CORRECTION INTERROGATION ÉCRITE CHAP 9

EXERCICE 1 Déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f définie par **8 POINTS**

1. $f(x)=x+3 \quad F(x)=\frac{x^2}{2}+3x+c, c\in\mathbb{R}$ 2. $f(x)=4x^2+3x-1 \quad F(x)=\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-x+c, c\in\mathbb{R}$

3. $f(x)=-\frac{3}{x^2} \quad F(x)=\frac{3}{x}+c, c\in\mathbb{R}$ 4. $f(x)=\frac{4}{x^3} \quad F(x)=\frac{-2}{x^2}+c, c\in\mathbb{R}$

5. $f(x)=\frac{3}{x^4}-\frac{2}{x}+\frac{5}{\sqrt{x}} \quad F(x)=-\frac{1}{x^3}-2\ln x+10\sqrt{x}+c, c\in\mathbb{R}$

6. $f(x)=\frac{2}{3}e^x-3x+\frac{1}{x}-\frac{1}{2} \quad F(x)=\frac{2}{3}e^x-\frac{3x^2}{2}+\ln x-\frac{x}{2}+c, c\in\mathbb{R}$

7. $f(x)=\frac{2}{x^2}+\frac{4}{\sqrt{x}}-x+2 \quad F(x)=-\frac{2}{x}+8\sqrt{x}-\frac{x^2}{2}+2x, c\in\mathbb{R}$

8. $f(x)=7e^{-4x+1}+2x \quad F(x)=-\frac{7e^{-4x+1}}{4}+x^2+c, c\in\mathbb{R}$

EXERCICE 2 f est la fonction définie sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ par $f(x)=x+3+(2x+3)\ln x$. **3 POINTS**
Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x)=(ax^2+bx)\ln x$ soit une primitive de f sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$.

F est un primitive de f sur $]\,0\,;\,+\infty\,[$ ssi pour tout $x\in\,]\,0\,;\,+\infty\,[\quad F'(x)=f(x)$

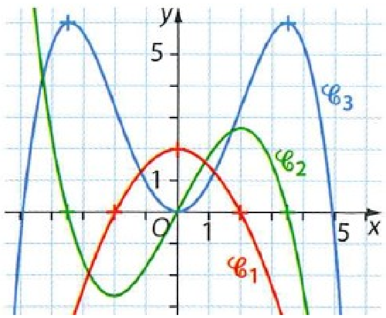
Or, pour tout $x\in\,]\,0\,;\,+\infty\,[\quad F'(x)=(2ax+b)\ln x+(ax^2+bx)\times\frac{1}{x}=ax+b+(2ax+b)\ln x$

Par identification des coefficients, on a ensuite :

$$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\\2a=2\\b=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}$$

EXERCICE 3 **3 POINTS**

Les courbes $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ sont les courbes de 3 fonctions f_1, f_2, f_3 dérivables sur $\mathbb{R}$. L'une est la courbe d'une fonction f, une autre est celle de sa dérivée f' et la dernière est celle d'une primitive F de f.
Retrouver en justifiant



On voit clairement que les graphiques $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$. représentent respectivement des fonctions du 2ème degré (parabole) ; 3ème degré ; 4ème degré ; elles représentent donc respectivement $\mathscr{C}_{f'}$, $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_F$.
On peut vérifier notre conjecture à l'aide des propriétés suivantes : les variations de F dependent du signe de sa dérivée f. Les variations de f dépendent du signe de sa dérivée f'.
Enfin, la convexité de F dépend du signe de sa dérivée seconde f' ou encore des variations de sa dérivée f.

Les valeurs en lesquelles $\mathscr{C}_1$ coupent l'axe des abscisses correspondent aux points d'inflexion de $\mathscr{C}_3$.

EXERCICE 4 **6 POINTS**

PARTIE A

1. $f'(1)$ correspond au coefficient directeur de la droite T_1 tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 1. T_1 est horizontale, son coefficient directeur est donc nul. Il en résulte que $f'(1)=0$.
   $B(1\,;1{,}5)\in\mathscr{C} \Leftrightarrow f(1)=1{,}5$.
2. $f'(0)$) correspond au coefficient directeur de la droite T_0 tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse 0. Le coefficient directeur de T_0 s'obtient par lecture graphique ou en remarquant que T_0 n'est autre que la droite (AC) dont le coefficient directeur est $\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=1$.
3. $\int_0^2 f(x)dx$ correspond, en unités d'aires, à la surface de la partie du plan délimitée par les droites verticales d'équation $x=0$ et $x=2$; la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.
   Ici, un carreau correspond à une unité d'aire. En comptant le nombre de carreaux sous la courbe, on obtient que $2\leq\int_0^2 f(x)dx\leq 3$. On pourra vérifier cette conjecture en partie B en calculant
   $F(2)-F(0)$ avec $F(0)=-5 \quad F(2)=-17e^{-2}$ soit $\int_0^2 f(x)dx=-17e^{-2}+5\approx 2{,}699$.

PARTIE B

1. F est un primitive de f sur $[-1\,;5]$ ssi pour tout $x\in[-1\,;5]\quad F'(x)=f(x)$
   On en déduit que pour tout $x\in[-1\,;5]$:
   $f(x)=f(x)=-(2x+4)e^{-x}+(x^2+4x+5)e^{-x}=e^{-x}(x^2+2x+1)=e^{-x}(x+1)^2$;
   positif sur $[-1\,;5]$; et nul en -1

2. Montrer que sur l'intervalle $[-1\,;5]$, l'équation $f(x)=1$ admet au moins une solution.
   f est continue et dérivable sur $[-1\,;5]$.
   Les variations de f dépendent du signe de sa dérivée f'.

   Pour tout $x\in[-1\,;5]$:
   $f'(x)=-e^{-x}(x+1)^2+2(x+1)e^{-x}=e^{-x}(x+1)[2-(x+1)]=e^{-x}(x+1)(x-1)$; du signe de $(x+1)(x-1)$; forme factorisée d'un trinôme de racines -1 et 1 ; positif à l'extérieur des racines.
   Il en résulte que f est croissante sur $[-1\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;5]$. Ceci est cohérent avec le graphique !

On a le tableau de variations suivant :

x	-1	1	5
$f(x)$	0 ↗	$4e^{-1}$	↘ $36e^{-5}$

f est continue sur $[1\,;5]$ et présente un maximum en $x=1$.
De plus : $f(-1)<1; f(1)>1; f(5)<1$
donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x)=1$ admet exactement 2 solutions. L'une dans $]-1\,;1[$, l'autre dans $]\,1\,;5[$.