Chapitre 10 : Calcul intégral

I – Notion d'intégrale

Définition 1: Soit F une primitive d'une fonction continue f sur un intervalle $[a,b]$.

On appelle **intégrale de la fonction f entre a et b** le nombre réel noté $\int_a^b f(x)dx$ tel que :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Intégrale d'une fonction sur un intervalle : exemple

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 4x$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

$F : x \mapsto 2x^2 + k, k \in \mathbb{R}$ est une primitive de f.

L'intégrale de la fonction f entre 0 et 2 est $\int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0) = 2\times 2^2 \cancel{+k} - 2\times 0^2 \cancel{-k} = 8$

Remarques : • La valeur d'une intégrale est indépendante de la constante k associée à la primitive.

• $\int_a^b f(x)dx$ se lit aussi "somme de a à b de $f(x)dx$ ".

• x est appelé "**variable muette**". a et b sont les **bornes** de l'intégrale.

Propriété 1: Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$.

• $\int_a^a f(x)dx = 0$ et $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

• Si $f \geq 0$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

• Si $f \geq g$ alors $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Positivité de l'intégrale

• F est dérivable sur $[a,b]$ telle que $F'(x) = f(x) \geq 0$

donc F est croissante sur $[a,b]$

donc $a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b) \Rightarrow F(b) - F(a) \geq 0$

• $f \geq g \Leftrightarrow f - g \geq 0$ donc on obtient $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx \geq 0$ soit $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$

Propriété 2: Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$ et α un réel.

• $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

• $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx$

Remarque : La propriété 2 (linéarité de l'intégrale) se déduit des formules de calcul de primitives.

Intégrale d'une fonction sur un intervalle : exemple

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 4x$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

$F : x \mapsto 2x^2 + k, k \in \mathbb{R}$ est une primitive de f.

L'intégrale de la fonction f entre 0 et 2 est $\int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0) = 2\times 2^2 \cancel{+k} - 2\times 0^2 \cancel{+k} = 8$

Définition 2: fonction définie par une intégrale

Soit F une primitive d'une fonction continue f sur un intervalle $[a,b]$.

La Fonction G définie sur [a;b] par $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Preuve : $G(x) = [\,F(t)\,]_a^x = F(x) - F(a)$ G diffère de F d'une constante, donc G est une primitive de F sur [a;b]

$G(a) = F(a) - F(a) = 0$ G s'annule en a.

II – Aire sous la courbe d'une fonction

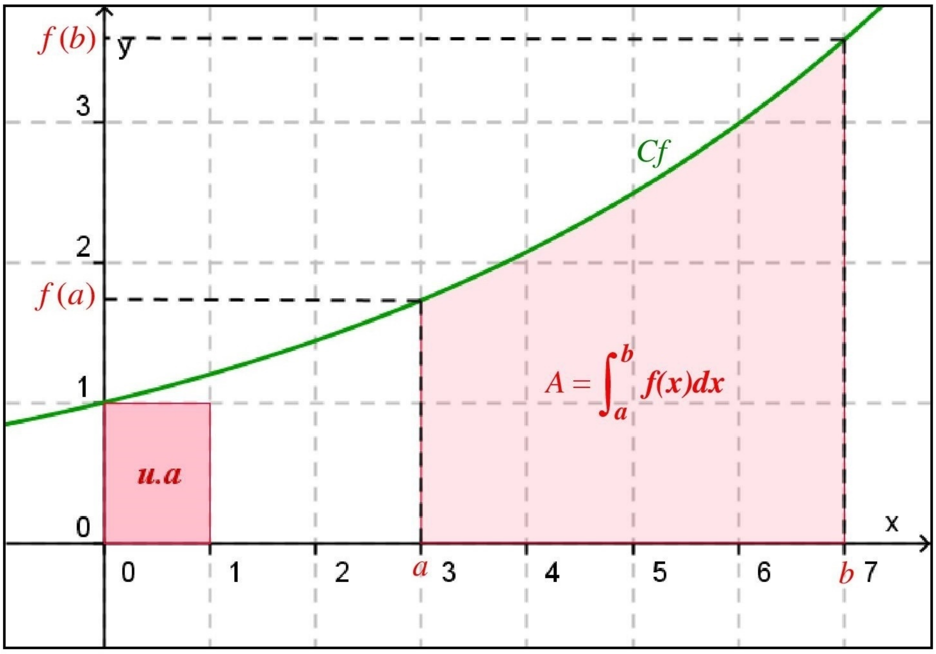
1 - Propriété fondamentale

Propriété 3: Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a,b]$.

L'aire A du domaine limité par la courbe Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unités d'aire $(u.a)$ est :

$$A = \int_a^b f(x)dx \text{ (en } u.a)$$

Sur le graphique ci-dessous, **l'unité d'aire (*u.a*)** est le rectangle de longueurs 1 unité sur l'axe des abscisses et 1 unité sur l'axe des ordonnées (qui peuvent être de longueurs différentes dans un repère orthogonal).

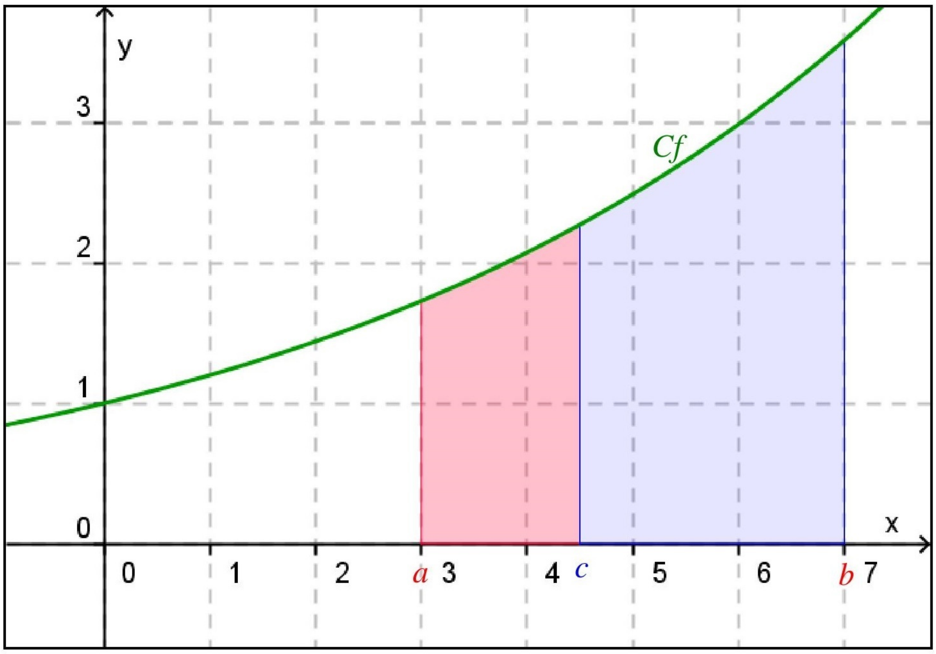


Encadrement d'une intégrale :

En comptant le nombre de carreaux coloriés, on peut donner un encadrement de l'intégrale entre a et b de la fonction f.

Ici on peut établir que $10 < \int_a^b f(x)dx < 11$

2 - Relation de Chasles



Propriété 4: Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I contenant les réels a, b et c.

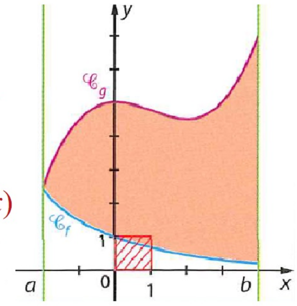
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

3 - Intégrale d'une fonction de signe quelconque

La définition de l'intégrale pour une fonction positive permet de calculer "l'aire sous une courbe" puisque l' "aire sous la courbe" est alors égale, en unités d'aires à $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
Plus généralement, l'intégrale d'une fonction quelconque permet de calculer l'aire de certaines surfaces planes délimitées par une courbe ou par deux courbes.

Propriété 5 : si f est continue et négative sur $[a;b]$, l'aire, en unité d'aire de la surface plane délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$-\int_a^b f(x)dx$$



4 - Aire entre deux courbes

Propriété 6 : si f et g sont deux fonctions continues et positives sur $[a;b]$ telles que $f(x)<g(x)$ alors l'aire exprimée en unité d'aire de la surface comprise en $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b g(x) - f(x)\,\mathrm{d}x$

5 - Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Définition 3: On appelle **valeur moyenne d'une fonction** f continue sur un intervalle $[a,b]$ le nombre :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Interprétation graphique de la valeur moyenne

La valeur moyenne de la fonction est la hauteur du rectangle de base $b-a$ qui a la même aire que le domaine limité par la courbe, la droite $y=0$, et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.