **graphique 1**.
Comment se représente $F(x)$ sur ce graphique ?


Graphique 2

3 Que penser de la fonction de recette totale F pour toute quantité x variant de 0 à 20 kg ? Faire le lien avec l'aire d'un rectangle.

PARTIE B Aire sous une fonction affine : somme de coûts marginaux

Pour produire le x-ième kg de poudre, le coût marginal, en centime d'euro par kg, est donné par $c(x)=2x+1$.

1 **a.** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ de cette fonction sur $[0\,;20]$ dans un repère orthogonal.
b. Calculer les coûts marginaux des sept premiers kilogrammes de 1 à 7 kg compris, puis le coût total de ces 7 kg de poudre.

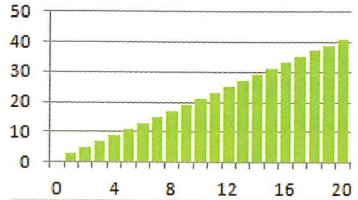


Figure 1

2 À l'aide d'un tableur, calculer les coûts marginaux du 1er au 20e kg produits.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	coût marginal C(x) = 2x + 1 en euro par kg							
2	quantité	0	1	2	3	4	5	6
3	coût marginal		3	5	7	9	11	13
4	coût total	0	3	8	15	24	35	48

Indiquer la formule à saisir en C3 et à recopier vers la droite, pour obtenir les coûts marginaux successifs.

3 **a.** De même, indiquer la formule à saisir en C4 pour obtenir le coût total pour une quantité de x kg par recopie vers la droite.
b. Calculer le coût total pour 10 kg produit.
c. Le coût total est représenté sur la **figure 2**.
À quel type de fonction peut-on penser au vu de la représentation ?

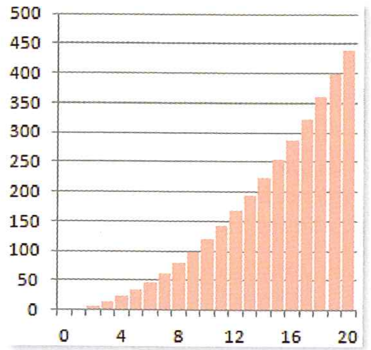


Figure 2

4 On admet que la somme $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
On désire exprimer la somme des coûts marginaux de 1 à n kg :
$$CT(n)=c(1)+c(2)+c(3)+\ldots+c(n).$$
a. Justifier l'écriture ci-contre obtenue à l'aide d'un calcul formel.
b. Calculer le coût total de 20 kg.
c. Faire le lien avec l'aire d'un trapèze, sous la courbe $\mathscr{C}$ tracée en **1** **a.**

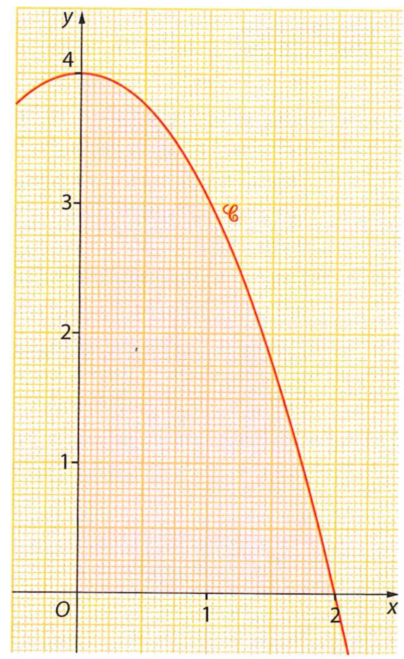
PARTIE C Pour aller plus loin

Reprendre les questions **2** et **3** de la **Partie B**, sur tableur, pour une fonction de coût marginal donnée par :
$$c(x)=0{,}5x^2-8x+33.$$

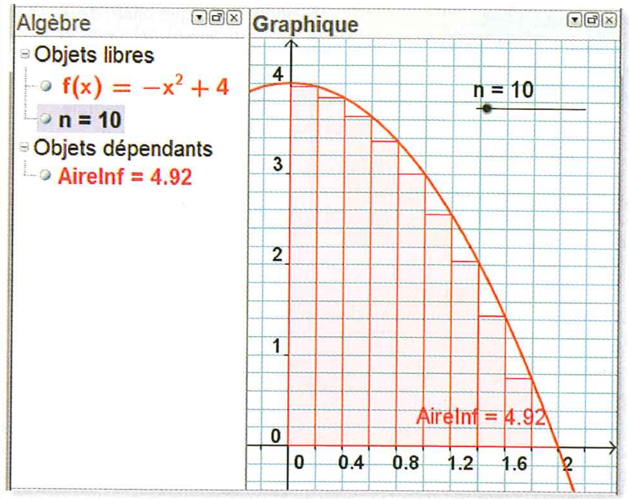
Activité 2 Approcher une aire par des rectangles TICE

On considère la fonction f définie sur $[0\,;2]$ par $f(x)=4-x^2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

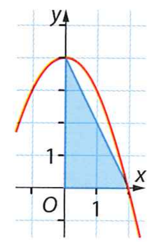
1 On a tracé la courbe $\mathscr{C}$ sur papier millimétré, en prenant 2 cm comme unité. Calculer au mieux l'aire de la partie colorée ci-contre située en dessous de la courbe $\mathscr{C}$.

Figure 1


2 **Approche à l'aide d'un logiciel dynamique**



Ouvrir le fichier ci-dessus, permettant d'approcher l'aire colorée par la somme des aires des rectangles situés en dessous de la courbe $\mathscr{C}$. Le curseur indique le nombre de rectangles de même largeur $\dfrac{2}{n}$ situés sous la courbe $\mathscr{C}$.
Ici, le curseur indique $n=10$, c'est-à-dire 10 rectangles.
a. Quelle est la largeur de ces rectangles ? Indiquer la hauteur du premier, du dernier et du 5e rectangle.
b. Si le curseur indique $n=20$, quelle est la largeur des rectangles ?
Exprimer la hauteur du k-ième rectangle en fonction de k. Lire l'aire obtenue par la formule :
Somme Inférieure [f(x) , 0 , 2 , n] .
c. Placer le curseur en $n=100$. Lire l'aire obtenue.
Comparer cette aire à l'aire trouvée par Archimède (287-212 av. J.-C.) :
« L'aire d'un secteur parabolique est les quatre tiers de l'aire du triangle [*ci-contre en bleu*] inscrit sous la parabole. » Il vérifia expérimentalement cette aire en mesurant la masse d'une plaque métallique de cette forme.



Voir Réinvestir exercice 118 page 171

3 Soit $F(x)=4x-\dfrac{x^3}{3}$. Calculer $F(2)-F(0)$. Comparer à l'aire obtenue en **2** **c.**

Activité 3 Rechercher une fonction de dérivée donnée

1 On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x^2-5x+1$ et $g(x)=3x^2+2x-5$.
a. Vérifier que g est la dérivée de f.
b. Peut-on dire que f est la fonction dont la dérivée est g ? Argumenter la réponse.

2 **a.** Quelles sont les fonctions dont la dérivée est nulle pour tout réel x ?
b. Quelles sont les fonctions dont la dérivée est le nombre 3, quel que soit le réel x ?

3 Par lecture inverse du tableau des dérivées, dans chaque cas, trouver une fonction F ayant pour dérivée la fonction f donnée par :

a. $f(x)=3x^2$ sur $\mathbb{R}$; **b.** $f(x)=\dfrac{-1}{x^2}$ sur $]0\,;+\infty[$; **c.** $f(x)=e^x$ sur $\mathbb{R}$; **d.** $f(x)=\dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

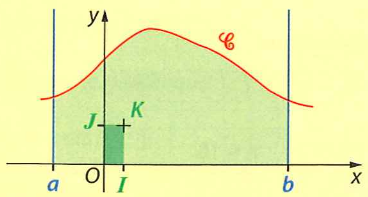
Cours

1 Intégrale d'une fonction

a Définition

Définition Soit **f une fonction continue et positive** sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;I\,;J)$.

L'**aire sous la courbe** est l'aire du domaine limité par la **courbe $\mathscr{C}$**, **l'axe des abscisses** et les **droites verticales** d'équations $x=a$ et $x=b$.



L'aire s'exprime en unité d'aire et l'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$ des unités.

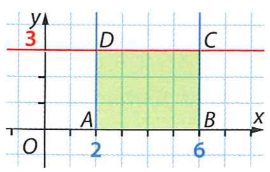
L'intégrale **de f** sur $[a\,;b]$, notée $\int_a^b f(x)\,dx$, est l'**aire sous la courbe $\mathscr{C}$** sur l'intervalle $[a\,;b]$.

Note La notation $\int_a^b f(x)\,dx$ se lit « somme de a à b de f de x dé x ».
On peut penser à une somme de petits rectangles allant de $x=a$ à $x=b$, de largeur dx et de hauteur $f(x)$.

Dans l'écriture de l'intégrale, la variable x est muette : ce pourrait être t ou q …
L'**intégrale** sur un intervalle est un **nombre**.

EXEMPLES

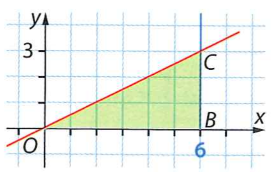
Soit $f(x)=3$, sur $\mathbb{R}$.



$\int_2^6 3\,dx = 3\times(6-2)=12$

L'intégrale est l'aire du rectangle $ABCD$.

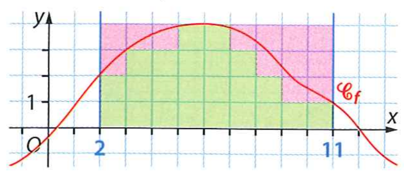
Soit $f(x)=0{,}5x$, sur $\mathbb{R}$.



$\int_0^6 (0{,}5x)\,dx = \dfrac{3\times 6}{2}=9$

L'intégrale est l'aire du triangle OBC.

Soit f donnée par sa courbe $\mathscr{C}$ sur $\mathbb{R}$.



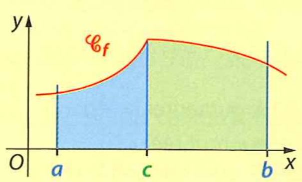
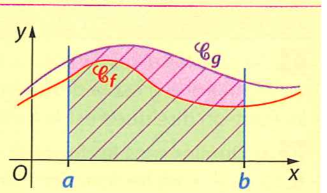
On peut donner une valeur approchée de l'intégrale, en « comptant les carreaux unitaires ».

D'où l'encadrement $23 \leqslant \int_2^{11} f(x)\,dx \leqslant 32$.

Pour une fonction f continue et positive, connue par son expression $f(x)$, la calculatrice fournit une valeur de l'intégrale. Par exemple :

Sur Casio 35 +	Sur TI 83 fr	Sur TI 82 fr en mode « classic »
$\int_1^3(-x^2+10)\,dx$ $\frac{34}{3}$	$\int_1^3(-x^2+10)dx$ ▸Frac $\frac{34}{3}$	intégrFonct(-X^2+10,X,1,3)▸Frac 34/3

b Premières propriétés

Relation de Chasles	Conservation de l'ordre
Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$. Pour tout réel c de $[a\,;b]$: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. 	Soit f et g deux fonctions continues et positives sur $[a\,;b]$, telles que $f(x)\leqslant g(x)$ sur $[a\,;b]$. Alors : $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$. 

Ces propriétés sont immédiates, visualisées par les propriétés géométriques des aires.

Savoir faire

Encadrer une aire

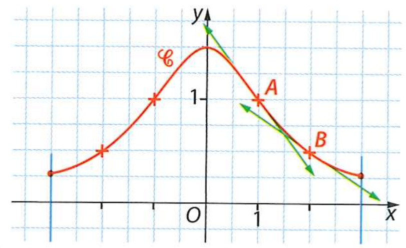
Exercice corrigé

Énoncé

La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est celle d'une fonction f définie sur $[-3\,;3]$, dans un repère d'unité 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.
On s'intéresse à l'aire $\mathscr{A}$, en cm^2, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x=-3$ et $x=3$.

1 En utilisant les éléments géométriques de la courbe, donner un encadrement de cette aire.

2 La fonction f est donnée par $f(x)=\dfrac{3}{x^2+2}$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur arrondie de l'aire $\mathscr{A}$, à 0,01 cm^2 près.



Les tangentes en A et B à la courbe $\mathscr{C}$ sont tracées.
De plus, on admet la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées et le point d'inflexion $A(1\,;1)$.

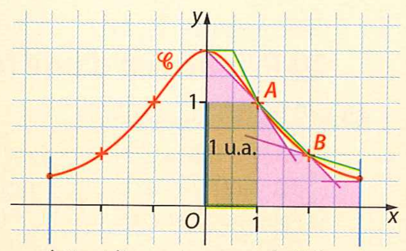
Points méthode

1 L'axe des ordonnées étant axe de symétrie, l'aire du domaine est le double de celle du domaine délimité par l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=3$.
Les tangentes et le point d'inflexion indiquent la concavité de la fonction et ainsi, donnent la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à des sécantes.

2 L'aire cherchée est égale à l'intégrale $\int_{-3}^3 f(x)\,dx$, **multipliée par l'unité d'aire** (notée u.a.) : **1 u.a.** $=$ **1 unité en x** $\times$ **1 unité en y**.

Solution

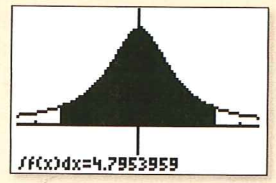
1 En comptant les carreaux, la zone en rose « en dessous de la courbe $\mathscr{C}$ » a une aire de 18 carreaux et l'aire de la zone « au-dessus » est de 20,5 carreaux.
D'où un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$ cherchée :
entre 2×18 et $2\times 20{,}5$ carreaux.



Comme 1 cm^2 est formé de 4 carreaux, on obtient l'encadrement de l'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 : $9\leqslant\mathscr{A}\leqslant 11{,}25$.

2 À l'aide de la calculatrice, on calcule l'intégrale $\int_{-3}^3 f(x)\,dx \approx 4{,}795$:

```
intégrFonct(3/(X²+2),X,-3,3)
                 4.795395945
```



L'unité d'aire étant $1\text{ cm}\times 2\text{ cm} = 2\text{ cm}^2$, alors une valeur arrondie de l'aire est :
$\mathscr{A}\approx 9{,}59\text{ cm}^2$.

Exercice d'application

Voir exercices 24 à 29

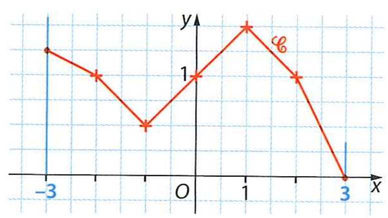
1 On considère la fonction f connue par sa courbe représentative $\mathscr{C}$ ci-contre dans un repère d'unité 1 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.
La courbe $\mathscr{C}$ est formée de segments de droite.

1 Donner la valeur des intégrales suivantes :

a. $\int_{-3}^{-1} f(x)\,dx$; **b.** $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$;

c. $\int_1^3 f(x)\,dx$; **d.** $\int_1^3 f(t)\,dt$.

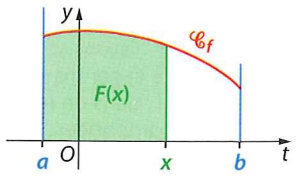
2 En déduire l'aire, en cm^2, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=-3$ et $x=3$.



2 Intégrale et notion de primitive

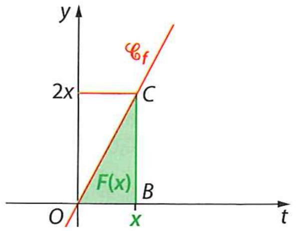
a Lien entre intégrale et dérivée

Théorème admis Si f est une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a\,;b]$, la **fonction F** définie sur $[a\,;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est **dérivable** sur l'intervalle $[a\,;b]$ et **sa dérivée est la fonction f**.
Pour tout réel x de $[a\,;b]$, on a $F'(x)=f(x)$.
De plus, la fonction F est croissante sur $[a\,;b]$.



E X E M P L E

Soit f la fonction définie sur $[0\,;10]$ par $f(t)=2t$.
Sur $[0\,;10]$, la fonction f est continue et positive, donc :
l'intégrale $\int_0^x f(t)\,dt$ existe pour tout réel x de $[0\,;10]$.
Cette intégrale est **l'aire du triangle variable *OBC*, en u.a.**,
d'où : $\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x (2t)\,dt=\frac{1}{2}\times x\times 2x=x^2$.



b Primitives d'une fonction f

Définition et théorème
Une primitive d'une fonction f continue sur $[a\,;b]$ est une fonction F, dérivable sur $[a\,;b]$, telle que la dérivée de F est f.
Pour tout réel x de $[a\,;b]$: $F'(x)=f(x)$.
Si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$, alors : $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

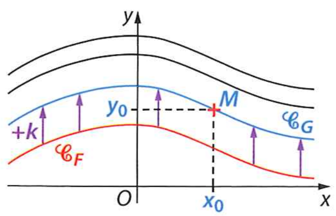
Note Ainsi, dans le cas d'une fonction f continue et positive sur $[a\,;b]$, la fonction F définie sur $[a\,;b]$ par l'intégrale
$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$
est **une primitive de f sur $[a\,;b]$**.

C O N S É Q U E N C E S

- Une fonction G définie sur $[a\,;b]$ par $G(x)=F(x)+k$, où **k est un réel quelconque**, est aussi une primitive de f sur $[a\,;b]$.
On dit qu'une primitive est définie « **à une constante près** ».
F est **une primitive** de f et **toutes les primitives** de f sont de la forme :
$$G(x)=F(x)+k,\ \text{avec } k\in\mathbb{R}.$$
- La primitive qui **s'annule en 0** est définie par l'intégrale $\int_0^x f(t)\,dt$.

P R I M I T I V E S O U S C O N D I T I O N « I N I T I A L E »

Si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$, alors il n'existe **qu'une seule primitive G** prenant la valeur y_0 en x_0, c'est-à-dire telle que : $G(x_0)=y_0$.



E X E M P L E

Soit f telle que $f(x)=3x^2+2x+4$ sur $\mathbb{R}$.
La fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=x^3+x^2+4x$.
F est une **primitive de f** car sa dérivée est $F'(x)=3x^2+2x+4=f(x)$.
$G(x)=x^3+x^2+4x-6$ est la **primitive de f** qui s'annule en 1, car $G(1)=0$.

À l'aide d'un calcul formel
Sur Xcas :

```
1 int(3*x^2+2x+4,x)
```
$$\frac{3\cdot x^3}{3}+\frac{2\cdot x^2}{2}+4\cdot x$$

Sur TI-Nspire™ :

$\int_0^x (2\cdot t)\,dt$ $\quad x^2$

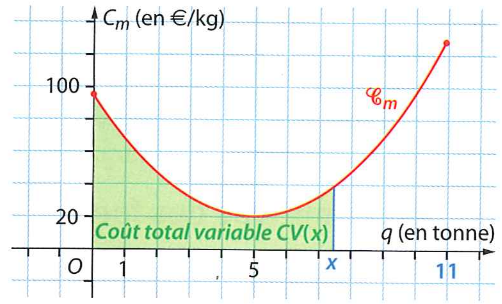
$\int_1^x (3\cdot t^2+2\cdot t+4)\,dt$ $\quad x^3+x^2+4\cdot x-6$

Vérifier et utiliser une primitive

Exercice corrigé

Énoncé

Une entreprise fabrique un produit dont le **coût marginal**, en euro par kg, est : $f(q)=3q^2-30q+95$, pour toute quantité q de 0 à 11 tonnes.
1 Démontrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0\,;11]$ par $F(q)=q^3-15q^2+95q$ est une primitive de f.
2 Pour toute quantité x de $[0\,;11]$, le coût total variable est donné par l'intégrale $CV(x)=\int_0^x f(q)\,dq$.
Sachant que les coûts fixes sont de 7 500 €, déterminer la fonction coût total CT et préciser son unité.



Points méthode

1 Pour démontrer qu'une fonction F est **une primitive** de f sur $[a\,;b]$, on calcule **la dérivée $F'(x)$** et on doit retrouver $f(x)$.
Toutes les primitives de f s'écrivent :
$G(x)=F(x)+k$, avec $k\in\mathbb{R}$.
2 Le coût total est **la primitive** du **coût marginal** qui prend la **valeur des coûts fixes CF en 0**.
Donc $CT(x)=\int_0^x C_m(q)\,dq+CF$.
Dans cette écriture, la variable q est dite « muette ».
Cette intégrale a pour unité le produit de l'**unité des quantités** par l'**unité du coût marginal**.

Solution

1 Soit $F(q)=q^3-15q^2+95q$ sur $[0\,;11]$.
F est une fonction polynôme, dérivable sur $[0\,;11]$, et sa dérivée est :
$$F'(q)=3q^2-30q+95=f(q).$$
Donc **F est une primitive de f** sur $[0\,;11]$.
2 L'intégrale $\int_0^x f(q)\,dq=F(x)-F(0)=x^3-15x^2+95x-0$.
Donc le coût variable est $CV(x)=F(x)$.
Les quantités **q** sont **en tonne** et le coût marginal **$f(q)$** est en **euro par kg**,
donc le coût variable $\int_0^x f(q)\,dq$ s'exprime en millier d'euros (k€) :
1 tonne × **1 €/kg** = 1 000 kg × 1 €/kg = 1 000 € = 1 k€.
Comme les coûts fixes sont de 7 500 €, c'est-à-dire 7,5 k€, alors le coût total est donné, pour toute quantité x de 0 à 11 tonnes, par :
$$CT(x)=F(x)+7{,}5=x^3-15x^2+95x+7{,}5,\ \text{en k€}.$$

Remarque Dans l'écriture d'une fonction, le nom de la variable peut être q ou x ou ... Ainsi, lors de l'écriture de la fonction définie par une intégrale, deux lettres apparaissent : l'une est la variable et l'autre est muette.

Exercices d'application

Voir exercices 39 à 50

2 Le bénéfice marginal d'une entreprise, pour toute quantité x de 0 à 3 tonnes vendues, est donné par :
$$b(x)=(1-x)e^{-x},$$
exprimé en dizaine de milliers d'euros par tonne.
1 Montrer que la fonction F définie sur $[0\,;3]$ par :
$$F(x)=x\,e^{-x}$$
est une primitive de b sur $[0\,;3]$.
2 Sachant que le bénéfice est nul lorsque la quantité vendue est nulle, le bénéfice total est donné par l'intégrale $\int_0^q b(x)\,dx$, pour une quantité q vendue de 0 à 3 tonnes.
Déterminer le bénéfice total $B(q)$ en fonction de q en précisant l'unité.

3 Soit les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=3x^2-4x+3 \quad\text{et}\quad F(x)=x^3-2x^2+3x.$$
1 Montrer que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
2 Déterminer la primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 2.

4 Soit la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par :
$$f(x)=(5-x)e^{-0{,}1x}.$$
1 Montrer que la fonction F définie par :
$$F(x)=(10x+50)e^{-0{,}1x}$$
est une primitive de f sur $[0\,;5]$.
2 Calculer la valeur exacte de l'intégrale $\int_0^5 f(x)\,dx$.

3 Primitives usuelles

a Existence de primitives

Théorème admis

Toute fonction **continue** sur un intervalle $[a\,;b]$ admet des **primitives**.

En particulier, toutes les fonctions **dérivables** admettent des **primitives**. Ainsi, toutes les fonctions usuelles vues en Terminale ES admettent des primitives, mais certaines fonctions n'ont pas de primitive « explicite ».

b Primitives des fonctions usuelles

Définition

Fonction f	Une primitive F	Validité et intervalle de définition
$f(x)=a$	$F(x)=ax$	a réel quelconque et sur tout intervalle de $\mathbb{R}$
$f(x)=x$	$F(x)=\dfrac{x^2}{2}$	sur tout intervalle de $\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$F(x)=\dfrac{x^3}{3}$	sur tout intervalle de $\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$	$F(x)=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	n entier naturel et sur tout intervalle de $\mathbb{R}$
$F(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln(x)$	sur tout intervalle de $]0\,;+\infty[$
$F(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$F(x)=\dfrac{-1}{x}$	sur tout intervalle de $]0\,;+\infty[$ ou de $]-\infty\,;0[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	sur tout intervalle de $\mathbb{R}$

FONCTIONS AVEC EXPONENTIELLE

Soit u une fonction dérivable sur l'intervalle $[a\,;b]$ et u' sa dérivée.
La fonction f définie sur $[a\,;b]$ par $f(x)=u'(x)\times e^{u(x)}$ est continue et admet pour **primitive** $F(x)=e^{u(x)}$.

Remarque La fonction $x\mapsto e^{-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Elle admet donc des primitives, sans forme « explicite ».

Propriété **Linéarité des primitives**

Soit α un réel quelconque et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;b]$ telles que F est une primitive de f et G est une primitive de g.
Alors :
- une primitive du produit de f par un réel α est le produit αF ;
- une primitive de la somme $f+g$ est la somme des primitives $F+G$.

Conséquence Pour trouver une primitive d'une fonction somme de fonctions usuelles, on cherche une primitive de chaque terme de la somme et on les additionne.

En effet :
la dérivée de $F+G$ est $F'+G'=f+g$ et la dérivée de αF est $\alpha F'=\alpha f$.

EXEMPLE

Soit $f(x)=4x^3-2x+3$ sur $\mathbb{R}$. Alors une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est :

$$F(x)=4\times\frac{x^4}{4}-2\times\frac{x^2}{2}+3\times x=x^4-x^2+3x.$$

Déterminer une primitive usuelle

Exercice corrigé

Énoncé

1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=e^{-0{,}1x+2}.$$
Déterminer une primitive de cette fonction f sur $\mathbb{R}$.
2 Pour toute quantité q de 0,2 à 3 tonnes, le coût marginal est donné par : $C_m(q)=\dfrac{4q^2-3q+1}{q}$.
Le coût marginal est exprimé en millier d'euros par tonne.
Pour toute quantité q de $[0{,}2\,;3]$, on note $C(q)$ le coût total, exprimé en millier d'euros.
On sait que le coût total est de 3 000 € pour une quantité d'une tonne : $C(1)=3$.
Exprimer le coût total $C(q)$ en fonction de la quantité q.

Points méthode

1 Pour faire apparaître la forme
$$u'(x)\times e^{u(x)},$$
dont une primitive est :
$$x\mapsto e^{u(x)}\ \text{sur}\ \mathbb{R},$$
on peut écrire :
$$f(x)=e^{ax+b}=\frac{1}{a}\times(a\times e^{ax+b}).$$
Ainsi, **une primitive de** $x\mapsto e^{ax+b}$ est $x\mapsto\dfrac{1}{a}e^{ax+b}$.
Et une primitive de $x\mapsto e^{-x}$ est :
$$x\mapsto -e^{-x}.$$

2 On écrit le quotient en une somme :
$$\frac{ax^2+bx+c}{x}=\frac{ax^2}{x}+\frac{bx}{x}+\frac{c}{x}$$
$$=ax+b+\frac{c}{x}.$$
Comme le **coût marginal** est assimilé à la **dérivée** du coût total, **le coût total** est assimilé à **une primitive** du coût marginal.

Solution

1 On note $u(x)=-0{,}1x+2$.
Donc $u'(x)=-0{,}1$, que l'on fait apparaître :
$$f(x)=\frac{1}{-0{,}1}\times(-0{,}1\times e^{-0{,}1x+2})=-10\times(u'(x)\times e^{u(x)}).$$
Donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est définie par $F(x)=-10\,e^{-0{,}1x+2}$.
2 Pour $q\in[0{,}2\,;3]$, le coût marginal peut s'écrire :
$$C_m(q)=\frac{4q^2-3q+1}{q}=4q-3+\frac{1}{q}.$$
Une primitive de $C_m(q)$ sur $[0{,}2\,;3]$ est définie par :
$$F(q)=4\times\frac{q^2}{2}-3q+\ln(q)=2q^2-3q+\ln(q).$$
Toutes les primitives s'écrivent :
$$G(q)=F(q)+k,\ \text{avec}\ k\in\mathbb{R}.$$
On cherche **LA primitive** $C(q)$ telle que $C(1)=3$, donc on résout :
$$F(1)+k=3 \Leftrightarrow 2\times1^2-3\times1+\ln(1)+k=3$$
$$\Leftrightarrow 2-3+0+k=3$$
$$\Leftrightarrow k=4.$$
Ainsi, le coût total sur $[0{,}2\,;3]$ est $C(q)=2q^2-3q+\ln(q)+4$.

Remarque Le coût marginal est en millier d'euros par tonne (ou euro par kg) et les quantités, en tonne. Donc le coût total est bien en millier d'euros.

Exercices d'application

Voir exercices 52 à 61

5 Dans chaque cas, déterminer **une** primitive de f sur l'intervalle $]0\,;10]$.
a. $f(x)=x^3-4x^2+5x-1$. **b.** $f(q)=\dfrac{q^2+q-4}{q}$.

6 Déterminer **une** primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions f.
a. $f(x)=3\,e^{-x}$. **b.** $f(x)=-2\,e^{2x}+1$.
c. $f(x)=2x-3+4\,e^{-6x}$. **d.** $f(x)=e^{2x}-3\,e^{x}+2$.

7 Déterminer **la** primitive de f sur $[1\,;4]$ qui s'annule en 2 sachant que : $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2-4}{x^2}$.
On écrira $f(x)$ sous forme d'une somme.

8 Le bénéfice marginal, en euro par kilogramme, est donné par : $B_m(q)=\dfrac{3}{q}+q^2-4q+1{,}75$,
où $q\in[0{,}5\,;3]$. La quantité q est exprimée en tonne.
Déterminer le bénéfice total $B(q)$, en millier d'euros, sachant que $B(1)=0$.

9 Le coût marginal d'un produit, en centaine d'euros par kg, est $C_m(q)=e^{-0{,}2q}+0{,}5q+5$, où $q\in[0\,;8]$.
q est exprimé en kg.
Justifier que le coût total est exprimé en centaine d'euros.
Déterminer le coût total de production de q kg, sachant que les coûts fixes se montent à 2 000 €.

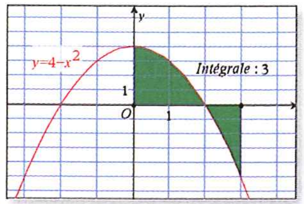
4 Propriétés de l'intégrale

a Intégrale d'une fonction

Définition Soit f une fonction continue sur un intervalle $[\,a\,;\,b\,]$ et **F l'une de ses primitives**, l'**intégrale** de la fonction f sur $[\,a\,;\,b\,]$ est le **nombre** défini par $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

Cette définition ne dépend pas de la primitive de f choisie.

Remarque Une intégrale sur $[\,a\,;\,b\,]$ peut être positive, sans que la fonction soit positive sur $[\,a\,;\,b\,]$.



EXEMPLE

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x^2$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

La fonction f est continue et une primitive sur $\mathbb{R}$ est $F(x) = 4x - \dfrac{x^3}{3}$.

Donc $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(0) = 4\times 3 - \frac{3^3}{3} - 0 = 12 - 9 = 3$.

b Propriétés de l'intégrale

Positivité	Relation d'ordre	Relation de Chasles
Si f est continue et positive sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$, alors l'intégrale est positive. Si $f(x) \geqslant 0$ sur $[\,a\,;b\,]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.	Soit f et g deux fonctions continues sur $[\,a\,;b\,]$ telles que $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[\,a\,;b\,]$. Alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.	Soit f une fonction continue sur un intervalle et a, b et c dans cet intervalle : $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

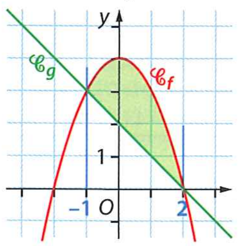
AUTRES PROPRIÉTÉS

- **Linéarité** : Soit f et g deux fonctions continues sur $[\,a\,;b\,]$ et α et β deux réels :
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,\mathrm{d}x = \alpha\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(a) = 0$

et $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

- Soit f et g deux fonctions continues et positives sur l'intervalle $[\,a\,;b\,]$ telles que : $f(x) \geqslant g(x)$, pour tout réel x de $[\,a\,;b\,]$, et $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal.
L'aire, **exprimée en unité d'aire**, du **domaine délimité par les deux courbes** $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'intégrale : $\displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque Souvent, les bornes a et b sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



EXEMPLE

Soit f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = -x + 2$.

Leurs courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent en -1 et en 2, et sur $[\,-1\,;\,2\,]$, la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$.

On calcule la différence : $h(x) = f(x) - g(x) = 4 - x^2 + x - 2 = -x^2 + x + 2$.

Une primitive de h sur $[-1\,;2\,]$ est telle que $H(x) = \dfrac{-x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + 2x$.

Alors, l'aire entre les deux courbes, en unité d'aire, est :

$\displaystyle\int_{-1}^2 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = H(2) - H(-1) = \frac{10}{3} - \frac{-7}{6} = 4{,}5$ u.a.

Calcul à l'aide de Xcas :

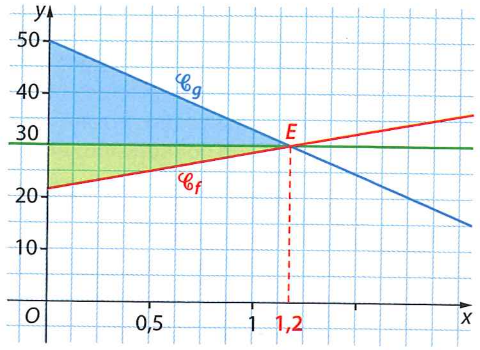
```
1 int(4-x^2-(-x+2),x,-1,2)
9/2
```


Vérifier et utiliser une primitive

Exercice corrigé

Énoncé

La France est un grand producteur de pommes.
Le prix d'équilibre p_0 sur le marché national s'établit à 30 centimes le kg, pour une quantité d'équilibre q_0 de 1,2 million de tonnes produites et vendues.



On note $q_0 = 1{,}2$ la quantité d'équilibre et $p_0 = 30$ le prix d'équilibre du marché.

On modélise la fonction d'offre des producteurs par $f(x) = 21\,\mathrm{e}^{0{,}3x}$ et la fonction de demande des distributeurs par $g(x) = -17x + 50$, pour des quantités x entre 0 et 2 millions de tonnes, les prix $f(x)$ et $g(x)$ étant en centime d'euro par kg.

Le **surplus des « producteurs »** est l'aire (en vert) entre la courbe d'offre $\mathscr{C}_f$ et la droite du prix d'équilibre d'équation $y = p_0$:
$$S_P = \int_0^{q_0} (p_0 - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Le **surplus des « consommateurs »**, ici des distributeurs, est l'aire (en bleu) entre la courbe de demande $\mathscr{C}_g$ et la droite du prix d'équilibre :
$$S_C = \int_0^{q_0} (g(x) - p_0)\,\mathrm{d}x.$$

1 Montrer que les deux surplus s'expriment en dizaine de millions d'euros.

2 Calculer le surplus des producteurs. *Arrondir à deux chiffres significatifs.*

Points méthode

1 Attention aux unités dans les problèmes : l'unité d'un surplus est le produit de l'unité de la quantité par l'unité du prix.

2 On peut décomposer l'intégrale :

$$S_P = \int_0^{q_0} (p_0 - f(x))\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{q_0} p_0\,\mathrm{d}x - \int_0^{q_0} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= p_0 \times q_0 - \int_0^{q_0} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Les deux chiffres significatifs sont les deux premiers chiffres du calcul, autres que 0.

Solution

1 Le prix des pommes est en centime d'euro le kg, soit 0,01 € par kg, et la quantité est en million de tonnes, soit $10^6 \times 1\,000$ kg :
$$0{,}01 \times 10^6 \times 1\,000 = 10 \times 10^6.$$
Donc les surplus s'expriment en dizaine de millions d'euros.

2 On a $p_0 = 30$ et $q_0 = 1{,}2$. Donc le surplus des producteurs est :
$$S_P = 30 \times 1{,}2 - \int_0^{1{,}2} 21\,\mathrm{e}^{0{,}3x}\,\mathrm{d}x = 36 - (F(1{,}2) - F(0)),$$
où **F est une primitive de f sur $[\,0\,;2\,]$**.

Or une primitive de $f(x) = 21\,\mathrm{e}^{0{,}3x}$ est $F(x) = \dfrac{21}{0{,}3}\mathrm{e}^{0{,}3x} = 70\,\mathrm{e}^{0{,}3x}$.

$F(1{,}2) = 70\,\mathrm{e}^{0{,}3\times 1{,}2} \approx 100{,}333$

et $F(0) = 70\,\mathrm{e}^0 = 70$.

D'où $S_P \approx 36 - 100{,}33 + 70 \approx 5{,}667 \approx 5{,}7$.

Le surplus des producteurs est d'environ 57 millions d'euros.

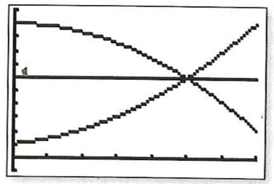
```
∫[0 → 1.2] (30-21×e^(0.3X))dx
                    5.666940981
```

Exercices d'application

Voir exercices 84 et 85

10 Calculer, de même, le surplus des consommateurs dans l'exercice résolu ci-dessus.

11 Sur le marché des fruits exotiques, la fonction d'offre est donnée par :
$f(x) = 0{,}3x^2 + 0{,}5x + 2$
et la fonction de demande par : $g(x) = -0{,}32x^2 + 20$.



La variable x est la quantité de fruits, en tonne, de 0 à 7 tonnes.
$f(x)$ et $g(x)$ sont les prix de vente, selon l'offre et la demande, en euro par kilo.

1 Déterminer la quantité d'équilibre, puis le prix d'équilibre.

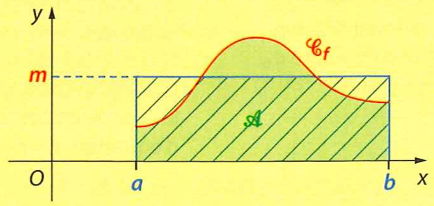
2 Calculer le surplus des producteurs et préciser son unité. Calculer le surplus des consommateurs.
Arrondir à trois chiffres significatifs.

5 Valeur moyenne et applications

a Valeur moyenne d'une fonction continue

Définition Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.
La **valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$ est le nombre m défini par :

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$



Si la fonction f est positive, l'aire $\mathscr{A}$ sous la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'aire du rectangle de base $[a\,;b]$ et de hauteur la valeur moyenne m.

Note La valeur moyenne d'une fonction est dans la même unité que la fonction.

EXEMPLE

Le bénéfice, en millier d'euros, d'une production de q kg de produit de beauté est donné par : $f(q)=-3q^2+6q-1{,}5$,
pour une quantité q de produit, variant de 0 à 2 kg.
La valeur moyenne de ce bénéfice sur $[0\,;2]$ est :

$$m=\frac{1}{2-0}\int_0^2 f(q)\,\mathrm{d}q=\frac{F(2)-F(0)}{2-0},$$

où **F est une primitive de f** sur $[0\,;2]$.
f est une fonction polynôme. Une primitive de f est $F(q)=-q^3+3q^2-1{,}5q$.

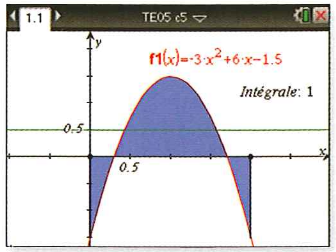
$F(2)=-2^3+3\times2^2-1{,}5\times2=-8+3\times4-3=1$ et $\dfrac{F(2)-F(0)}{2-0}=\dfrac{1-0}{2}=0{,}5$.

Ainsi, la valeur moyenne du bénéfice de 0 à 2 kg est 0,5 millier d'euros.
Pour toute quantité x, la valeur moyenne du bénéfice sur $[0\,;x]$ est :

$$F(x)=\frac{1}{x-0}\int_0^x f(q)\,\mathrm{d}q=\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\frac{-x^3+3x^2-1{,}5x}{x}=-x^2+3x-1{,}5.$$

Attention à ne pas confondre avec le bénéfice moyen pour une quantité x, donné par : $\mathrm{B_M}(x)=\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{-3x^2+6x-1{,}5}{x}=-3x+6-\dfrac{1{,}5}{x}$.

Sur TI-Nspire™ :

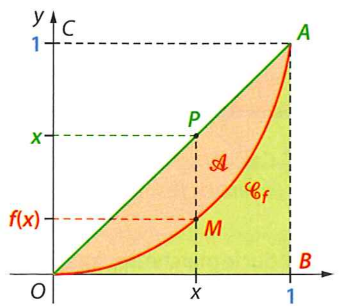


b Une application : indice de GINI

Une application « classique » de l'intégrale est le calcul de l'indice de concentration d'une répartition de biens, patrimoine, revenus ou salaires.
Dans un carré $OBAC$ de côté 1 (ou 100 %), on représente une fonction f de répartition par la **courbe de Lorenz** et le segment $[OA]$, segment de la droite Δ d'équation $y=x$.
L'**aire de concentration** $\mathscr{A}$ est l'aire située entre la courbe de Lorenz $\mathscr{C}$ et le segment $[OA]$ en u. a.
On mesure la concentration par l'**indice de Gini**, rapport de l'aire de concentration par rapport à l'aire du triangle OAB.ww

$$\gamma=\frac{\text{aire de concentration}}{\text{aire du triangle } AOB}=\frac{\mathscr{A}}{0{,}5}=2\mathscr{A}=2\int_0^1(x-f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Comme l'indice de Gini est un rapport entre deux aires de même unité, l'indice de Gini n'a pas d'unité.



Voir Réinvestir 118 page 170, pour une détermination à partir des déciles.

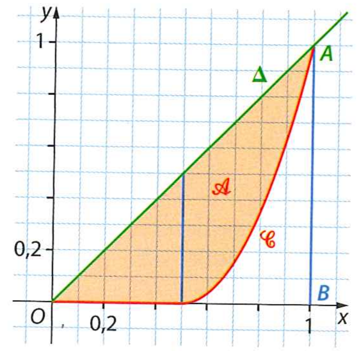
Appliquer le calcul intégral

Exercice corrigé

Énoncé

Dans une région française, la répartition de l'impôt sur le revenu dans l'ensemble des foyers fiscaux est modélisée par la fonction f telle que :
$f(x)=0$ sur $[0\,;0{,}5[$ et $f(x)=4x^2-4x+1$ sur $[0{,}5\,;1]$.

1 a. La fonction f est-elle continue sur $[0\,;1]$?
b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f passe par l'origine et le point $A(1\,;1)$.
c. Montrer que la courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous de la droite Δ d'équation $y=x$.
2 On admet que la courbe $\mathscr{C}$ est une courbe de Lorenz.
Calculer l'aire de concentration située entre les courbes $\mathscr{C}$ et Δ et en déduire l'indice de concentration de l'impôt dans cette région.



Points méthode

1 Pour modéliser une répartition par une fonction f, dont la courbe est une **courbe de Lorenz**, cette fonction doit vérifier certaines conditions :
- $f(0)=0$ et $f(1)=1$;
- f est continue, croissante et convexe sur $[0\,;1]$;
- sur $[0\,;1]$, $f(x)\leqslant x$.

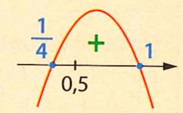
On est amené à étudier sur l'intervalle $[0\,;1]$ la différence : $h(x)=x-f(x)$.

2 Comme la fonction f est continue et définie par intervalle, on calcule l'intégrale sur chaque intervalle et on applique la relation de Chasles.

Penser à vérifier à la calculatrice.

Solution

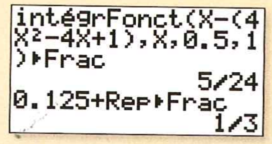
1 a. Sur $[0\,;0{,}5[$, on a $f(x)=0$ et sur $[0{,}5\,;1]$, on a $f(x)=4x^2-4x+1$.
$f(0{,}5)=4\times0{,}5^2-4\times0{,}5+1=1-2+1=0$,
donc la fonction f est continue sur $[0\,;1]$.
b. $0\in[0\,;0{,}5[$, donc $f(0)=0$ et la courbe $\mathscr{C}$ passe par l'origine.
$1\in[0{,}5\,;1]$, donc $f(1)=4\times1^2-4\times1+1=4-4+1=1$. Donc $A\in\mathscr{C}$.
c. Sur $[0\,;0{,}5]$, $h(x)=x-f(x)=x-0=x$, positif.
Sur $[0{,}5\,;1]$, $h(x)=x-f(x)=x-(4x^2-4x+1)=-4x^2+5x-1$.
On étudie le signe de ce polynôme de degré 2 : $\Delta=25-16=9$,
l'équation $h(x)=0$ a deux solutions 1 et $\dfrac{1}{4}$,
et sur $[0{,}5\,;1]$, la différence est positive.
Donc sur $[0\,;1]$, on a $f(x)\leqslant x$.
La courbe $\mathscr{C}$ est située en dessous de la droite Δ sur $[0\,;1]$.



2 L'aire de concentration est :

$$\mathscr{A}=\int_0^1(x-f(x))\,\mathrm{d}x=\int_0^{0{,}5}x\,\mathrm{d}x+\int_{0{,}5}^1 h(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\times0{,}5^2+\int_{0{,}5}^1 h(x)\,\mathrm{d}x.$$

D'où $\mathscr{A}=0{,}125+H(1)-H(0{,}5)$, où **$H$ est une primitive de h** sur $[0{,}5\,;1]$.
Or $H(x)=\dfrac{-4x^3}{3}+\dfrac{5x^2}{2}-x$;
donc $H(1)=\dfrac{1}{6}$ et $H(0{,}5)=-\dfrac{1}{24}$.



D'où l'aire de concentration :

$$\mathscr{A}=0{,}125+H(1)-H(0{,}5)=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{1}{3}.$$

Ainsi, l'indice de Gini de l'impôt sur le revenu est $\gamma=2\times\dfrac{1}{3}\approx0{,}667$.

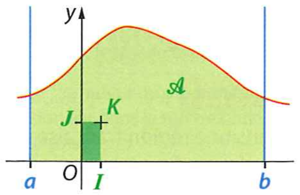
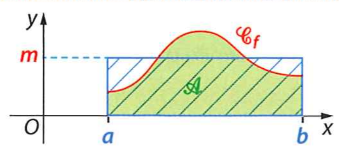
Exercices d'application

Voir exercices 92 et 93

12 La fonction de répartition du patrimoine pour un pays est donnée par : $\begin{cases} f(x)=0,\ \text{pour } 0\leqslant x<0{,}4 \\ f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{(x-0{,}4)}-1}{\mathrm{e}^{0{,}6}-1} \text{ sur } [0{,}4\,;1]. \end{cases}$

On rappelle que $\mathrm{e}^{0{,}6}-1$ est un nombre.
1 Justifier que f est une fonction continue sur $[0\,;1]$.
2 Montrer qu'une primitive de f sur l'intervalle $[0{,}4\,;1]$ est F telle que : $F(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{(x-0{,}4)}-1}{\mathrm{e}^{0{,}6}-1}$.
3 a. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{0{,}4}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.
b. Utiliser ce résultat pour obtenir l'indice de Gini de cette répartition.

Faire le point

Capacités	Mise en œuvre
Comprendre le lien entre l'intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$.	La fonction f est continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, de courbe $\mathscr{C}$. L'intégrale de f sur $[a;b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$, est l'**aire sous la courbe** $\mathscr{C}$ sur $[a;b]$. La courbe $\mathscr{C}$ est située **au-dessus de l'axe des abscisses.** Cette aire, en unité d'aire, est l'aire du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abcsisses et les droites verticales d'équations $x=a$ et $x=b$. 
Faire le lien entre primitive, fonction et dérivée.	Si f est une **fonction continue** sur $[a;b]$, alors la **fonction F** définie sur $[a;b]$ par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est **dérivable** sur l'intervalle $[a;b]$ et **la dérivée de F est la fonction f**. Pour tout réel x de $[a;b]$, on a : $F'(x)=f(x)$. **La fonction F est une primitive de f sur $[a;b]$.**
Calculer une intégrale, connaissant une primitive.	Si **F est une primitive** d'une fonction f sur l'intervalle $[a;b]$, alors : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$.
Écrire toutes les primitives d'une fonction **et la primitive répondant à une condition initiale.**	▸ Si f est une fonction **continue** sur $[a;b]$, alors elle admet des primitives. ▸ Si F est une primitive de f, **alors toutes les primitives G de f** s'écrivent, pour tout réel x de $[a;b]$: $G(x)=F(x)+k$, avec $k\in\mathbb{R}$. ▸ Il n'existe qu'une seule primitive d'une fonction f prenant **la valeur y_0 en x_0**. On l'obtient en cherchant : $k=y_0-F(x_0)$.
Déterminer une primitive pour des fonctions « usuelles » du programme de Terminales ES/L.	Toutes les fonctions continues sur un intervalle admettent des primitives, mais on ne peut pas toujours en déterminer une forme « explicite ». ▸ On peut toujours déterminer une primitive d'une fonction polynôme. ▸ Une primitive de $x\mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$ est la fonction $x\mapsto \ln(x)$. Une primitive de $x\mapsto \frac{1}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$ ou sur $]-\infty;0[$ est $x\mapsto \frac{-1}{x}$. ▸ Une primitive de $x\mapsto u'(x)\times e^{u(x)}$ sur $\mathbb{R}$ est $x\mapsto e^{u(x)}$. En particulier, une primitive de $x\mapsto e^{ax+b}$ est $x\mapsto \frac{1}{a}e^{ax+b}$, a non nul.
Connaître les propriétés de l'intégrale, f et g étant des fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$.	▸ **La relation de Chasles : pour tout réel c de $[a;b]$** $\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx$. ▸ **La conservation de l'ordre** Si $f(x)\leqslant g(x)$ sur $[a;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx$. Cette relation est utile pour déterminer un encadrement d'une intégrale. ▸ **La linéarité** α et β étant deux réels, $\int_a^b(\alpha f(x)+\beta f(x))\,dx=\alpha\int_a^b f(x)\,dx+\beta\int_a^b g(x)\,dx$. Cette relation est utile pour calculer l'aire entre deux courbes.
Calculer la valeur moyenne d'une fonction f continue sur $[a;b]$.	La **valeur moyenne** de f sur l'intervalle $[a;b]$ est le nombre m défini par : $m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. 

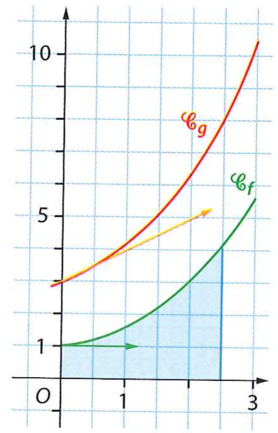
Faire le point

QCM

Voir corrigés en fin de manuel

Pour chaque question, indiquer la seule bonne réponse.

Pour les questions **13** à **15**, on considère les deux fonctions f et g sur $[0;3]$, représentées par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ci-contre, et telles que $g'(x)=f(x)$.



13 L'intégrale $\int_0^2 f(x)\,dx$ est :
a. un nombre positif. **b.** une fonction. **c.** un domaine sous la courbe $\mathscr{C}_f$.

14 On peut confirmer graphiquement que g est une primitive de f car :
a. $f'(0)=0$. **b.** $g'(0)=1$. **c.** $g(0)=3$.

15 L'aire du domaine mis en couleur est égale, en unité d'aire, à :
a. environ 10. **b.** $g(2,5)$. **c.** environ 5.

16 Soit F une primitive de f sur $[a;b]$ et $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.
a. Si $f(x)$ est positive sur $[a;b]$, alors F est croissante sur $[a;b]$.
b. Si $F(x)$ est positive sur $[a;b]$, alors la courbe $\mathscr{C}_f$ est située au-dessus de l'axe des abscisses.
c. Si $f(x)$ s'annule en c sur $[a;b]$, alors F admet un maximum en $x=c$.

17 Une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f telle que $f(x)=x^2+4x+1$ est la fonction F telle que :
a. $F(x)=2x+4$. **b.** $F(x)=\frac{1}{3}(x+2)^3-3x$. **c.** $F(x)=x^3+2x^2+x$.

18 Parmi les fonctions suivantes, laquelle est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f définie par $f(x)=e^{3x}$:
a. $F(x)=e^{3x}$. **b.** $F(x)=\frac{1}{3}e^{3x}+5$. **c.** $F(x)=3e^{3x}+5$.

19 La primitive sur $\mathbb{R}$ de f telle que $f(x)=0,5x+1+e^{0,5x}$, qui s'annule en 0, est la fonction F telle que :
a. $F(x)=0,25x^2+x-2+2e^{0,5x}$. **b.** $F(x)=0,25x^2+x+e^{0,5x}$. **c.** $F(x)=0,25x^2+x+2e^{0,5x}$.

20 L'intégrale $\int_1^2\left(2x-\frac{1}{x}\right)dx$ est égale à :
a. $3-\ln(2)$. **b.** $3,75$. **c.** $4+\ln(2)$.

21 La fonction f est telle que, sur $[-1;2]$, on a $f(x)\leqslant 2x+1$. Alors $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$:
a. est égale à 3. **b.** peut être négative. **c.** est toujours positive.

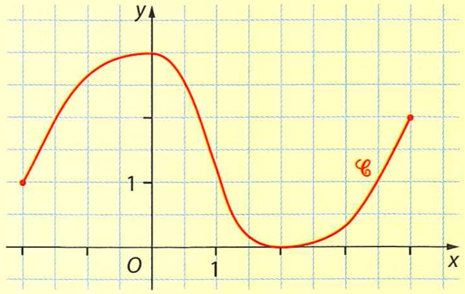
22 La valeur moyenne de $x\mapsto\frac{1}{x}$ sur $[1;e]$ est :
a. $\frac{1}{e-1}$. **b.** $e+1$. **c.** $0,5819767069$.

→Les exercices portant un numéro jaune sont corrigés à la fin du manuel.

1 Intégrale d'une fonction

23 Vrai ou faux ?

La fonction f est définie sur $[-2\,;4]$ par sa courbe représentative $\mathscr{C}$.



Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifier la réponse.

1 $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{4} f(t)\,dt$.

2 $\int_{-2}^{0} f(x)\,dx \geqslant 4$.

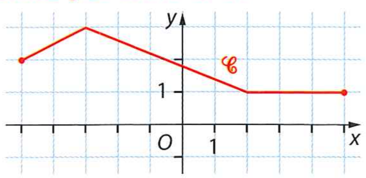
3 $\int_{2}^{4} f(x)\,dx \leqslant 2$.

4 $\int_{0}^{2} f(x)\,dx \leqslant 2$.

5 $\int_{-2}^{1} f(x)\,dx \geqslant 6$.

24 Fonction affine par morceaux

La fonction f est définie sur $[-5\,;5]$ par sa courbe représentative $\mathscr{C}$.



a. Calculer les intégrales :

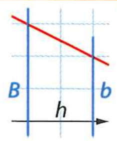
$\int_{-5}^{-3} f(x)\,dx$; $\int_{-3}^{2} f(x)\,dx$ et $\int_{2}^{5} f(x)\,dx$.

b. En déduire la valeur de

$\int_{-5}^{5} f(x)\,dx$.

Aide L'aire d'un trapèze de bases b et B et de hauteur h est :

$\mathscr{A} = \frac{1}{2} \times (h) \times (b + B)$.



25 Segments de droite

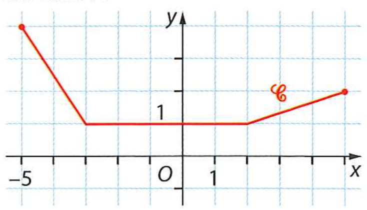
La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est formée de segments.

Elle représente une fonction f.

Préciser l'intervalle de définition.

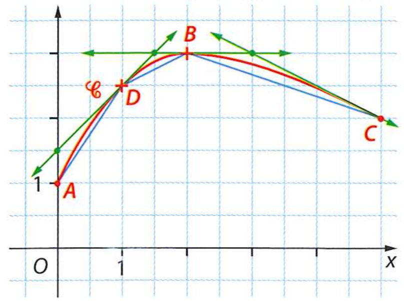
Calculer l'intégrale

$\int_{-5}^{5} f(t)\,dt$.



26 Justifier un encadrement d'une intégrale

On considère une fonction f connue par sa courbe représentative $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\,;5]$, et les tangentes en B, C et D.



1 Justifier que la fonction est concave.

Que peut-on en déduire pour la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport aux segments $[AD]$, $[DB]$ et $[BC]$?

2 a. En utilisant au mieux le graphique, justifier les encadrements : $4{,}5 \leqslant \int_{0}^{2} f(x)\,dx \leqslant 4{,}75$

et $7{,}5 \leqslant \int_{2}^{5} f(x)\,dx \leqslant 8$.

b. En déduire un encadrement de $\int_{0}^{5} f(x)\,dx$.

27 Déterminer l'unité d'aire

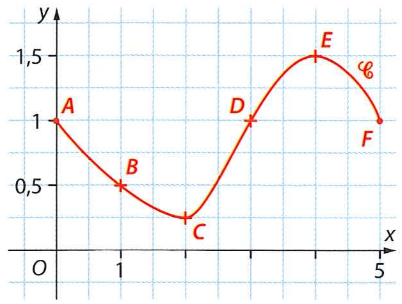
Dans chaque cas, calculer l'unité d'aire, en cm^2, dans un repère orthogonal du plan.

a. 0,5 cm représente 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 2 unités sur l'axe des ordonnées ;

b. 1 cm représente 2 unités sur l'axe des abscisses et 5 unités sur l'axe des ordonnées.

28 Donner une valeur approchée en u.a.

La fonction f est connue par sa courbe représentative $\mathscr{C}$ et quelques points.



En expliquant la démarche, donner une valeur approchée de l'intégrale $\int_{0}^{5} f(x)\,dx$. En déduire une valeur approchée de l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ sur $[0\,;5]$ en u.a.

29 Calculer la valeur exacte d'une aire

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}5x + 1\ , & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x - 4\ , & \text{si } x > 2\,. \end{cases}$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

1 Tracer la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-1\,;4]$.

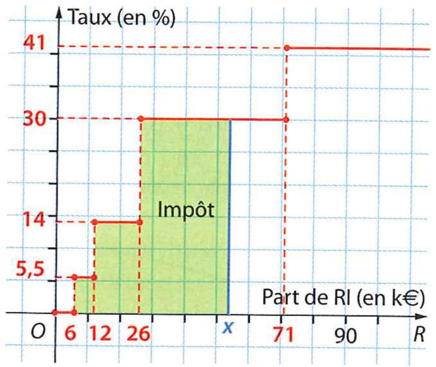
La fonction f est-elle continue et positive sur $\mathbb{R}$?

2 Calculer $\int_{-1}^{4} f(x)\,dx$.

3 En déduire l'aire, en cm^2, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = -1$ et $x = 4$.

30 Calculer un impôt par tranches

Le graphique ci-dessous indique les tranches de revenu imposable par part, arrondies à 1 millier d'euros, et le taux marginal d'imposition.



1 a. Justifier que l'impôt, en k€, pour un revenu imposable R de 26 000 € est : $IR = 6 \times 0{,}055 + (26 - 12) \times 0{,}14$.

b. Calculer le montant de l'impôt pour une part de revenu imposable de 71 k€.

2 Soit x un revenu imposable dans la tranche au taux marginal de 30 %.

a. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_{26}^{x} 0{,}3\,dR$.

b. Exprimer cette intégrale en fonction de x.

c. En déduire l'expression de l'impôt IR en fonction du revenu x dans $[26\,;71]$.

31 Aire en utilisant la calculatrice

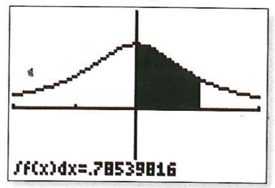
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$.

$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative.

1 En utilisant la calculatrice, vérifier le résultat ci-contre.

Lire une valeur arrondie de l'intégrale

$\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ à 10^{-3} près.



Aide Entrer $f(x)$ en Y1, tracer la courbe, puis :

- TI™ : 2nde trace 7: ∫f(x)dx
- Casio : SHIFT G-Solv ▷ ∫dx

et préciser les bornes a et b de l'intégrale.

2 En déduire une valeur approchée de l'aire, en cm^2, du domaine limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = 0$ et $x = 1$, dans le cas où les unités graphiques du repère orthogonal sont :

a. 1 cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées ;

b. 2 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.

32 Aire sous la courbe

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;0]$ par : $f(x) = (x + 2) \times e^{-x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation dans un repère orthonormé d'unités 1 cm.

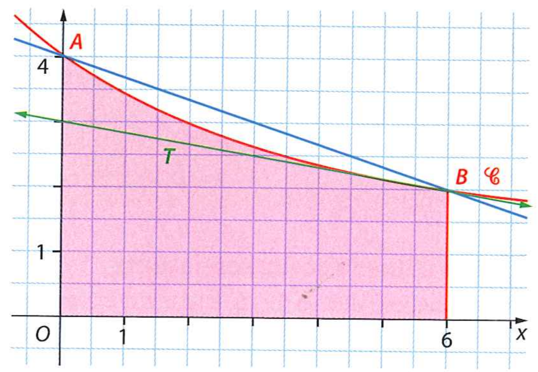
1 Justifier que f est continue et positive sur $[-2\,;0]$.

2 À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur arrondie à 0,01 cm^2 près de l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$.

33 Utiliser des positions relatives

Soit la fonction f définie sur $[0\,;6]$ par : $f(x) = \frac{24}{x + 6}$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative, A et B les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses 0 et 6 et T la tangente en B.



1 Calculer la dérivée $f'(x)$. En déduire le sens de variation de la fonction f et sa convexité.

2 La droite (AB) a pour équation $y = \frac{-1}{3}x + 4$.

a. Exprimer $d(x) = f(x) - \left(\frac{-1}{3}x + 4\right)$ en fonction de x et étudier le signe de $d(x)$ sur $[0\,;6]$. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et du segment $[AB]$ sur $[0\,;6]$.

b. Justifier que $15 \leqslant \int_{0}^{6} f(x)\,dx \leqslant 18$.

3 En utilisant la calculatrice, calculer la valeur arrondie de l'intégrale $\int_{0}^{6} f(x)\,dx$ à 0,01 près.

2 Intégrale et notion de primitive

34 Vrai ou faux ?

1 La dérivée de la fonction F définie sur $[0\,;10]$ par $F(x)=\int_0^x t^2\,dt$ est la fonction $x\mapsto x^2$.

2 La fonction cube est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction carré.

3 La fonction F définie sur $[1\,;+\infty[$ par :
$F(x)=\int_1^x t\,dt$ est la primitive de la fonction f, définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=x$, qui s'annule en 1.

4 Soit f une fonction continue positive sur $[0\,;+\infty[$ et F une fonction dont la dérivée est f.
Alors, $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.

35 QCM

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.
Pour chaque question, donner toutes les bonnes réponses.

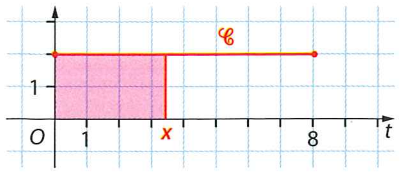
1 Sur $\mathbb{R}$, si $f(x)=e^{-x}$, alors une primitive F de f est définie par :
a. $F(x)=e^{-x}$. **b.** $F(x)=-e^{-x}$.
c. $F(x)=-e^{-x}-2$. **d.** $F(x)=3-e^{-x}$.

2 Sur $\mathbb{R}$, si $f(x)=2x-3$, alors une primitive F de f est définie par :
a. $F(x)=(x-1)(x-2)$. **b.** $F(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$.
c. $F(x)=x^2-3x-10$. **d.** $F(x)=(x-5)(x+2)$.

3 Sur $\mathbb{R}$, si $f(x)=x^2$, alors la primitive F de f qui s'annule en 1 est définie par :
a. $F(x)=x^2-1$. **b.** $F(x)=x^3-1$.
c. $F(x)=\frac{x^3}{3}-1$. **d.** $F(x)=\frac{x^3-1}{3}$.

36 Cas d'une fonction constante

1 Soit la fonction f définie sur $[0\,;8]$ par $f(t)=2$ et représentée par la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous :

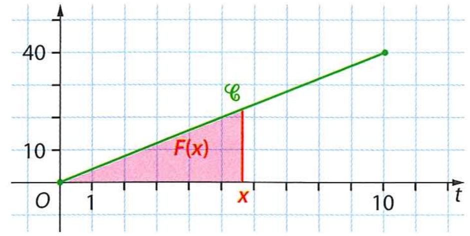


a. Interpréter graphiquement l'intégrale :
$$F(x)=\int_0^x 2\,dt,\ \text{où } x\in[0\,;8].$$
b. Déterminer $F(x)$ en fonction de x.

2 Soit x un réel quelconque et k un nombre strictement positif. Interpréter graphiquement l'intégrale $F(x)=\int_0^x k\,dt$, pour $x\in\mathbb{R}$. Exprimer $F(x)$ en fonction de x.

37 Cas d'une fonction linéaire

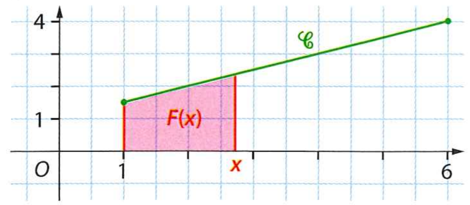
La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est celle d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;10]$.



a. Exprimer $f(t)$ en fonction de la variable t.
b. Soit x un réel de $[0\,;10]$. En s'appuyant sur le graphique, calculer l'intégrale $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$.
c. Justifier que la fonction g définie sur $[0\,;10]$ par $g(x)=2x^2+2$ a la même dérivée que F.

38 Cas d'une fonction affine

La fonction f définie sur $[1\,;6]$ par $f(x)=1+0{,}5x$ est représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}$:



Pour tout réel x de $[1\,;6]$, on pose $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$.

1 a. Montrer que $F(x)=0{,}25x^2+x-1{,}25$.
b. Calculer $F(6)$.

2 Vérifier que la fonction F est la primitive de f sur $[1\,;6]$ qui s'annule en 1.

3 Par considération graphique, préciser le sens de variation de la fonction F sur $[1\,;6]$.

39 Justifier des primitives

On a réalisé, à l'aide du logiciel *Xcas*, la recherche d'une primitive F d'une fonction f sur $\mathbb{R}$.
Pour chaque ligne de commande :
a. Donner les expressions des fonctions f et F.
b. Justifier que la fonction F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

```
1 int(2*x^3+4*x-1,x)
  (1/2)·x^4+2·x^2-x
2 int((x-1)*exp(2*x),x)
  (2·x-3)·exp(2·x)/4
3 int((x^2+1)*exp(-x),x)
  (-x^2-2·x-3)·exp(-x)
```


Pour les exercices 40 à 45
Vérifier des primitives

On donne des fonctions f et F définies sur un intervalle. Montrer que la fonction F est une primitive de f sur l'intervalle donné.

40 Sur $\mathbb{R}$: $f(x)=3x^2-12x+14$
et $F(x)=(x-2)^3+2x+1$.

41 Sur $]0\,;+\infty[$: $f(x)=9x^2-\frac{4}{x^2}$
et $F(x)=3x^3+\frac{4}{x}+1$.

42 Sur $\mathbb{R}$: $f(x)=\frac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$ et $F(x)=\frac{x+2}{x^2+1}$.

43 Sur $\mathbb{R}$: $f(x)=(-0{,}2x+1{,}9)\times e^{-0{,}1x}$
et $F(x)=(2x+1)\times e^{-0{,}1x}$.

44 Sur $]0\,;+\infty[$: $f(x)=4x^3-3+\frac{1}{x}$
et $F(x)=x^4-3x+\ln(x)$.

45 Sur $]0\,;+\infty[$: $f(x)=2\ln x+\frac{3}{x}+3$
et $F(x)=(2x+3)\ln(x)+x$.

46 Lien entre primitive et intégrale

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=x^2-x+1.$$

1 a. Justifier que f est positive sur $\mathbb{R}$.
b. Vérifier que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :
$F(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x$ est une primitive de f.

2 a. On a calculé l'intégrale : $\int_1^2 f(t)\,dt$.
$$\int_1^2 (t^2-t+1)\,dt \qquad \frac{11}{6}$$
Justifier le résultat obtenu.
b. Calculer l'intégrale $\int_{-2}^3 f(t)\,dt$.

3 a. Exprimer, en fonction de x, l'intégrale $\int_1^x f(t)\,dt$.
b. Déterminer la primitive de f qui s'annule en 1.

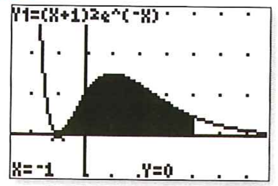
47 Calculer des intégrales

1 Soit les fonctions f et F définies sur $[0\,;4]$ par :
$f(x)=(0{,}5x+1{,}5)e^{-0{,}5x}$ et $F(x)=-(x+5)e^{-0{,}5x}$.
a. Justifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
b. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^4 f(x)\,dx$.
c. Vérifier le résultat obtenu à la question **b.** en utilisant la calculatrice.

2 Reprendre les questions précédentes avec :
$f(x)=(2x-x^2)e^{-x}$ et $F(x)=x^2e^{-x}$.

48 Interpréter une aire

La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre, obtenue à la calculatrice, a pour équation :
$$y=(x+1)^2e^{-x} \text{ sur } \mathbb{R}.$$
La grille de l'écran est une grille unitaire.



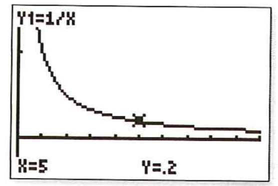
1 Exprimer l'aire du domaine noirci $\mathscr{D}$, en unité d'aire, à l'aide d'une intégrale.

2 Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$F(x)=(-x^2-4x-5)e^{-x}$$
est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

3 En déduire l'aire exacte, en unité d'aire, du domaine $\mathscr{D}$. Puis donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

49 Calculer une aire sous une courbe

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par :
$$f(x)=\frac{1}{x},$$
de courbe représentative $\mathscr{C}$, ci-contre.



1 a. Montrer que la fonction $F: x\mapsto \ln(x)$ est une primitive de f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.
b. En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x=1$ et $x=2$.
c. Calculer l'intégrale $\int_1^4 f(t)\,dt$.
En donner une interprétation graphique.

2 a. Montrer que $\int_1^9\left(\frac{1}{t}\right)dt=2\int_1^3\left(\frac{1}{t}\right)dt$.
b. Pour $a>0$, montrer que :
$$\int_1^{a^2}\left(\frac{1}{t}\right)dt=2\int_1^a\left(\frac{1}{t}\right)dt.$$

50 Vérifier un coût total

Une entreprise fabrique entre 60 et 200 cafetières expresso par jour.
On estime que lorsqu'elle produit q cafetières, le coût marginal de production associé, en euro par cafetière, est :
$C_m(q)=0{,}015q^2-1{,}78q+137$, où $60\leqslant q\leqslant 200$.

1 Sachant que les coûts fixes sont de 2 000 €, montrer que la fonction coût total est définie sur $[60\,;200]$ par :
$$C(q)=0{,}005\,q^3-0{,}89\,q^2+137\,q+2\,000.$$

2 Quel est le coût total de fabrication de 150 cafetières ?

3 Primitives usuelles

51 QCM

Donner toutes les bonnes réponses.

1 Une primitive de $x \mapsto \dfrac{-1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$ est :

a. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.   b. $x \mapsto \ln(x)$.   c. $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$.

2 Une primitive de $x \mapsto e^{0,5x}$ sur $\mathbb{R}$ est :

a. $x \mapsto e^{0,5x}$.   b. $x \mapsto 2e^{0,5x}+1$.

c. $x \mapsto e^{0,5x}-1$.   d. $x \mapsto 2e^{0,5x}-1$.

3 Les primitives de $x \mapsto x^3$ sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions :

a. $x \mapsto \dfrac{x^4}{4}+k$;   b. $x \mapsto 3x^2+k$;   c. $x \mapsto \dfrac{x^4}{3}+k$.

Pour les exercices 52 à 61
Déterminer des primitives

Déterminer une primitive F de la fonction f.

52 $f(x)=2x^3-x^2+4x+1$ sur $\mathbb{R}$.

53 $f(x)=2(x-4)^2+1$ sur $[0\,;10]$.

54 $f(x)=2e^x-3e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

55 $f(x)=0,1x+2e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

56 $f(x)=3e^{2x}-4e^x+1$ sur $\mathbb{R}$.

57 $f(x)=0,3+5e^{-0,2x}$ sur $\mathbb{R}$.

58 $f(x)=1,2x+10+3,2e^{0,5x}$ sur $\mathbb{R}$.

59 $f(x)=2e^{0,5x+1}-e^{-0,5x+2}$ sur $\mathbb{R}$.

60 $f(x)=3x^2+x-2+\dfrac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

61 $f(x)=\dfrac{0,3x^3-2x+1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

62 Primitives sous condition

Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x^2-10x+40.$$

a. Déterminer toutes les primitives de f sur $[0\,;+\infty[$.

b. Déterminer la primitive G de f telle que $G(5)=8$.

c. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^5 f(t)\,dt$.

63 Coût total à partir d'un coût marginal

Un coût marginal, en millier d'euros par millier d'objets, est donné par $C_m(q)=3q^2-12q+13$, où la quantité q, en millier, appartient à $[0\,;3]$.

Déterminer le coût total de production de q milliers d'objets, sachant que les coûts fixes se montent à 1 000 €.

64 Bénéfice marginal et bénéfice total

Pour une production et vente de x tonnes d'une poudre alimentaire, le bénéfice marginal de fabrication, en euro par kg, est :

$$f(x)=1+3e^{-x}, \text{ où } x \in [0\,;6].$$

1 Sachant que le bénéfice s'annule pour une tonne de poudre, déterminer le bénéfice total $B(x)$.

Justifier que le bénéfice est en millier d'euro.

2 a. Étudier le sens de variation de B sur $[0\,;6]$.

b. Faire le lien entre le sens de variation de la fonction B et le signe de la fonction f.

c. Calculer le bénéfice total pour 6 tonnes de poudre.

65 Production et capital

La production dépend de l'investissement.

Pour tout capital x de 0 à 5 millions d'euros, la production marginale est donnée, en tonne par million d'euros, par :

$$p(x)=\exp\left(-\frac{x}{500}\right), \text{ où } x \in [0\,;5].$$

1 a. Déterminer une primitive de p sur $[0\,;5]$.

b. Déterminer la primitive de p qui prend la valeur 0 en 0.

2 a. Déduire de **1** la production P, exprimée en tonne, en fonction du capital x investi, sachant que la production est nulle pour un investissement nul.

b. Calculer la production pour un investissement de 5 millions d'euros.

c. Justifier le sens de variation de la production. Étudier la convexité de la fonction P à partir de la fonction p.

66 Revenu

Le revenu marginal, en euro par unité, pour la vente d'un produit est :

$$f(x)=50-x+42e^{-0,7x},$$

où x est la quantité, en millier d'objets, dans $[0\,;50]$.

1 Calculer $f'(x)$.

En déduire le sens de variation de f sur $[0\,;50]$.

2 Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0\,;50]$.

Interpréter économiquement le résultat.

3 Déterminer le revenu pour la vente de x milliers d'objets, sachant que le revenu est nul lorsque $x=0$.

4 Propriétés de l'intégrale

67 Vrai ou faux ?

Soit f une fonction continue sur $[-2\,;2]$, ayant pour primitive F sur $[-2\,;2]$.

a. Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ est un nombre négatif, alors l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{0} f(x)\,dx$ est un nombre positif.

b. L'intégrale $\displaystyle\int_{2}^{-1} f(x)\,dx$ n'existe pas.

c. Pour tout nombre a de $[-2\,;2]$, on a $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx=0$.

d. Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=3$, alors $\displaystyle\int_1^0 f(x)\,dx=-3$.

68 Vrai ou faux ?

Soit f une fonction dérivable sur $[-5\,;5]$ et F une primitive de f sur $[-5\,;5]$.

a. La fonction F est la dérivée de f sur $[-5\,;5]$.

b. La fonction f est la dérivée de F sur $[-5\,;5]$.

c. Si f est positive sur $[-5\,;5]$, alors F est croissante sur l'intervalle $[-5\,;5]$.

d. F et f ont le même sens de variation.

e. Si f s'annule en 3, alors $F(3)=0$.

69 QCM

Pour chaque intégrale, donner le bon résultat.

1 $\displaystyle\int_0^1 (3x-x^2)\,dx$ est égal à :

a. 0.   b. $\dfrac{7}{6}$.   c. 2.

2 $\displaystyle\int_{-2}^{2} e^{2x}\,dx$ est égal à :

a. e^4-e^{-4}.   b. $\dfrac{e^4-e^{-4}}{2}$.   c. $2(e^4-e^{-4})$.

3 $\displaystyle\int_3^9 \left(\frac{4}{x}\right) dx$ est égal à :

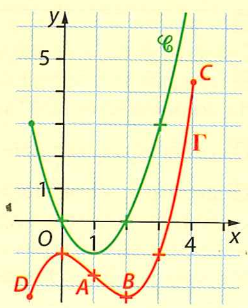
a. $4\ln(3)$.   b. $\ln(3)$.   c. $\dfrac{8}{9}$.

70 Vrai ou faux ?

La courbe $\mathscr{C}$ est la courbe d'une fonction f continue sur $[-1\,;4]$ et la courbe Γ est celle d'une de ses primitives F.

On précise les coordonnées de quelques points :

$A(1\,;-1{,}6)$, $B(2\,;-2{,}4)$, $C(4\,;4{,}4)$ et $D(-1\,;-2{,}4)$.



Vrai ou faux ? Justifier la réponse.

1 $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx=0$.

2 $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx=1{,}4$.

3 $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=0$.

4 $\displaystyle\int_0^4 f(x)\,dx=5$.

5 $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=-\int_0^1 f(x)\,dx$.

6 $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,dx+\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_0^3 f(x)\,dx$.

Pour les exercices 71 à 76
Calculs d'intégrales

Déterminer une primitive F de la fonction f à intégrer et calculer l'intégrale.

71 a. $f(x)=-2x+3$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

b. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{5} (3x^2-2x-1)\,dx$.

72 a. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$.

b. Calculer $\displaystyle\int_1^5 \frac{2x^2+1}{x^2}\,dx$.

73 a. $f(x)=e^x$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^3 (x-2e^x)\,dx$.

74 a. $f(x)=1-e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} f(x)\,dx$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^{10} (2t-0{,}2e^{-0,1t})\,dt$.

75 a. $f(x)=2e^x+e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} f(x)\,dx$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (t^2-0{,}2e^{0,5t})\,dt$.

76 $f(x)=(2x)e^{-x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$, puis $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$.

77 Intégrales à l'aide de *Xcas*

Pour chaque ligne de commande, préciser l'intégrale calculée, puis justifier le résultat obtenu.

1	int(30*exp(-x/5)+1,x,0,10)
	-150· exp(-2)+160
2	int(3/x+x^2-4x+1,x,1,4)
	3· ln(4)-6

78 Vrai ou faux ?

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ connue par son tableau de variations :

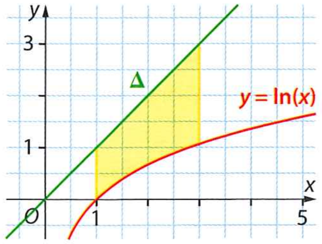
x	$-\infty$		1		2		5		$+\infty$
$f(x)$		↘	0	↘	-3	↗	0	↗	

Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors :

a. F est décroissante sur $]-\infty\,;1]$.
b. F est croissante sur $[2\,;+\infty[$.
c. F est croissante sur $[5\,;+\infty[$.
d. F est décroissante sur $[1\,;5]$.

79 Intégrale et aire

On donne la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction logarithme népérien et la droite Δ d'équation $y=x$.

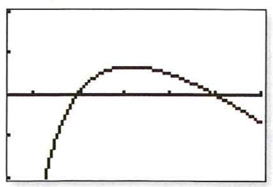


1 Exprimer par une intégrale l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire (u.a.), du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites verticales d'équation $x=1$ et $x=3$.
Préciser la valeur de 1 u.a. si le repère a pour unité 1 cm.
2 En utilisant la calculatrice, déterminer la valeur arrondie de $\mathscr{A}$ à 0,01 cm² près.
3 Justifier que, la fonction $x \mapsto x\ln(x)-x$ est une primitive de la fonction ln sur $]0\,;+\infty[$.
En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$.

80 Lien entre aire et intégrale

Soit la fonction f définie sur $[0{,}5\,;6]$ par :

$$f(x)=-x+7-\frac{10}{x}.$$

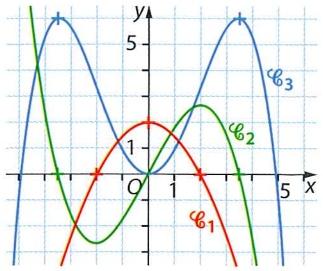


On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1 a. Étudier le signe de $f(x)$ sur $[0{,}5\,;6]$.
b. En déduire la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
2 a. Déterminer une primitive F de f sur $[0{,}5\,;6]$.
b. Déterminer la primitive G de f qui prend la valeur 0 en 1.
c. Calculer $\displaystyle\int_2^5\left(-x+7-\frac{10}{x}\right)dx$.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

81 Fonction, dérivée et primitive

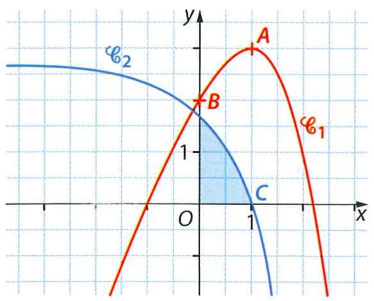
Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ ci-après sont les courbes de trois fonctions f_1, f_2 et f_3 dérivables sur $\mathbb{R}$.
L'une est la courbe d'une fonction f, une autre est celle de la dérivée f' et la dernière est celle d'une primitive F de f.



1 Pour chaque fonction f_1, f_2 et f_3, donner son tableau de variations, en indiquant le signe de sa dérivée, et son tableau de signes.
On fera une lecture des coordonnées des points utiles avec la précision permise par le graphique.
2 Retrouver les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_{f'}$ et $\mathscr{C}_F$.
Justifier avec soin.

82 Lectures graphiques d'intégrale

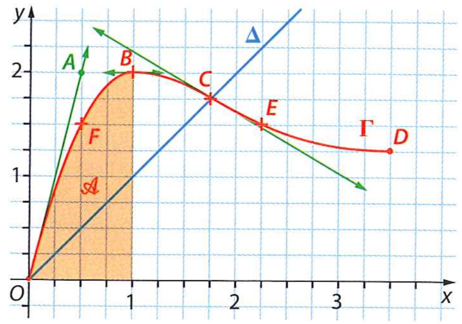
Dans le repère orthonormé d'unité 1 cm ci-dessous, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont les courbes de deux fonctions : l'une est la courbe d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'autre, la courbe d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.
La courbe $\mathscr{C}_1$ passe par $A(1\,;3)$, par $B(0\,;2)$ et traverse l'axe des abscisses en -1 et environ 2,2.
La courbe $\mathscr{C}_2$ passe par $C(1\,;0)$.



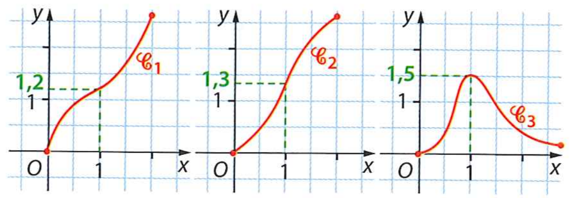
1 Retrouver la courbe de la fonction f.
Expliquer le raisonnement.
2 Déterminer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire du domaine en bleu, à l'aide de lectures graphiques.
3 Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ est égale à 3.
4 Soit g la fonction, dont la dérivée est la fonction F.
La courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction g présente-t-elle des points d'inflexion ?
Si oui, expliquer pourquoi et préciser les abscisses de ces points.

83 Lectures graphiques diverses

La courbe Γ ci-dessous est celle d'une fonction f, dérivable sur $[0\,;3{,}5]$. La droite (OA) est la tangente en A à la courbe Γ et, au point E, la courbe Γ traverse sa tangente.



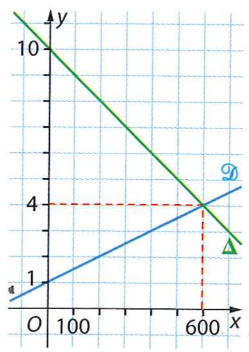
1 Avec la précision permise par le graphique :
a. dresser le tableau de variations de f ;
b. lire $f'(0)$ et $f'(1)$;
c. préciser l'équation réduite de la tangente (OA) ;
d. lire les coordonnées de C ;
e. résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant x$ sur $[0\,;3{,}5]$.
2 a. Préciser la convexité de la fonction f.
b. Définir par une intégrale l'aire $\mathscr{A}$ du domaine coloré.
c. En utilisant au mieux les éléments du graphique, donner un encadrement de l'aire $\mathscr{A}$.
3 L'une des trois courbes est la représentation graphique de la primitive F de f s'annulant en 0.



a. En justifiant l'élimination de deux des courbes, indiquer celle qui représente F.
b. En déduire la valeur exacte de l'aire $\mathscr{A}$.

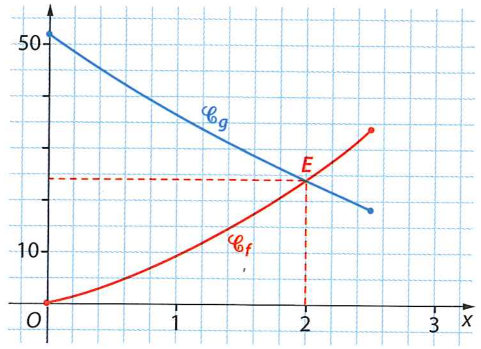
84 Surplus

Les droites $\mathscr{D}$ et Δ représentent respectivement les fonctions d'offre et de demande d'un bien.
Les quantités, en abscisses, sont en millier d'objets et le prix unitaire, en ordonnées, est en euro par objet.
À l'aide du calcul d'aire de triangles, calculer le surplus des consommateurs et le surplus des producteurs en millier d'euros, comme défini page 145.



85 Surplus des producteurs et des consommateurs

La commercialisation d'un article sur un marché suit une **fonction d'offre** notée f et une **fonction de demande** notée g, représentées par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Elles sont définies sur l'intervalle $[0\,;2{,}5]$ par :

$$f(x)=3x^2+6x \text{ et } g(x)=-0{,}5x^3+3x^2-18x+52.$$

La quantité x est exprimée en million d'articles.
Les prix de vente $f(x)$ et $g(x)$, pour une quantité x, sont exprimés en euro par article.

1 Étudier les variations de f sur $[0\,;2{,}5]$.
2 a. Étudier les variations de g sur $[0\,;2{,}5]$.
b. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_g$ admet un point d'inflexion. Interpréter ce résultat.
3 a. Vérifier que la quantité d'équilibre est de 2 millions d'articles.
b. En déduire le prix de vente p à l'équilibre.
c. Calculer le chiffre d'affaires à l'équilibre, c'est-à-dire engendré par la vente de q articles au prix d'équilibre p.
L'exprimer en euro.
4 Le **surplus des producteurs** est donné par :

$$S_P=p\times q-\int_0^q f(x)\,dx.$$

a. Donner une interprétation graphique de S_P.
b. Déterminer une primitive F de f sur $[0\,;2{,}5]$.
c. En déduire la valeur exacte de S_P, puis la valeur du surplus en euro.
5 Sur TI-Nspire™, on a obtenu le résultat ci-contre.

$$\int_0^x\left(\frac{-t^3}{2}+3\cdot t^2-18\cdot t+52\right)dt \qquad \frac{-x\cdot\left(x^3-8\cdot x^2+72\cdot x-416\right)}{8}$$

a. Expliquer ce que représente cette intégrale pour la fonction g.
b. À l'aide d'une calculatrice, calculer $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx$.
c. En déduire le surplus des consommateurs donné par $S_C=\displaystyle\int_0^q g(x)\,dx-p\times q$. Préciser l'unité.

5 Valeur moyenne et applications

86 Vrai ou faux ?

1 La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto 2x - 8$ sur l'intervalle $[\,0\,;4\,]$ est :

a. 2. **b.** 4. **c.** -4.

2 La valeur moyenne de $x \mapsto x^2$ sur $[-3\,;3\,]$ est :

a. 0. **b.** 3. **c.** 18.

3 La valeur moyenne de $x \mapsto \mathrm{e}^{0{,}5x}$ sur $[\,0\,;2\,]$ est :

a. $2\mathrm{e} - 2$. **b.** $\mathrm{e} - 1$. **c.** $0{,}5\,\mathrm{e} - 0{,}5$.

4 La valeur moyenne de la fonction inverse sur l'intervalle $[\,2\,;4\,]$ est :

a. $\ln(2)$. **b.** $0{,}5\ln(2)$. **c.** $0{,}25\ln(2)$.

87 Valeur moyenne

Calculer la valeur moyenne de la fonction f donnée.

a. $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x}$ sur $[\,1\,;4\,]$.

b. $f(x) = 2 + \mathrm{e}^{-0{,}1x}$ sur $[\,0\,;10\,]$.

88 Aplanissement

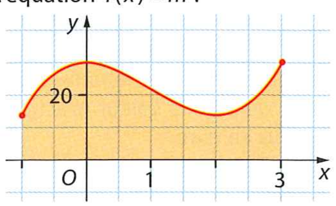
Lors de travaux pour la réalisation d'une route, on prévoit d'aplanir le terrain en rabotant les bosses et en comblant les creux. En coupe, le terrain peut être modélisé sur $[-1\,;3\,]$ par la fonction f telle que :
$f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 30$, où x est la longueur au sol en kilomètre et $f(x)$ la hauteur en mètre.

1 Calculer la valeur moyenne m de la hauteur sur l'intervalle $[-1\,;3\,]$.

2 Étudier les variations de f sur $[-1\,;3\,]$.

3 **a.** Graphiquement, sur l'intervalle $[-1\,;3\,]$, combien a-t-on de solution(s) à l'équation $f(x) = m$?

b. Démontrer que l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution α sur $[\,0\,;2\,]$. Déterminer α.



89 Valeur moyenne d'un bénéfice

Un bénéfice est donné par $f(x) = 100(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$, pour x centaines d'objets vendus, $x \in [\,1\,;5\,]$.
Le bénéfice est en millier d'euros.

1 Étudier le sens de variation du bénéfice sur $[\,1\,;5\,]$.

2 Montrer que la fonction F définie sur $[\,1\,;5\,]$ par $F(x) = -100\,x\mathrm{e}^{-4x}$ est une primitive de f sur $[\,1\,;5\,]$.

3 Calculer la valeur moyenne du bénéfice pour une quantité de 100 à 500 objets. En donner la valeur exacte, puis la valeur arrondie à 10 € près.

90 Population moyenne

La population d'un pays a une croissance exponentielle. Elle est passée de 15 millions en 2000 à 18,3 millions en 2010.

1 Déterminer le taux moyen annuel d'évolution sur ces 10 années. *Arrondir le résultat à 0,1 % près.*

2 On admet que la fonction P définie sur $[\,0\,;20\,]$ par $P(t) = 15\,\mathrm{e}^{0{,}02t}$ modélise le nombre d'habitants de ce pays, en million, sur les années de 2000 à 2020.

a. Exprimer la variation relative de la population sur une année : $\dfrac{P(t+1) - P(t)}{P(t)}$.

b. Comparer au taux obtenu en **1**.

3 **a.** Déterminer une primitive F de la fonction P sur l'intervalle $[\,0\,;20\,]$.

b. En déduire la valeur moyenne de la population de ce pays entre 2000 et 2020. *Arrondir le résultat à 10 milliers près.*

91 Valeur moyenne d'un prix

Le PDG de DOUXBOIS entreprend une étude sur le prix du mètre cube de sapin.

Il établit que, si t est le temps écoulé en mois depuis le 1er janvier 2012, le prix $p(t)$, en euro par m³, s'exprime par : $p(t) = 40 + 0{,}2t + 2\mathrm{e}^{-0{,}1t+2}$, où $t \in [\,0\,;60\,]$.

1 **a.** Montrer que $p'(t) = 0{,}2 - 0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}1t+2}$.

b. Résoudre l'inéquation $p'(t) \geqslant 0$ sur $[\,0\,;60\,]$.

c. En déduire le mois où le prix atteint un minimum.

2 **a.** Montrer que l'équation $p(t) = 50$ admet deux solutions sur $[\,0\,;60\,]$.

b. À l'aide de la calculatrice, déterminer la date (année et mois) à partir de laquelle le prix du mètre cube de sapin dépassera à nouveau 50 €.

3 **a.** Déterminer une primitive P de p sur $[\,0\,;60\,]$.

b. Exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{20} p(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de P.

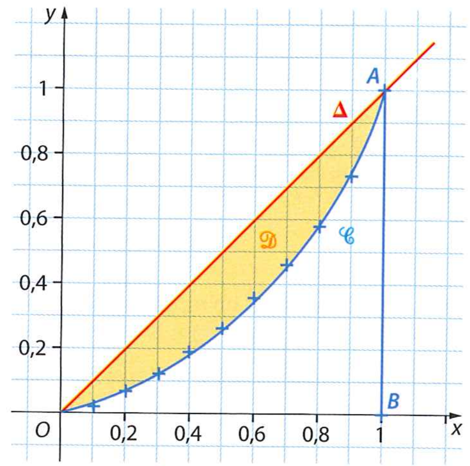
Montrer que cette intégrale vaut environ 968.

c. En déduire la valeur moyenne du prix du sapin sur les 20 premiers mois.

92 Revenus disponibles en France en 2008

On étudie la répartition des revenus disponibles par ménage, en France, en 2008, sur l'ensemble de la population.

On dispose du graphique suivant, sur lequel on lit :
- en abscisses : la part cumulée x des ménages (rangés par ordre croissant de leur revenu) par rapport à l'ensemble des ménages ;
- en ordonnées : la part cumulée y des revenus disponibles de ces ménages.



Source : INSEE.

Ce graphique permet d'obtenir la courbe de Lorenz $\mathscr{C}$, représentant la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par :
$$f(x) = 1{,}75x^4 - 2{,}8x^3 + 2{,}1x^2 - 0{,}05x.$$
La droite Δ a pour équation $y = x$.

1 **a.** Calculer $f(0)$ et $f(1)$. Interpréter.

b. Calculer $f(0{,}2)$. Interpréter le résultat.

2 **a.** Déterminer une primitive F de f sur $[\,0\,;1\,]$.

b. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3 On rappelle que l'**indice de Gini** γ est le quotient de l'aire du domaine $\mathscr{D}$ mis en couleur dans le graphique, par l'aire du triangle OAB, les aires étant exprimées dans la même unité. Voir cours page 146

a. Justifier que l'indice de Gini s'écrit :
$$\gamma = 1 - 2F(1) + 2F(0).$$

b. Calculer l'indice de Gini des revenus disponibles des ménages en France en 2008.

c. Question ouverte

En réalité, on peut lire sur le site de l'INSEE que l'indice de Gini des revenus disponibles était égal à 0,346 en 2008. Obtient-on le même résultat qu'à la question **b.** ? Sinon, donner une raison à cette différence.

93 Patrimoine

On étudie la répartition du patrimoine donnée dans un pays occidental A (en France, en 2004).

Répartition du patrimoine						
Part cumulée des ménages	0	0,25	0,5	0,75	0,9	1
Part cumulée du patrimoine	0	0	0,1	0,3	0,55	1

Exemple de lecture : 50 % des ménages les plus pauvres détiennent 10 % du patrimoine total.

1 **a.** Représenter les points $M_i(x_i\,;y_i)$, où x_i est la part cumulée des ménages et y_i celle du patrimoine.
On utilisera un repère comme celui de l'exercice **92**.

b. Tracer la courbe de Lorenz de cette répartition, formée des segments joignant les six points $M_1, M_2, \ldots, M_6$.

c. Tracer la droite Δ d'équation $y = x$.

2 **a.** Par calcul d'aire de triangle et trapèzes, calculer l'aire sous la courbe de Lorenz pour cette répartition.

b. En déduire l'indice de Gini mesurant la concentration du patrimoine pour ce pays A.
On reprendra la définition vue dans le cours page 146.

3 Dans un autre pays B, on modélise la répartition du patrimoine par la fonction f définie sur $[\,0\,;1\,]$ par :
$f(x) = 0$, si $x \in [\,0\,;0{,}6\,[$
et $f(x) = \dfrac{(x-0{,}6)^4}{0{,}4^4}$, si $x \in [\,0{,}6\,;1\,]$.

a. La fonction f est-elle continue sur $[\,0\,;1\,]$?

b. Justifier que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

c. On admet qu'une primitive de $x \mapsto (x+a)^n$ est la fonction $x \mapsto \dfrac{(x+a)^{n+1}}{n+1}$. Voir AP 98 page 161

Déterminer une primitive F de f sur $[\,0{,}6\,;1\,]$.

d. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{0{,}6}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

e. En déduire l'indice de Gini de la répartition du patrimoine dans ce pays B.

4 **a.** Dans le pays A, quelle part du patrimoine total est détenue par les 10 % des ménages les plus riches ?

b. Calculer $f(0{,}9)$. Interpréter ce résultat.
Quelle est la part du patrimoine total détenue par les 10 % des ménages les plus riches dans le pays B ?

c. Comparer les deux indices. Quel est le pays où l'inégalité de la détention du patrimoine est la plus grande ?

Dans l'énoncé	Comment faire ou rédiger ?
Donner un encadrement de l'aire sous la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$.	La courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f étant connue sur un **quadrillage**, on utilise la grille ou des éléments géométriques pour obtenir **une aire $\mathscr{A}_1$** du domaine situé **en dessous** de la courbe et **une aire $\mathscr{A}_2$** d'un domaine **qui englobe** l'aire $\mathscr{A}$ cherchée : $\mathscr{A}_1 \leqslant \mathscr{A} \leqslant \mathscr{A}_2$.
Montrer qu'une fonction F donnée est une primitive de f sur $[a\,;b]$.	La fonction F étant connue, **F est une primitive** de f si, et seulement si, **f est la dérivée** de F sur $[a\,;b]$. On calcule la dérivée de F pour obtenir $F'(x)=f(x)$.
Déterminer une primitive F de f sur $[a\,;b]$.	Une fonction f étant connue, on demande de **trouver une primitive F** en utilisant des primitives des fonctions usuelles. Attention : F est **une** primitive de f. Elle n'est pas unique. Voir cours page 142
Calculer une intégrale et vérifier à la calculatrice.	Si f est une fonction usuelle continue sur un intervalle $[a\,;b]$, on peut toujours calculer l'intégrale de f sur $[a\,;b]$ à l'aide de la calculatrice, même si on ne connaît pas de formules explicites de primitives, comme les fonctions de la forme $x \mapsto \exp(-kx^2)$, avec $k \in \mathbb{R}$ ou de la forme $x \mapsto \dfrac{k}{a+x^2}$, avec $a>0$ et k réel. Voir cours page 138
Déterminer l'unité dans laquelle s'exprime le résultat d'une intégrale.	• Dans le calcul de l'aire d'un domaine géométrique dans un repère orthogonal, l'intégrale est en **unité d'aire**, produit des unités des axes : **1 u.a. = 1 u.x × 1 u.y**. • Dans le calcul $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, où x et $f(x)$ correspondent à des grandeurs (quantité, coût, etc.), l'unité est le **produit de l'unité de $f(x)$ par l'unité de x**.
Calculer la valeur moyenne d'une fonction f sur un intervalle.	La **valeur moyenne** de f sur $[a\,;b]$ est l'**intégrale** de f entre a et b, divisée par la longueur de l'intervalle $[a\,;b]$. Le résultat est dans la même unité que $f(x)$. Attention à ne pas confondre avec la **fonction « moyenne »** : $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice guidé

94 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;12]$ par :

$$f(t)=30\,\mathrm{e}^{-0{,}15t}.$$

On suppose qu'après injection, la quantité de substance médicamenteuse présente dans le sang à l'instant t (exprimé en heure) est donnée par $f(t)$ (exprimée en mg/L), pour t variant de 0 à 12 heures.

1 a. Étudier le sens de variation de la fonction f.

b. Calculer, à 10^{-1} près, la quantité de substance présente dans le sang 12 heures après l'injection.

2 a. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;12]$ par :

$$F(t)=-200\,\mathrm{e}^{-0{,}15t}.$$

Montrer que F est une primitive de f sur $[0\,;12]$.

b. Soit l'intégrale : $I=\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$. Calculer la valeur exacte de I, puis en donner la valeur arrondie au centième près.

c. En déduire, à un dixième de milligramme près, la quantité moyenne de substance médicamenteuse présente dans le sang pendant les 10 heures qui suivent l'injection.

Aide

1 Pour étudier les variations de la fonction f, on calcule la dérivée $f'(t)$ et on étudie le signe de $f'(t)$ sur l'intervalle donné.

2 a. Pour montrer que F est une primitive de f, on dérive la fonction F.

b. La valeur exacte d'une intégrale doit être calculée à l'aide d'une primitive F :

$$\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t=F(10)-F(0)$$

et on doit conserver l'écriture avec e.

Rappel : $\mathrm{e}^0=1$.

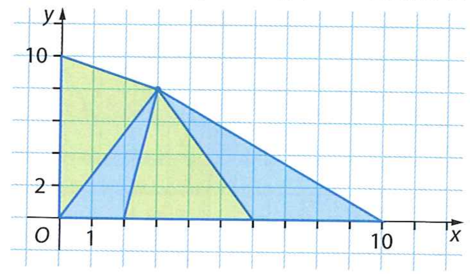
Pour la valeur arrondie, utiliser la calculatrice pour vérifier le calcul exact fait.

c. Bien respecter les arrondis demandés dans l'énoncé.

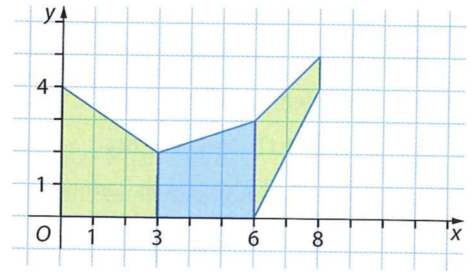
Revoir les outils de base

Savoir calculer une aire en unité d'aire

95 Dans la figure ci-dessous, calculer l'aire des triangles en couleur, en utilisant le quadrillage, en unité d'aire :



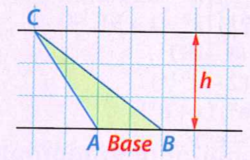
96 Calculer l'aire des trapèzes de cette figure, en u.a. :



Aide

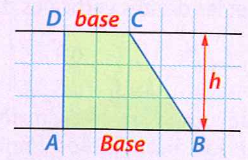
L'aire d'un triangle est la moitié du produit de la base par la hauteur :

$$\mathscr{A}=\frac{1}{2}\times Base\times h$$



L'aire d'un trapèze est la moitié de la somme des bases par la hauteur :

$$\mathscr{A}=\frac{1}{2}\times(B+b)\times h.$$



Savoir faire apparaître un coefficient

97 Pour chacune des fonctions f suivantes, faire apparaître $u'(x)$, où $u(x)$ est l'exposant de l'exponentielle, et en déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$:

a. $f(x)=3\,\mathrm{e}^{2x+1}$.

b. $f(x)=0{,}5\,\mathrm{e}^{-x}$.

c. $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$.

d. $f(x)=(1-2x)\mathrm{e}^{x^2-x}$.

e. $f(x)=2x\,\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$.

f. $f(x)=4\,\mathrm{e}^{-0{,}01x}$.

Aide

Pour déterminer une primitive d'une fonction de la forme $u'\mathrm{e}^u$, on doit faire apparaître la dérivée u' de l'exposant : pour cela, on multiplie ou on divise par un nombre, mais jamais par une expression comportant la variable.

Pour aller plus loin

98 **Démontrer une formule**

On veut montrer le théorème suivant :

Théorème Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et u' sa dérivée sur I.
On considère la fonction f telle que, pour tout réel x de l'intervalle I :

$$f(x)=u'(x)\times(u(x))^n.$$

Pour tout entier naturel n, une primitive de la fonction f sur l'intervalle I est la fonction F définie sur I par :

$$F(x)=\frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}.$$

1 a. Soit $H(x)=(u(x))^2$ sur l'intervalle I.
En écrivant $(u(x))^2=u(x)\times u(x)$, calculer $H'(x)$.
En déduire le théorème pour $n=1$.

b. Soit $H(x)=(u(x))^3$ sur l'intervalle I.
En écrivant $(u(x))^3=u((x)\times u(x))^2$, calculer $H'(x)$.
En déduire le théorème pour $n=2$.

2 On suppose le théorème vrai pour un entier n.
En écrivant $(u(x))^{n+2}=u(x)\times(u(x))^{n+1}$, calculer $H'(x)$.
En déduire une primitive F de la fonction f telle que $f(x)=u'(x)\times(u(x))^{n+1}$.
On en déduit que, si le théorème est vrai pour un entier n, il est vrai pour l'entier $n+1$, et ainsi de suite.
Donc le théorème est vrai pour tout entier n.

Accompagnement personnalisé

Pour aller plus loin

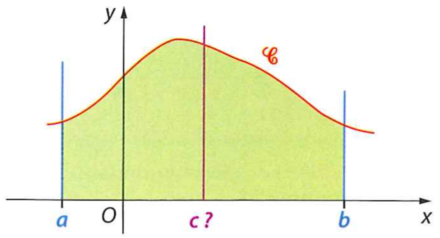
99 Appliquer

Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$, en appliquant la formule démontrée dans l'exercice 98 :

1 **a.** $f(x)=(x-4)^2$.
b. $f(x)=(x-5)^3+x+2$.
c. $f(x)=(2x-3)(x^2-3x+2)^2$.
d. $f(x)=(1-2x)(x^2-x+3)$.
2 **a.** $f(x)=e^x(1-e^x)^2$.
b. $f(x)=e^{0,1x}(2-e^{0,1x})$.
c. $f(x)=(1+e^x)(x+e^x)$.
d. $f(x)=e^x(3-e^x)^2$.

100 Chercher

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.
On considère le domaine $\mathscr{D}$, limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x=a$ et $x=b$.



On se propose de trouver le nombre c tel que la droite verticale d'équation $x=c$ partage le domaine en deux parties de même aire.

1 Démontrer que, si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$, alors le nombre c cherché vérifie :

$$F(c)=\frac{F(a)+F(b)}{2}.$$

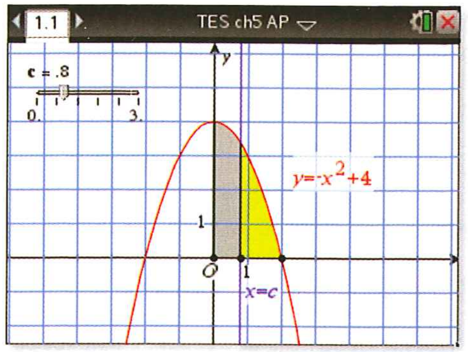
2 Soit $\mathscr{C}$ la parabole représentant la fonction f telle que $f(x)=4-x^2$ sur $\mathbb{R}$.
On considère l'aire $\mathscr{A}$ sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\,;2]$, en unité d'aire.
a. Calculer l'intégrale $\int_0^2 (4-t^2)\,dt$.
En donner la valeur exacte.
b. Exprimer, pour tout réel x de $[0\,;2]$:

$$F(x)=\int_0^x (4-t^2)\,dt.$$

En déduire l'égalité que doit vérifier le nombre c cherché.
c. Étudier le sens de variation de la fonction F sur $\mathbb{R}$, puis sur l'intervalle $[0\,;2]$.
d. Montrer l'existence du nombre c tel que :

$$F(c)=\frac{1}{2}\int_0^2 (4-t^2)\,dt.$$

La recherche est réalisée ci-dessous sous TI-Nspire™ à l'aide d'un curseur :



e. À l'aide de la calculatrice, ou du curseur sur un logiciel dynamique, déterminer une valeur approchée de c à 0,01 près.
3 On considère la fonction inverse $f: x\mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.
Soit trois réels strictement positifs, a, b et c, tels que :

$$\int_a^c f(t)\,dt=\int_c^b f(t)\,dt.$$

Démontrer que a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

101 Déterminer une primitive

Soit f une fonction, définie sur $\mathbb{R}$, dont l'expression est de la forme :

$$f(x)=(ax+b)e^x \text{ ou } f(x)=(ax+b)e^{-x}.$$

On admet que cette forme est unique.
Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$(2x-3)e^x=(ax+b)e^x \Leftrightarrow a=2 \text{ et } b=-3.$$

1 Déterminer a et b tels que :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ (ax+a+b)e^x=(3x-1)e^x.$$

2 On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(2x+1)e^x \text{ et } F(x)=(ax+b)e^x,$$

où a et b sont deux nombres réels.
a. Calculer $F'(x)$, où F' est la dérivée de f.
b. Déterminer les réels a et b pour que F soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{-x}$.
Déterminer les nombres réels a et b afin que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(ax+b)e^{-x}$ soit une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
4 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(1-x)e^{-x}$.
Déterminer une primitive F de f sur $\mathbb{R}$, de la forme :

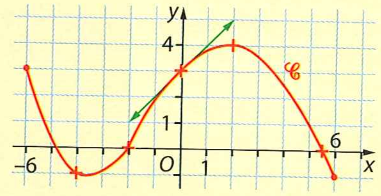
$$F(x)=(ax+b)e^{-x}.$$

5 Soit f défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2e^x$.
Déterminer les réels a, b, et c tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(ax^2+bx+c)e^2$ est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Réussir au Bac

102 QCM

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-6\,;6]$, de courbe représentative $\mathscr{C}$.



Pour chaque question, donner la bonne réponse.

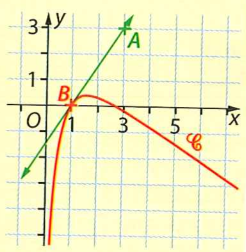
1 Le nombre dérivé de f en 0 est :
a. 0. **b.** 1. **c.** 3.
2 On pose $\mathscr{A}=\int_0^2 f(x)\,dx$. On peut affirmer que :
a. $0<\mathscr{A}<2$. **b.** $3<\mathscr{A}<4$. **c.** $6<\mathscr{A}<8$.
3 Soit F une primitive de f sur $[-6\,;6]$.
a. F est croissante sur $[-3\,;2]$.
b. F est décroissante sur $[-6\,;-4]$.
c. F est croissante sur $[-2\,;5]$.

103 QCM – Pour réviser

1 La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-2x+1}$.
On note f' sa fonction dérivée.
a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=e^{-2}$.
b. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=e^{-2x+1}$.
c. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=-2\,e^{-2x+1}$.
2 On donne le tableau de variations d'une fonction g définie et continue sur $[-5\,;12]$.

x	-5		2		8		12
$g(x)$	-3	↘	-8	↗	1	↘	0

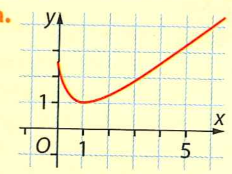
a. $\int_{-5}^{2} g(x)\,dx=7$.
b. L'équation $g(x)=0$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[-5\,;12]$.
c. Pour tout x de $[-5\,;12]$, $g(x)<0$.
3 La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-contre est la représentation graphique d'une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
La droite (AB), tracée sur le graphique, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 1.



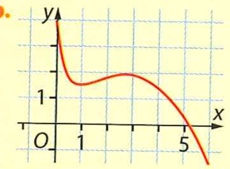
On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
D'après le graphique, on peut lire :
a. $h'(1)=0$. **b.** $h'(1)=1{,}5$. **c.** $h'(1)=\frac{2}{3}$.

4 Une seule de ces trois courbes est la représentation graphique d'une primitive de la fonction h (introduite à la question **3**) sur $]0\,;+\infty[$.
Préciser laquelle.

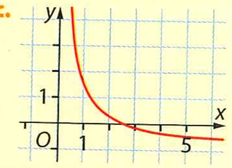
a.



b.



c.



104 Ne pas confondre fonction, dérivée et primitive

Soit une fonction f définie et dérivable sur $]1\,;+\infty[$.
Soit F une primitive de la fonction f sur $]1\,;+\infty[$.
On donne le tableau de variations de f :

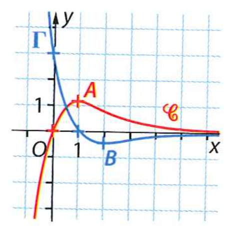
x	1		3		4		12		$+\infty$
$f(x)$	‖	↘	0	↘	-2	↗	-1	↘	

Préciser si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses ou si les informations données ne permettent pas de conclure.

1 L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.
2 Pour tout réel $x>3$, $f'(x)<0$.
3 On a $f'(5)>0$.
4 La fonction F est décroissante sur $[10\,;+\infty[$.
5 La fonction F admet un maximum en 3.
6 L'équation $f'(x)=-2$ admet deux solutions sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.
7 $-2\leqslant\int_3^4 f(x)\,dx\leqslant 0$.
8 La fonction F s'annule en 3.

105 Fonction et primitive

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
Les courbes $\mathscr{C}$ et Γ ci-contre sont les représentations graphiques, l'une de f, l'autre de F.



De plus, $A\left(1\,;\frac{3}{e}\right)$ et $B\left(2\,;\frac{3}{e^2}\right)$.

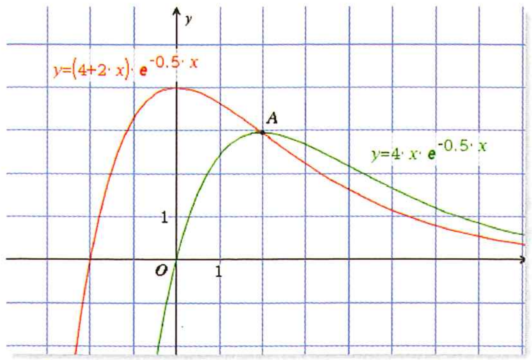
1 Quelle est la courbe de la fonction f ? Justifier le choix.
2 Calculer l'intégrale $\int_0^1 f(t)\,dt$.
En donner une interprétation graphique.

106 Calcul d'aire entre deux courbes

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(4+2x)\mathrm{e}^{-0{,}5x} \text{ et } g(x)=4x\mathrm{e}^{-0{,}5x}$$

et $\mathscr{C}$ et Γ leurs représentations graphiques respectives.
À l'aide d'un grapheur, on a obtenu ces deux courbes et leur point d'intersection A.



1 Étude de la fonction f

a. D'après la courbe $\mathscr{C}$, en rouge, conjecturer la convexité de la fonction f.
La courbe $\mathscr{C}$ présente-t-elle un point d'inflexion ?

b. Calculer la dérivée f' de f sur $\mathbb{R}$, où f' est la dérivée de f.
En déduire le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c. On admet que la dérivée seconde f'' de f sur $\mathbb{R}$ est :

$$f''(x)=(0{,}5x-1)\mathrm{e}^{-0{,}5x}.$$

Étudier le signe de $f''(x)$.

d. Démontrer les conjectures faites en **1 a.**
Préciser une propriété de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

2 Positions relatives des deux courbes

On note : $\quad h(x)=f(x)-g(x)$.

a. Résoudre algébriquement l'équation $h(x)=0$.
En déduire les coordonnées exactes du point d'intersection de ces deux courbes.

b. Étudier le signe de $h(x)$ et en déduire les positions relatives des courbes $\mathscr{C}$ et Γ.

3 Aire entre deux courbes

a. Par calcul formel, on a obtenu le résultat suivant.

$$\boxed{\int_0^x \left((4-2\cdot t)\cdot \mathbf{e}^{\frac{-t}{2}}\right)\mathrm{d}t \qquad\qquad 4\cdot x\cdot \mathbf{e}^{\frac{-x}{2}}}$$

Que signifie ce résultat pour la fonction h ?

b. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine limité par les deux courbes $\mathscr{C}$ et Γ, la droite verticale d'équation $x=2$ et l'axe des ordonnées.
On donnera la valeur exacte en unité d'aire et une valeur arrondie à 0,01 près.

107 Coût marginal et coût total

Une imprimerie a une capacité de production de 5 000 ouvrages par jour. Une étude a montré que le **coût marginal**, en euro par ouvrage, peut être modélisé par :

$$f(q)=-2q+15-10\mathrm{e}^{-0{,}2q},$$

où q est la quantité d'ouvrages, en millier, avec $q\in[0\,;5]$.
Les quantités étant très grandes, on assimile le coût marginal à la dérivée du **coût total** C.
Les coûts fixes de fabrication sont égaux à 3 000 €.

1 a. Calculer $f'(q)$, où f' est la dérivée de f sur $[0\,;5]$.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2\mathrm{e}^{-0{,}2x}-2\geqslant 0$.

c. En déduire les variations de f sur $[0\,;5]$.
Dresser le tableau des variations de f et préciser son signe sur l'intervalle $[0\,;5]$.

2 Utiliser les résultats de la question **1** pour répondre aux questions suivantes, en justifiant.

a. Quel est le sens de variation de la fonction coût total C sur l'intervalle $[0\,;5]$?

b. La croissance de la fonction de coût total C est-elle accélérée ou ralentie ?

3 a. On considère la fonction F définie pour $q\in[0\,;5]$ par l'intégrale $F(q)=\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x$.
Interpréter économiquement cette fonction.

b. Montrer que, pour tout réel q de $[0\,;5]$, le coût total est donné par $C(q)=-q^2+15q+50\mathrm{e}^{-0{,}2q}-47$.
Justifier que le coût total est en millier d'euros.

4 L'imprimeur compte réaliser en deux jours une commande de 8 000 ouvrages.
Il hésite entre deux possibilités :
- 5 000 ouvrages le premier jour, puis 3 000 le second ;
- 4 000 ouvrages pendant deux jours.

Quelle est l'option à moindre coût pour lui ?

108 Réaliser des prévisions

Certains scientifiques estiment que les futures découvertes de pétrole dans le monde peuvent être modélisées, à partir de l'année 2011, grâce à la fonction f définie sur l'intervalle $[11\,;50]$ par $\quad f(x)=17\,280\times\mathrm{e}^{-0{,}024x}$,
de sorte que $f(x)$ représente, en billion de barils (million de millions de barils), l'estimation de la quantité de pétrole qui sera découverte au cours de l'année $2000+x$.

1 Calculer l'estimation du nombre de barils de pétrole à découvrir en 2011 d'après ce modèle.
On arrondira le résultat au billion de barils près.

2 Étudier les variations de la fonction f sur $[11\,;50]$.

3 a. Selon ce modèle, peut-on envisager qu'au cours d'une même année, 15 000 billions de barils de pétrole soient découverts ?

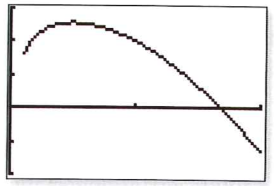
b. Selon ce modèle, peut-on envisager qu'au cours de chaque année à partir de 2011, au moins 6 000 billions de barils soient découverts ? Sinon, déterminer, en justifiant, l'année pour laquelle les découvertes de pétrole deviendront strictement inférieures à 6 000 billions de barils.

4 a. Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $[11\,;50]$.

b. Calculer la valeur exacte, puis donner la valeur arrondie à l'unité près, de l'intégrale $\int_{11}^{21} f(x)\,\mathrm{d}x$.

c. En déduire la valeur moyenne du nombre de barils, en billion, que l'on peut espérer découvrir par an d'après ce modèle, entre les années 2011 et 2021.

109 Primitive de ln



On considère la fonction f définie sur $[0{,}1\,;2]$ par :
$f(x)=-x^2-x+4+\ln(x)$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
On a représenté la courbe $\mathscr{C}$ à la calculatrice.

1 a. Montrer que pour tout réel x de $[0{,}1\,;2]$:

$$f'(x)=\frac{-2x^2-x+1}{x}.$$

b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[0{,}1\,;2]$.
En déduire le tableau de variations de f sur $[0{,}1\,;2]$.

2 a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0{,}1\,;2]$. À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement de α d'amplitude 0,01.

b. En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[0{,}1\,;2]$.

3 a. Montrer que la fonction F définie par :

$$F(x)=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+3x+x\times\ln(x).$$

est une primitive de f sur $[0{,}1\,;2]$.

b. On considère l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire, du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x=0{,}5$ et $x=1$.
Déterminer la valeur exacte de $\mathscr{A}$.

110 Vente « flash » sur Internet

PARTIE A Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\mathrm{e}^3]$ par :

$$f(x)=3x-x\ln(x).$$

1 a. Calculer $f'(x)$.

b. Résoudre l'inéquation : $2-\ln(x)\geqslant 0$ sur $]0\,;\mathrm{e}^3]$.

c. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\mathrm{e}^3]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

d. Préciser la valeur exacte du maximum de f.

e. À l'aide de la calculatrice, que peut-on dire de $f(x)$ lorsque x est proche de 0 ?
En posant $f(0)=0$, on prolonge ainsi la fonction f par continuité pour qu'elle soit définie sur $[0\,;\mathrm{e}^3]$.
Calculer $f(\mathrm{e}^3)$.
En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0\,;\mathrm{e}^3]$.

2 Visualiser cette fonction f à l'aide d'une calculatrice.

a. À l'aide de la calculatrice, indiquer quelles sont les valeurs de x pour lesquelles $f(x)=4$.
On donnera les valeurs arrondies à l'unité près de sorte que $f(x)>4$.

b. Calculer, à la calculatrice, l'intégrale $\int_1^{20} f(x)\,\mathrm{d}x$.
En donner une valeur approchée à 0,01 près.

PARTIE B Interprétation économique

Une société d'achats en ligne veut analyser le déroulement d'une vente promotionnelle « flash » qu'elle a organisée sur Internet.
Cette vente, d'une durée annoncée de 20 minutes, a provoqué sur son site un flux dont l'intensité a été variable en fonction du temps.
En notant x le temps, en minute, écoulé depuis le départ de l'opération, on admet que $f(x)$ est la mesure instantanée de ce flux, en millier d'euros par minute.
On suppose qu'aucun achat n'est possible pendant la première minute et que la somme totale, en millier d'euros, transférée depuis la première minute et jusqu'à la fin des 20 minutes de la vente, est modélisée par l'intégrale :

$$S=\int_1^{20} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant au mieux les résultats trouvés dans la **Partie A**, répondre aux questions suivantes.

1 On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\mathrm{e}^3]$.
Interpréter graphiquement l'intégrale en termes d'aire.

2 Sur quelle plage horaire, en minute, le flux instantané est-il supérieur à 4 000 € par minute ?

3 Quelle est la somme totale transférée depuis la première minute et jusqu'à la fin des 20 minutes ?
Arrondir à 10 € près.

111 Coût marginal, coût total et coût moyen

Une entreprise conditionne et vend entre 1 et 20 tonnes d'amandes sèches décortiquées, par mois.
On estime que lorsqu'elle conditionne une quantité de q tonnes d'amandes, le **coût marginal** associé, en millier d'euros par tonne, est :
$$C_m(q) = 4 + (0{,}2q^2 - 2q)\,e^{-0{,}2q}, \text{ où } 1 \leqslant q \leqslant 20\,.$$
Les amandes sont vendues 4 000 € la tonne.

PARTIE A Des fonctions coûts

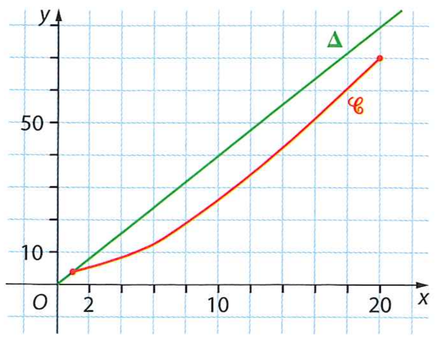
1 La fonction **coût total** est modélisée par la fonction CT définie sur l'intervalle $[\,1\,;20\,]$ par :
$$CT(q) = 4q - q^2\,e^{-0{,}2q}\,.$$
Vérifier que cette fonction CT est une primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[\,1\,;20\,]$.

2 La fonction **coût moyen**, notée CM, est la fonction définie sur l'intervalle $[\,1\,;20\,]$ par :
$$CM(q) = \frac{CT(q)}{q}\,.$$
a. Simplifier l'écriture de $CM(q)$ en fonction de q.
b. Montrer que $CM'(q) = (0{,}2q - 1)\,e^{-0{,}2q}$.
c. Pour quelle production mensuelle q_0, en tonne, l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal ?
Quel est ce coût moyen ?

3 Pour cette production q_0, quelle est la valeur du coût marginal ?

PARTIE B Étude de bénéfice

1 Justifier que, lorsque l'entreprise vend q tonnes d'amandes, la recette, en millier d'euros, est donnée par :
$$R(q) = 4q\,.$$
2 On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction CT et la droite Δ d'équation $y = 4x$.



On suppose que l'entreprise vend toute sa production.
Question ouverte
Estimer, en précisant la démarche, le bénéfice maximal que l'entreprise peut espérer.

112 Bénéfice marginal et bénéfice total

Une entreprise fabrique des pièces pour moteur qu'elle conditionne par centaines.
Sa fabrication journalière varie entre 100 et 600 pièces.
Une étude a montré que lorsque x centaines de pièces sont fabriquées et vendues par jour, le **bénéfice marginal** $f(x)$ réalisé par l'entreprise, en dizaine de milliers d'euros pour 100 pièces, est modélisé par :
$$f(x) = -x + 5 - \frac{4}{x}, \text{ où } 1 \leqslant x \leqslant 6\,.$$
On sait, de plus, que le **bénéfice total** B de l'entreprise est nul pour la fabrication et la vente quotidienne de 100 pièces.
On rappelle qu'en économie, la fonction f « bénéfice marginal » peut être assimilée à la dérivée de la fonction B « bénéfice total ».

PARTIE A Étude du bénéfice marginal

1 a. Calculer $f'(x)$ sur $[\,1\,;6\,]$ et montrer que :
$$f'(x) = \frac{4 - x^2}{x^2}\,.$$
b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[\,1\,;6\,]$.
c. Dresser le tableau des variations de f sur $[\,1\,;6\,]$.

2 a. Calculer $f(4)$.
b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[\,1\,;6\,]$.

PARTIE B Détermination du bénéfice total

1 Justifier que la fonction bénéfice total B est la primitive de f sur $[\,1\,;6\,]$ qui s'annule en 1.

2 Montrer que la fonction F définie sur $[\,1\,;6\,]$ par :
$$F(x) = -0{,}5x^2 + 5x - 4\ln(x)$$
est une primitive de f sur $[\,1\,;6\,]$.

3 En déduire le bénéfice total $B(x)$, exprimé en fonction de x, sur l'intervalle $[\,1\,;6\,]$. Justifier que le bénéfice est exprimé en dizaine de milliers d'euros.

PARTIE C Étude du bénéfice total

1 En utilisant les résultats des questions précédentes, dresser le tableau de variations de la fonction B sur $[\,1\,;6\,]$.
Justifier que le bénéfice est positif sur $[\,1\,;6\,]$.

2 Déterminer la quantité de pièces à fabriquer et à vendre quotidiennement pour que l'entreprise réalise un bénéfice maximal.
En déduire le bénéfice maximal.
On donnera ce bénéfice maximal arrondi à 100 euros près.

3 Préciser la dérivée seconde de la fonction B.
Justifier que, sur $[\,1\,;6\,]$, la courbe du bénéfice admet un point d'inflexion.
Interpréter économiquement ce résultat.

4 Question ouverte
L'entreprise estime que la production est rentable si son bénéfice est supérieur à 10 000 €.
Déterminer la plage de rentabilité de la production.
On donnera le résultat arrondi à l'unité près.

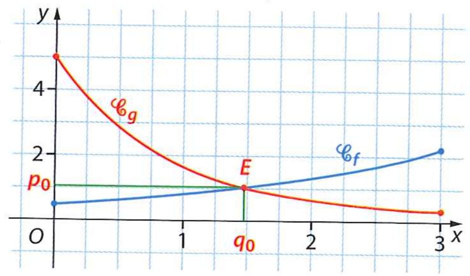
113 Surplus des producteurs

Une entreprise fabrique et vend jusqu'à 3 millions de gommes par mois.
• Le prix unitaire qu'acceptent de payer les consommateurs en fonction de la quantité x de gommes disponible sur le marché est modélisé par la **fonction g** définie sur l'intervalle $[\,0\,;3\,]$ par :
$$g(x) = \frac{5}{x^2 + x + 1}\,.$$
• Les producteurs acceptent de fabriquer une quantité x de gommes si le prix unitaire de la gomme atteint une valeur minimale. Ce prix minimal (qui dépend de la quantité x) est modélisé par la **fonction f** définie sur l'intervalle $[\,0\,;3\,]$ par :
$$f(x) = 0{,}5\,e^{0{,}5x}\,.$$
Les prix unitaires $f(x)$ et $g(x)$ sont exprimés en euro et la quantité x en million de gommes.

1 a. Calculer $g'(x)$.
b. Montrer que $g'(x)$ a le même signe que $-10x - 5$.
c. Étudier les variations de g sur $[\,0\,;3\,]$.

2 Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f sur $[\,0\,;3\,]$.

3 Dans un **marché à concurrence parfaite**, la « loi de l'offre et de la demande » tend à dégager un prix d'équilibre p_0 pour lequel **l'offre des producteurs** est égale à la **demande des consommateurs.**
On appelle q_0 la quantité d'équilibre associée à p_0.
On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions d'offre et de demande, représentées ci-dessous :



Pour tout réel x de $[\,0\,;3\,]$, on pose $h(x) = f(x) - g(x)$.
a. D'après les signes de $f'(x)$ et de $g'(x)$ sur $[0;3]$, obtenus en **1** et **2**, indiquer le signe de $h'(x)$.
En déduire les variations de h sur $[\,0\,;3\,]$.
b. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique q_0 sur $[\,0\,;3\,]$.
c. À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 0,01 près de la solution q_0.
Puis calculer le prix $p_0 = f(q_0)$.
En donner une valeur arrondie à 0,01 € près.

4 On appelle **surplus des producteurs S_P** le gain supplémentaire que réalisent les producteurs en vendant au prix p_0. Il est égal à : $S_P = p_0 \times q_0 - \int_0^{q_0} f(x)\,dx$.
Il est exprimé en million d'euros.
a. Donner une interprétation graphique de S_P.
On interprétera le produit $p_0 \times q_0$ comme l'aire d'un rectangle.
b. Calculer l'intégrale $I = \int_0^{1{,}5} e^{0{,}5x}\,dx$.
Arrondir le résultat à 0,001 près.
c. En faisant apparaître l'intégrale I dans le calcul, en déduire S_P et donner une valeur arrondie du surplus S_P à 0,01 million d'euros près.

114 Taux de fécondité et descendance finale

PARTIE A

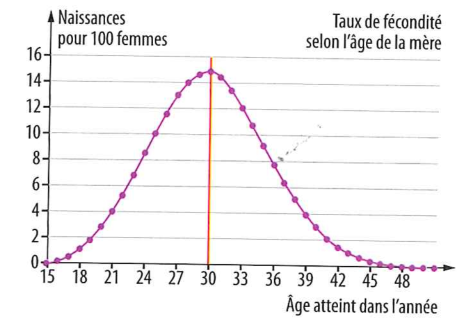
On considère la fonction f définie sur $[\,-15\,;20\,]$ par :
$f(x) = 15\,e^{-0{,}015x^2}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1 a. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.
b. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f sur $[\,-15\,;20\,]$.

2 À l'aide de la calculatrice, calculer la valeur de l'intégrale $\int_{15}^{20} f(x)\,dx$. *Arrondir le résultat à 0,1 près.*

PARTIE B

Le taux de fécondité $t(k)$ à un âge k, de 15 à 50 ans, est le rapport entre le nombre d'enfants nés vivants des femmes d'âge k et le nombre de femmes de même âge k.
On appelle **descendance finale** la somme des taux de fécondité par âge $t(k)$. Elle est donc égale à :
$$t(15) + t(16) + \ldots + t(50)\,.$$



Source : Insee.

On modélise le taux de fécondité en France en 2011 par la fonction f de la **Partie A**, où $x = k - 30$.
On suppose que la descendance finale peut être estimée par l'aire $\mathscr{A}$ du domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = -15$ et $x = 30$. L'unité d'aire est un nombre de naissances annuelles.
Calculer la descendance finale, en écriture décimale.

115 Courbes de Lorenz

On appelle **courbe de Lorenz** la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

① L est définie sur $[0\,;1]$ et $L(0)=0$ et $L(1)=1$;

② L est croissante et convexe sur $[0\,;1]$;

③ pour tout réel x de $[0\,;1]$, $L(x) \leqslant x$.

PARTIE A Courbe de Lorenz polynômiale

On considère la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x)=0{,}8x^5+0{,}2x.$$

1 Montrer que la fonction f vérifie les conditions ①.

2 a. Calculer la dérivée $f'(x)$ et la dérivée seconde $f''(x)$.

b. Montrer que la fonction f vérifie les conditions ②.

3 a. Étudier le signe de $h(x)=x-f(x)$ sur $[0\,;1]$.

b. En déduire que la fonction f vérifie la condition ③.

PARTIE B Courbe de Lorenz exponentielle

On considère la fonction g définie sur $[0\,;1]$ par :

$$g(x)=0{,}2x\,\mathrm{e}^{1{,}6x}.$$

1 Calculer $g(0)$ et $g(1)$, arrondis à 0,1 près.

2 a. Calculer la dérivée $g'(x)$.

b. Justifier que la fonction g est croissante sur $[0\,;1]$.

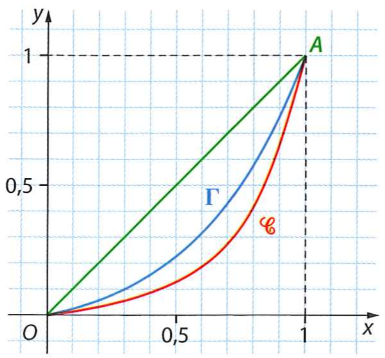
3 On admet que, sur $[0\,;1]$, la dérivée seconde est :

$$g''(x)=0{,}512\,(x+1{,}25)\,\mathrm{e}^{1{,}6x}$$

et que, pour tout réel x de $[0\,;1]$, on a $g(x) \leqslant x$.

Montrer que la courbe Γ de cette fonction g est une courbe de Lorenz.

PARTIE C Indice de concentration



Les courbes de Lorenz $\mathscr{C}$ et Γ, représentant respectivement les fonctions f et g, illustrent ici la répartition de la masse salariale dans deux très grandes entreprises A et B :

• en abscisses, x représente le pourcentage cumulé (sous forme décimale) des personnes ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de l'entreprise ;

• en ordonnées, $f(x)$ (ou $g(x)$) représente le pourcentage (sous forme décimale) de la masse salariale totale affectée aux t % les moins bien payés des salariés de chaque entreprise, avec $\dfrac{t}{100}=x$.

On rappelle que la **masse salariale** est la somme des rémunérations brutes de tous les salariés appartenant à l'entreprise.

On appelle **indice de Gini** γ_A pour l'entreprise A, le nombre $1-2\times\mathscr{A}$, où $\mathscr{A}$ est l'aire, en unité d'aire, sous la courbe $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

1 Calculer $f(0{,}9)$ et $g(0{,}9)$.

Arrondir les résultats obtenus à 0,01 près et interpréter ces valeurs.

2 a. Déterminer une primitive F de f sur $[0\,;1]$.

b. Calculer l'aire $\mathscr{A}$, en unité d'aire, sous la courbe $\mathscr{C}$ de la fonction f.

En donner la valeur exacte.

c. En déduire l'indice de Gini γ_A pour l'entreprise A.

Arrondir le résultat à 0,001 près.

3 a. À l'aide de la calculatrice, on a obtenu :

$$\int_0^1 (0.2X\times e^{1.6X})\,dx \qquad 0.3102983949$$

En déduire l'indice de Gini γ_B pour l'entreprise B.

Arrondir le résultat à 0,001 près.

b. Plus l'indice de Gini est petit, plus la répartition des salaires dans l'entreprise est égalitaire.

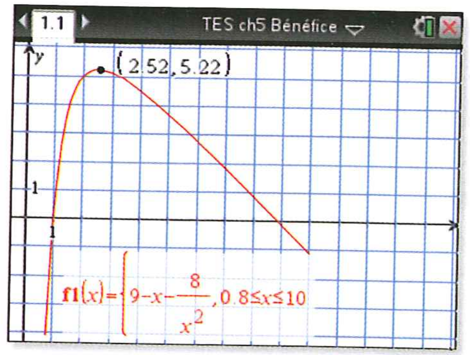
Dans quelle entreprise la distribution des salaires est-elle la plus irrégulièrement répartie ?

Le graphique permettait-il de prévoir ce résultat ? Pourquoi ?

116 Bénéfice moyen et valeur moyenne d'un bénéfice

Le bénéfice réalisé par la vente de x milliers d'objets identiques est modélisé par la fonction f, définie sur l'intervalle $[0{,}8\,;10]$ par $f(x)=9-x-\dfrac{8}{x^2}$, le bénéfice étant en dizaine de milliers d'euros.

On a obtenu la courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous à l'aide d'un grapheur, et les coordonnées arrondies du sommet, que l'on admet.



1 Répondre aux questions suivantes par lecture de ce graphique ou à l'aide de la calculatrice :

a. Dresser le tableau des variations de f sur $[0{,}8\,;10]$. Calculer les valeurs aux bornes à 0,01 près.

b. Pour quelle quantité x_0 d'objets le bénéfice est-il maximal ? Quelle est la précision permise par le graphique ?

c. Quel est le bénéfice maximal ?

d. Calculer alors le bénéfice moyen par objet lorsque l'on vend x_0 objets.

2 a. Vérifier par le calcul que, pour un millier d'objets vendus, le bénéfice est nul.

b. Existe-il une autre quantité α pour laquelle le bénéfice est nul ? Justifier.

c. À l'aide de la calculatrice, donner la plage des quantités permettant de réaliser un bénéfice.

On arrondira les bornes de l'intervalle à 100 objets près.

3 On désire calculer la valeur moyenne de ce bénéfice pour la vente de 1 000 à 6 000 objets.

a. Déterminer une primitive F de f sur $[1\,;6]$.

b. Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\displaystyle\int_1^6 f(x)\,dx$. Préciser ce que représente une unité d'aire.

c. Calculer la valeur moyenne du bénéfice pour la vente de un à 6 milliers d'objets.

117 Comparer deux répartitions

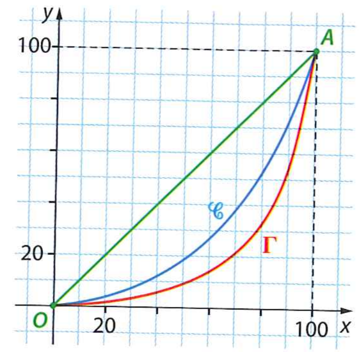
Les courbes de Lorenz $\mathscr{C}$ et Γ sur le schéma suivant illustrent la répartition des surfaces agricoles utilisées (SAU) en fonction de la taille des exploitations, respectivement en France métropolitaine et à la Réunion, en 2010.

La courbe $\mathscr{C}$ représente la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;100]$ par :

$$f(x)=\frac{100}{\mathrm{e}^3-1}\,(\mathrm{e}^{0{,}03x}-1).$$

La courbe Γ représente la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;100]$ par :

$$g(x)=\frac{94\,900}{(x-130)^2}-5.$$



D'après Agreste – Ministère de l'agriculture.

1 a. Vérifier que $f(0)=0$ et $f(100)=100$. Par la suite, on prendra $\dfrac{100}{\mathrm{e}^3-1}\approx 5{,}25$. D'où $f(x)=5{,}25\,(\mathrm{e}^{0{,}03x}-1)$.

b. Étudier le sens de variation de f sur $[0\,;100]$.

c. Montrer que la fonction F définie par :

$$F(x)=175\,\mathrm{e}^{0{,}03x}-5{,}25x$$

est une primitive de f sur $[0\,;100]$.

En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{100} f(x)\,dx$.

2 a. Justifier qu'une primitive de g sur $[0\,;100]$ est :

$$G(x)=\frac{-94\,900}{x-130}-5x.$$

b. En déduire $\displaystyle\int_0^{100} g(x)\,dx$.

3 On rappelle que l'**indice de Gini** est le nombre : $\gamma=2\times\mathscr{A}$, où $\mathscr{A}$ est l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par le segment $[OA]$ et la courbe de Lorenz.

a. Calculer la valeur arrondie de l'indice de Gini γ_F de la France à 0,01 près.

b. Faire de même pour l'indice de Gini γ_R de la Réunion à 0,01 près.

c. Plus l'indice de Gini est petit, plus la répartition est égalitaire. Quelle est la région pour laquelle la répartition est la plus égalitaire ?

Le graphique permettait-il de prévoir ce résultat ?

Pour info La Réunion compte environ 7 000 exploitations agricoles, de SAU moyenne 6,4 ha en 2007.

La France métropolitaine en compte environ 490 000, de SAU moyenne 80 ha en 2010.

118 ... en économie TICE

Comparer des répartitions en France

PARTIE A Répartition des niveaux de vie

On rappelle que le **niveau de vie** est égal au revenu disponible du ménage (net d'impôt) divisé par le nombre d'unités de consommation (uc) qui dépend du nombre de personnes composant le ménage.
On donne ci-dessous le tableau de la répartition des niveaux de vie en France métropolitaine en 2009 :

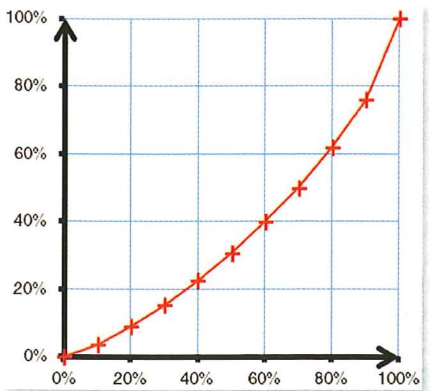
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Part cumulée des ménages suivant le niveau de vie	0%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
2	Masse des niveaux de vie détenus	0%	3,6%	8,9%	15,3%	22,5%	30,7%	39,8%	50,0%	61,8%	76,0%	100%
3	Aire sous le segment associé		0,002									

Source : Insee-DGI.

Exemple de lecture : En 2009, les individus qui font partie des 10 % des plus modestes en niveau de vie détiennent 3,6 % de la masse totale des revenus disponibles.

1 Construire la feuille de calcul ci-dessus.
Les cellules de la plage B1:L2 sont en format pourcentage.
Voir page I

Construire le nuage de points représentant la répartition, ajusté par une fonction affine par morceaux, comme ci-dessous :



2 On veut calculer l'aire $\mathscr{A}$, en u.a., du domaine délimité par les segments rouges, l'axe des abscisses et la droite verticale d'équation $x = 100\ \%$.

a. Indiquer la formule à entrer en C3.

b. Parmi les formules suivantes, indiquer celle à entrer en D3 et à recopier jusqu'en L3 :
=0,1*D2/2 ; =0,1*(C2+D2)/2 ;
=10*(C2+D2)/2 ; =0,1*D2/2–B3 .

c. En déduire l'aire $\mathscr{A}$, en u.a.

d. En déduire une estimation de l'indice de Gini du niveau de vie en 2009.

3 a. Par clic droit sur le nuage de points, obtenir l'équation $y = f(x)$ d'une courbe de tendance de type polynômiale d'ordre 4. Voir exercice 82 page 125

b. Calculer l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

En déduire une deuxième estimation de l'indice de Gini du niveau de vie en 2009.

4 Comparer les résultats obtenus en **2 d.** et **3 b.**

5 On donne les valeurs de l'indice de Gini du niveau de vie en France depuis 1970. Commenter.

Année	Indice de Gini
1970	0,34
1975	0,32
1979	0,30
1984	0,29
1990	0,28

Année	Indice de Gini
1997	0,27
2000	0,29
2004	0,28
2006	0,29
2008	0,29

Source : Insee-DGI.

PARTIE B Répartition du patrimoine

1 En reprenant la démarche précédente, calculer l'indice de Gini de la répartition du patrimoine en 2004, à partir du tableau de la répartition du patrimoine en France métropolitaine en 2004 :

Source : Insee-DGI.

Part des ménages les moins riches en patrimoine	10 %	20 %	30 %	40 %	50 %	60 %	70 %	80 %	90 %
Masse du patrimoine total détenu	0 %	0,15 %	0,7 %	2,5 %	7,2 %	14,3 %	23,7 %	36,1 %	54,2 %

2 Comparer avec l'indice de Gini du niveau de vie de 2004.

119 ... dans l'histoire

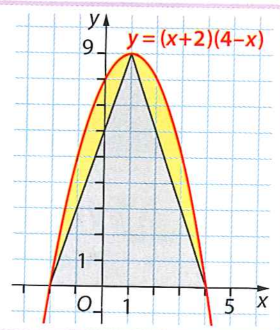
Secteur parabolique d'Archimède

Archimède a démontré que :
« un secteur parabolique compris entre une droite et une parabole est égal à quatre fois le tiers de l'aire d'un triangle ayant même base et même hauteur que ce secteur ».

a. La figure ci-contre présente un secteur parabolique et le triangle associé.
Vérifier l'affirmation d'Archimède à l'aide de calculs d'intégrale.

b. De même pour le secteur parabolique entre la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^2$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = 4$.

Voir page 135



120 ... en calcul numérique TICE

Intégrale d'une fonction continue

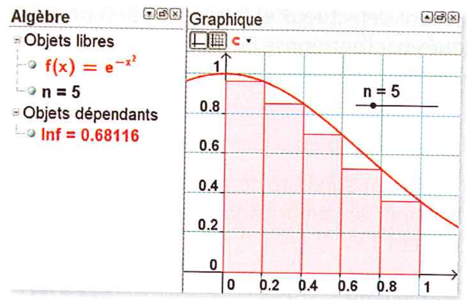
Certaines fonctions continues admettent des primitives, mais non « explicites », c'est-à-dire qu'on ne sait pas les exprimer en fonction de x par une formule. Le but est d'approcher une intégrale d'une telle fonction par calculs d'aires.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

1 a. À l'aide du logiciel Geogebra :
- créer la fonction f,
- créer un curseur entier n, entre 1 et 100,
- entrer dans la ligne de saisie :

Inf=SommeInférieure [f(x) , 0,1 , n] .

Le logiciel a créé n rectangles construits sous la courbe $\mathscr{C}$, de largeur $\frac{1}{n}$, appelés **rectangles inférieurs.**



Comparer l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ et la somme des aires des rectangles inférieurs.

b. Entrer dans la ligne de saisie :

Sup=SommeSupérieure [f(x) , 0,1 , n] .

Les n rectangles qu'on a créés, de largeur $\frac{1}{n}$, sont appelés **rectangles supérieurs.**

Comparer l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ et la somme des aires des rectangles supérieurs.

c. Que peut-on dire des sommes des aires des rectangles lorsque l'entier n augmente et devient grand ?

2 Soit un entier n fixé non nul.
On numérote les rectangles inférieurs de 1 à n (de la gauche vers la droite). Pour tout entier k de 1 à n, justifier que la hauteur du k-ième rectangle inférieur est :

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = \exp\left(-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right).$$

Préciser la hauteur du k-ième rectangle supérieur.

3 On choisit $n = 100$.
On souhaite calculer à l'aide d'une feuille de calcul les aires des rectangles inférieurs et supérieurs.

a. Réaliser la feuille de calcul ci-dessous, en entrant en C2 :
=EXP(-(B2/A2)^2 et les formules correspondantes en D2, E2 et F2.
Recopier ces formules vers le bas jusqu'à la ligne 101.

b. Calculer en G2 et H2 les sommes des aires des rectangles inférieurs et supérieurs.

c. En déduire un encadrement de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ à 0,01 près.

4 Reprendre la question précédente pour $n = 500$, puis pour $n = 1\,000$.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*n*	numéro du rectangle	longueur du rectangle inférieur	longueur du rectangle supérieur	aire du rectangle inférieur	aire du rectangle supérieur	somme des aires inférieures	somme des aires supérieures
2	**100**	1						
3		2						
4		3						