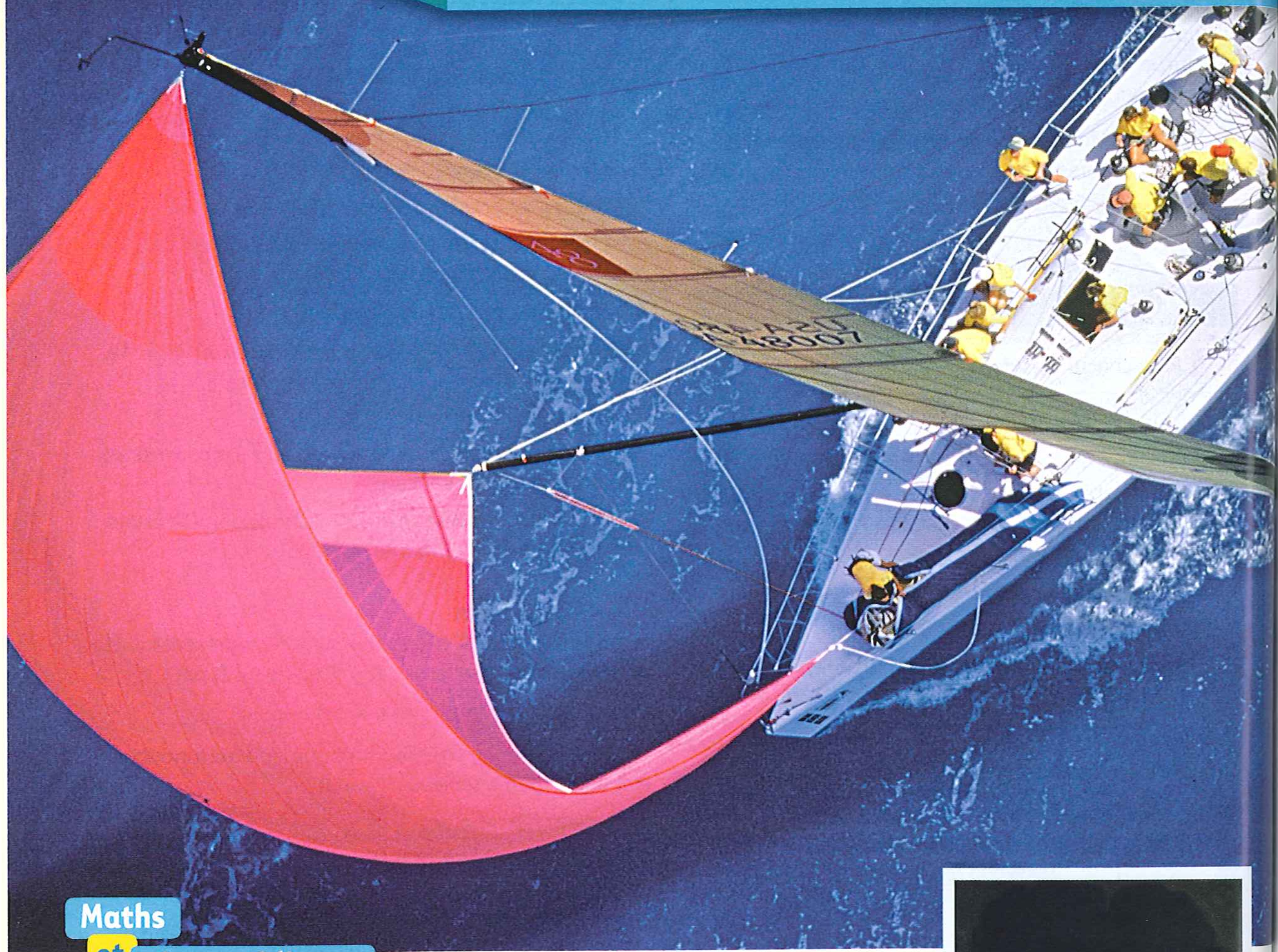
CHAPITRE

6 Intégration



Maths et vie quotidienne

Pour mesurer comment l'air pousse sur la voile, les physiciens décomposent celle-ci en éléments de surface « aussi petits que l'on veut », puis effectuent un calcul de poussée sur chacun de ces éléments de surface. Ils calculent alors la somme (l'intégrale) d'une infinité de forces de poussée infiniment petites sur tous les éléments de la surface de la voile.

Parmi les différentes approches de l'intégrale, celle qui consiste à l'appréhender comme une somme d'éléments « aussi petits que l'on veut » est due à l'Allemand Bernhard Riemann.

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646-1716

→ Chercheur d'hier p. 180

Rappels & Questions-tests

Compléments numériques

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$	$x \mapsto n\,x^{n-1}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$
$x \mapsto k, k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$
$x \mapsto e^{u(x)}$, u dérivable	$x \mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$

Dérivées et opérations

u et v sont deux fonctions dérivables sur I.

Fonction	$u+v$	ku $(k \in \mathbb{R})$	uv	$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{u}{v}$
Dérivée	$u'+v'$	ku'	$u'v+uv'$	$-\dfrac{u'}{u^2}$	$\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

1 Calculez la dérivée de la fonction indiquée :

a) $x \mapsto 4x^2+3$.

b) $x \mapsto \sqrt{x}+\ln x$.

c) $x \mapsto 2e^x-\dfrac{1}{x}$.

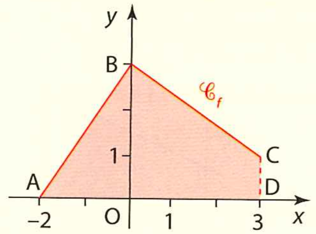
d) $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.

e) $x \mapsto \dfrac{3}{2}x^6-\dfrac{x}{2}$.

f) $x \mapsto e^x-x$.

Additivité de l'aire

f est la fonction définie sur $[-2\,;3]$.
Sa courbe représentative est indiquée ci-dessous dans un repère orthonormé (unité : 1 cm).



Notons $\mathscr{A}$ l'aire en cm² du domaine colorié en rouge.

$\mathscr{A}$ = (Aire du triangle OAB) + (Aire du trapèze OBCD)

$$= \frac{\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}}{2} + \mathrm{OD}\times\frac{\mathrm{OB}+\mathrm{DC}}{2}$$

donc $\mathscr{A} = 3+6 = 9$ cm².

2 f est la fonction définie sur $[-3\,;4]$ de la manière suivante :

si $x \in [-3\,;-1]$, $f(x) = x+3$;

si $x \in [-1\,;1]$, $f(x) = 2$;

si $x \in [1\,;4]$, $f(x) = x+1$.

a) Tracez dans un repère orthonormé (unité : 1 cm) la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f.

b) Calculez l'aire, en cm², du domaine délimité par $\mathscr{C}_f$, la droite des abscisses et les droites d'équation $x=-3$ et $x=4$.

→ Voir les corrigés p. 361

Activité 1 DÉRIVÉE DANS UN SENS ; PRIMITIVES DANS L'AUTRE

1 Notion de primitive

Un exemple : on sait que si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.

On dit alors que la fonction : $x \mapsto x^2$ est une **primitive** de la fonction : $x \mapsto 2x$.

Plus généralement, une **primitive** d'une fonction f sur un intervalle I est une fonction F telle que $F' = f$.

En lisant « à l'envers » le tableau donnant les fonctions dérivées des fonctions usuelles rappelé p. 149, indiquez une primitive sur I de chacune des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto 1$ $\quad$ $I = \mathbb{R}$.

b) $f : x \mapsto 2x$ $\quad$ $I = \mathbb{R}$.

c) $f : x \mapsto 3x^2 + 1$ $\quad$ $I = \mathbb{R}$.

d) $f : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + 4x^3$ $\quad$ $I =]0 ; +\infty[$.

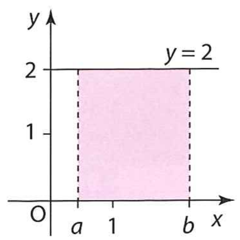
2 Une seule dérivée, mais une infinité de primitives

1. Montrez que si F est une primitive de f sur I, alors, pour toute constante réelle c, la fonction $G : x \mapsto F(x) + c$ est aussi une primitive de f sur I.

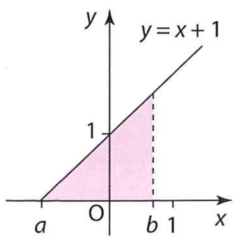
2. Indiquez cinq primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto 2x + 1$.

Activité 2 AIRES ET PRIMITIVES

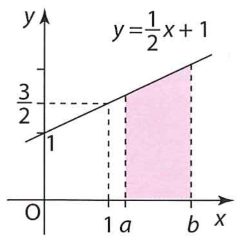
L'unité de longueur est le cm, l'unité d'aire est le cm² et les repères utilisés sont orthonormaux.



Rectangle



Triangle rectangle



Trapèze rectangle

Dans chacun des cas ci-dessus :

1 Calculez l'aire du domaine colorié ;

2 Trouvez une primitive F de la fonction f représentée, et vérifiez que l'aire calculée est égale à $F(b) - F(a)$.

1 Intégrale d'une fonction continue positive sur un intervalle

1.1 Définition

f est une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$. $\mathscr{C}_f$ est sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

L'unité d'aire est l'aire du rectangle OACB.

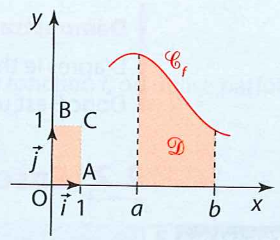
Alors :

Définition 1

Si f est **positive** sur $[a ; b]$, l'aire du domaine $\mathscr{D}$ délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est appelée **l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ pour $x \in [a ; b]$**. Elle est notée

$$\int_a^b f(t)\,dt.$$

Ceci se lit : « intégrale de a à b de $f(t)\,dt$ ».



Remarques

1. $\int_a^b f(t)\,dt$ peut également être noté $\int_a^b f(x)\,dx$ ou $\int_a^b f(u)\,du$ ou …

2. Par convention, on pose $\int_a^a f(t)\,dt = 0$.

1.2 Théorème fondamental

Théorème 1

Si f est continue et positive sur $[a ; b]$, la fonction F définie sur $[a ; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est **dérivable** sur $[a ; b]$ et **a pour dérivée f**.

Idée de la démonstration. Supposons $h > 0$. Calculons le taux d'accroissement :

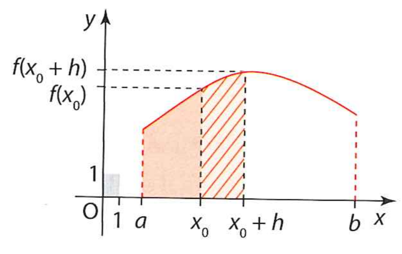
$$T(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$

$F(x_0 + h) - F(x_0)$ est égal à l'aire du domaine hachuré.

Or pour h « petit », $f(x_0 + h)$ est sensiblement égal à $f(x_0)$ puisque f est continue. D'où cette aire est sensiblement égale à $h \times f(x_0)$.

Donc $T(h) \approx \dfrac{h \times f(x_0)}{h} = f(x_0)$.

D'où $\lim\limits_{h \to 0} T(h) = f(x_0)$.



2 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

2.1 Notion de primitive

Définition 2

f est une fonction continue sur un intervalle I.
Une **primitive** de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que :

pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.

Théorème 2

Toute fonction **continue** sur un intervalle I admet une **primitive** sur I.

Démonstration. On se limite au cas où $I = [a\,;b]$. Posons, pour tout x de I, $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.
D'après le théorème 1 ci-dessus, pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.
Donc F est une primitive de f sur l'intervalle I.

2.2 Ensemble des primitives d'une fonction continue

Théorème 3

f est une fonction continue sur un intervalle I. F est une primitive de f sur I.
1. Alors la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$, où c est un réel, est une primitive de f sur I.
2. Toute primitive de f sur I est de la forme $F + c$, où c est un réel.

Démonstration. 1. Si F est une primitive de f sur I, alors F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$. Il est clair que la fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + c$, où c est un réel quelconque, est dérivable sur I et que $G'(x) = F'(x) = f(x)$ pour tout x de I.
Donc G est une primitive de f sur I.
2. Existe-t-il d'autres primitives de f sur I que les fonctions $F + c$, avec c réel ?
On va utiliser le fait que sur un intervalle, les fonctions constantes sont les seules fonctions ayant une dérivée nulle.
Supposons que G soit une primitive de f sur I ; alors G est dérivable sur I et $G' = f = F'$, donc $G' - F' = 0$. La fonction $G - F$ a donc une dérivée nulle sur I et, puisque I est un intervalle, $G - F$ est constante sur I. Il existe donc un réel c tel que sur I, $G - F = c$, c'est-à-dire $G = F + c$.

On déduit immédiatement de ce théorème que :

Sur un intervalle, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante.

2.3 Primitive prenant une valeur donnée en un point donné

Théorème 4

f est une fonction continue sur un intervalle I. x_0 est un réel donné de I et y_0 est un réel donné.
Alors, il existe une primitive G de f sur I, et une seule, telle que $G(x_0) = y_0$.

Démonstration. Notons F une primitive de f sur I : toute autre primitive G est définie par :

$G(x) = F(x) + c$, avec c réel.

Pour obtenir l'égalité $G(x_0) = y_0$, c'est-à-dire $F(x_0) + c = y_0$, il est nécessaire et suffisant de choisir $c = y_0 - F(x_0)$, et ce choix est unique.
On dit alors que G est **la** primitive de f sur I qui prend la valeur y_0 en x_0.

2.4 Relation entre intégrale et primitive

Théorème 5

Soit f une fonction continue et positive sur $[a\,;b]$, et soit F une primitive de f. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Posons $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. La relation : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ est vraie lorsque $F = G$.
En effet, $G(b) = \int_a^b f(t)\,dt$ et $G(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$.
Si F est une primitive quelconque, il existe une constante c telle que $F = G + c$.
Donc : $F(b) - F(a) = [G(b) + c] - [G(a) + c] = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt$.

Notation. Lors du calcul d'une intégrale, si F est une primitive de la fonction f, on utilise parfois la notation : $\int_a^b f(t)\,dt = [F(t)]_a^b$.

3 Détermination de primitives

3.1 Primitives de $f + g$, de kf avec k réel

Les propriétés suivantes sont utiles dans la recherche de primitives. Elles se déduisent immédiatement de la définition d'une primitive et des opérations sur les fonctions dérivables.

Théorème 6

- Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I, alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur I, et si k est un réel, alors kF est une primitive de kf sur I.

3.2 Primitives usuelles

Le tableau suivant est dressé à partir des résultats connus sur les dérivées. Il suffit, en effet, de « lire à l'envers » le tableau des dérivées. Dans ce tableau, c désigne un réel quelconque.

Fonction définie par $f(x) = \ldots$	Primitives définies par $F(x) = \ldots$	sur $I = \ldots$
k (constante)	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
x^n (n entier, $n \leqslant -2$ ou $n \geqslant 1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } n \geqslant 1 \\ ]-\infty\,;0[\text{ ou }]0\,;+\infty[\text{ si } n \leqslant -2 \end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$]0\,;+\infty[$

- Si u est une fonction dérivable sur I, alors une primitive sur I de $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$ est $x \mapsto e^{u(x)}$.
- Si u est une fonction dérivable sur I, alors une primitive sur I de $x \mapsto -\dfrac{u'(x)}{u(x)^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{u(x)}$.

Remarque

Il est possible d'expliciter les dérivées de toutes les fonctions. Il n'en est pas de même pour les primitives.

Ainsi par exemple, la fonction $f : x \mapsto e^{x^2}$ admet comme dérivée la fonction : $x \mapsto 2xe^{x^2}$. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$; elle admet donc une primitive sur $\mathbb{R}$. Mais il n'est pas possible d'expliciter une telle primitive en utilisant les fonctions usuelles.

4 Extension de la notion d'intégrale

4.1 Définition de $\int_a^b f(t)\,dt$ lorsque f est de signe quelconque

Définition 3

Soit f une fonction continue sur $[a\,;b]$, **de signe quelconque**, et soit F une primitive de f sur cet intervalle. Alors, par définition :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a).$$

4.2 Définition de $\int_a^b f(t)\,dt$ lorsque $a \geqslant b$

Définition 4

On pose : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$

Remarque. La relation $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ est également **vraie lorsque a est supérieur à b.**

En effet : soit $a \geqslant b$.

Alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt = -[F(a) - F(b)] = F(b) - F(a).$

5 Linéarité, positivité, relation de Chasles

5.1 Linéarité de l'intégrale

Théorème 7

f et g sont des fonctions continues sur l'intervalle $[a\,;b]$. Alors :

$$\int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt.$$

On dit que l'intégrale de la somme est la somme des intégrales.

Démonstration. Notons F et G des primitives respectivement de f et g sur $[a\,;b]$; alors F + G est une primitive de $f+g$ sur $[a\,;b]$.

Donc $\displaystyle\int_a^b (f+g)(t)\,dt = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a).$

Or, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt = F(b) - F(a) + G(b) - G(a)$; d'où le résultat.

Théorème 8

f est une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ et α est un réel quelconque. Alors :

$$\int_a^b \alpha f(t)\,dt = \alpha\int_a^b f(t)\,dt.$$

Démonstration. Notons F une primitive de f sur $[a\,;b]$; alors αF est une primitive de αf sur $[a\,;b]$, donc $\displaystyle\int_a^b \alpha f(t)\,dt = \alpha F(b) - \alpha F(a) = \alpha[F(b) - F(a)] = \alpha\int_a^b f(t)\,dt.$

Remarque. Si $\alpha = -1$, on obtient : $\displaystyle\int_a^b -f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt.$

5.2 Positivité

Théorème 9

f est une fonction continue sur un intervalle $[a\,;b]$.

- si $f \geqslant 0$ sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$;
- si $f \leqslant 0$ sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant 0$.

Démonstration

- Si $f \geqslant 0$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est une aire, donc un nombre positif.
- Si $f \leqslant 0$, alors $-f \geqslant 0$. Donc $\displaystyle\int_a^b -f(t)\,dt \geqslant 0$.

Or $\displaystyle\int_a^b -f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$ (remarque ci-dessus).

Donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ peut s'écrire : $\displaystyle-\int_a^b -f(t)\,dt$, et donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant 0$.

Théorème 10

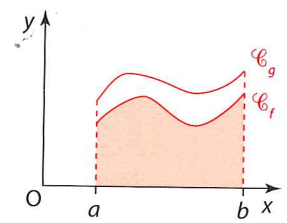
f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,;b]$.

Si $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

Démonstration. Dire que $f \leqslant g$ sur un intervalle $[a\,;b]$ signifie que la fonction $f-g$ est négative sur $[a\,;b]$, ou que $g-f$ est positive sur $[a\,;b]$. En appliquant le théorème 9 à la fonction $g-f$, et compte tenu de la linéarité, nous obtenons aussitôt le théorème 10.

Remarque. Interprétation en termes d'aires

Graphiquement, l'interprétation de la propriété précédente par des aires, pour des **fonctions positives**, est illustrée par la figure ci-contre.



5.3 Relation de Chasles

Théorème 11

f est une fonction continue sur un intervalle I.

Alors, quels que soient les réels a, b et c de I :

$$\int_a^c f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt.$$

Démonstration. Notons F une primitive de f sur I ; alors :

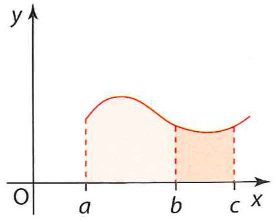
$$\int_a^c f(t)\,dt = F(c) - F(a)$$

et $$\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^c f(t)\,dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a).$$

D'où le résultat.

Remarque. **Interprétation en termes d'aires**

Lorsque **f est positive** et lorsque les réels a, b, c sont tels que $a \leqslant b \leqslant c$, la relation de Chasles traduit l'**additivité des aires** : l'aire de la réunion de deux domaines adjacents est la somme des aires de chacun d'eux.



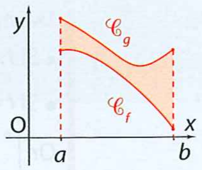
6 Aire du domaine compris entre deux courbes

Théorème 12

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a\,;b]$, de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, telles que $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$.

Notons A l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Alors $A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$.



Démonstration.

$f \geqslant 0$ et $g \geqslant 0$ sur $[a\,;b]$, donc par définition de l'intégrale :

$A = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx$, donc $A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$ par linéarité.

7 Valeur moyenne

Définition 5

f est une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ (avec $a < b$).

La **valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$** est le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

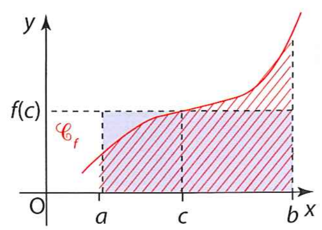
Nous admettrons que, f étant une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$, il existe un réel c de $[a\,;b]$ tel que $f(c)$ est égal à la valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$.

On a alors :

$$\int_a^b f(t)\,dt = (b-a)\,f(c).$$

Remarque. **Interprétation en termes d'aire**

Supposons que f soit positive sur $[a\,;b]$. L'égalité ci-dessus signifie que l'aire sous la courbe entre a et b est égale à l'aire du rectangle colorié en bleu.



OBJECTIF 1 Déterminer des primitives

Fonction	$x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$	$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto k,\ k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \ln x$	$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^{u(x)}$, u dérivable
Dérivée	$x \mapsto n\,x^{n-1}$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$	$x \mapsto 0$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$x \mapsto e^x$	$x \mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$

- Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I, alors F + G est une primitive de $f + g$ sur I.
- Si F est une primitive de la fonction f sur I et si k est un réel, alors kF est une primitive de kf sur I.

EXERCICE RÉSOLU A Trouver une primitive d'un polynôme

Trouvez une primitive sur $\mathbb{R}$ du polynôme défini par :

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 4.$$

Méthode

Pour trouver une primitive d'un polynôme, on utilise les résultats suivants :

- Une primitive de « kx^n » est « $k\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ » (avec k réel et n entier positif).
- Une primitive d'une somme est la somme des primitives de chaque terme.

Solution

Fonction	x^3	$-5x^2$	$3x$	-4
Primitive sur $\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{4}x^4$	$-\dfrac{5}{3}x^3$	$\dfrac{3}{2}x^2$	$-4x$

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x.$$

EXERCICE RÉSOLU B Trouver une primitive de $x \mapsto x^n$ pour n entier négatif ($n \neq -1$)

Trouvez une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f :

$$x \mapsto \frac{3}{2x^5} - \frac{6}{x^4}.$$

Méthode

Pour trouver une primitive de la fonction : $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ ($n \geqslant 2$), on peut commencer par écrire : $\dfrac{1}{x^n} = x^{-n}$, puis on utilise la formule donnant une primitive de $x \mapsto x^n$, dans le cas où n est entier négatif différent de -1.

Solution

Remarquons d'abord que la fonction :

$$f : x \mapsto \frac{3}{2x^5} - \frac{6}{x^4}$$

est continue sur $]0\,;+\infty[$ donc admet une primitive.

$f(x)$ peut s'écrire $f(x) = \dfrac{3}{2}x^{-5} - 6x^{-4}$.

D'où d'après la formule donnant une primitive de x^n, on obtient une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$:

$$F(x) = \frac{3}{2}\,\frac{x^{-5+1}}{-5+1} - 6\,\frac{x^{-4+1}}{-4+1},$$

c'est-à-dire $F(x) = -\dfrac{3}{8x^4} + \dfrac{2}{x^3}$.

EXERCICE RÉSOLU C

Trouvez la primitive, sur $]0\,;+\infty[$, de la fonction $f : x \mapsto 2x^3 + \dfrac{1}{x} + e^x$ qui s'annule pour $x = 1$.

Méthode

Pour trouver la primitive G d'une fonction f telle que $G(x_0) = y_0$:
- on trouve une primitive F de f sur I ;
- on écrit toutes les primitives $G = F + c$ de f sur I, avec c réel ;
- on trouve le réel c tel que $G(x_0) = y_0$.

Solution

- Une primitive de f sur $]0\,;+\infty[$ s'écrit :
$$F(x) = \frac{x^4}{2} + \ln x + e^x.$$
- Les primitives de f sont les fonctions G définies sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$G(x) = \frac{x^4}{2} + \ln x + e^x + c.$$
- Dire que $G(1) = 0$ revient à dire que :
$\dfrac{1}{2} + \ln 1 + e^1 + c = 0$; d'où $c = -\dfrac{1}{2} - e$.
La primitive cherchée est donc la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $G(x) = \dfrac{x^4}{2} + \ln x + e^x - \dfrac{1}{2} - e$.

Mise en pratique

Pour les exercices 1 à 5
Trouvez une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

1 a) $f(x) = 2x + 1$.
b) $f(x) = 3x^2 + x - 4$.

2 a) $f(x) = 4x^3 - x^2 + \dfrac{5}{2}$.
b) $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - \dfrac{2}{3}x + 4$.

3 a) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x}{3}$.
b) $f(x) = \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{5x}{4} + 1$.

4 a) $f(x) = 1 - \dfrac{2}{5}x^2 + x^3$.
b) $f(x) = \sqrt{2} - \dfrac{x^5}{5}$.

5 a) $f(x) = 0{,}8x^3 - 1{,}2x^2 + 0{,}5$.
b) $f(x) = 0{,}2x^4 - 3{,}6x^3 - 8{,}2x$.

Pour les exercices 6 à 11
Trouvez une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f.

6 a) $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.
b) $f(x) = \dfrac{3}{x^4}$.

7 a) $f(x) = \dfrac{2}{x^3} + \dfrac{5}{x^2}$.
b) $f(x) = \dfrac{3}{5x^4} - \dfrac{7}{x^3}$.

8 a) $f(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2}$.
b) $f(x) = \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

9 a) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2}$.
b) $f(x) = 4e^x - \dfrac{1}{x}$.

10 a) $f(x) = \dfrac{e^x}{3} - \dfrac{1}{2x}$.
b) $f(x) = -\dfrac{2e^x}{3} + \dfrac{3}{4x^2}$.

11 a) $f(x) = -\dfrac{1}{2x^3} + \pi x$.
b) $f(x) = \dfrac{5}{3x^4} - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}$.

Pour les exercices 12 à 13
Trouvez la primitive de la fonction f qui s'annule pour $x = 0$.

12 a) $f(x) = x^3 + x + 1$.
b) $f(x) = 3x^3 - 2x + 5$.

13 a) $f(x) = e^x - x$.
b) $f(x) = 2e^x - \dfrac{1}{2}$.

14 Trouvez la primitive, sur $]0\,;+\infty[$, de la fonction $f : x \mapsto 6x^2 - \dfrac{3}{x} - 1$ qui s'annule pour $x = 1$.

15 Trouvez la primitive, sur $]0\,;+\infty[$, de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{5}{x}$ qui prend la valeur $2 - \dfrac{1}{e}$ en $x = e$.

OBJECTIF 2 Connaître une primitive de $x \mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I.
Une primitive de $x \mapsto u'(x)\,e^{u(x)}$ sur I est $x \mapsto e^{u(x)}$.

EXERCICE RÉSOLU D

1. Trouvez une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto (-2x + 3)\,e^{-x^2+3x+1}$.
2. Trouvez une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $g : x \mapsto 2x^2\,e^{x^3+2}$.

Méthode

1. On essaie de se ramener à une formule de primitive du cours : une primitive de $e^u u'$ est e^u.

2. On utilise à nouveau le fait qu'une primitive de $u'e^u$ est e^u.
On fait apparaître $u'(x)$ dans l'écriture de $g(x)$: $g(x) = \square \times 3x^2 \times e^{x^3+2}$ puis on écrit le coefficient convenable dans la case.

Solution

1. Posons $u(x) = -x^2 + 3x + 1$.
On a $u'(x) = -2x + 3$.
Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction F définie par $F(x) = e^{-x^2+3x+1}$.

2. Posons $u(x) = x^3 + 2$.
On a $u'(x) = 3x^2$.
$g(x) = \dfrac{2}{3} \times 3x^2 \times e^{x^3+2}$.
Une primitive de g sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction G définie par $G(x) = \dfrac{2}{3}e^{x^3+2}$.

Mise en pratique

Pour les exercices 16 à 23
Trouvez une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f.

16 a) $f(x) = 2e^{2x}$.
b) $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$.

17 a) $f(x) = 2xe^{x^2}$.
b) $f(x) = 3x^2e^{x^3}$.

18 a) $f(x) = x^2e^{x^3}$.
b) $f(x) = x^5e^{x^6}$.

19 a) $f(x) = 0{,}3e^{0{,}3x}$.
b) $f(x) = 2{,}6x\,e^{1{,}3x^2-1}$.

20 a) $f(x) = x\,e^{x^2+1}$.
b) $f(x) = (x - 2)e^{x^2-4x+5}$.

21 a) $f(x) = (5x - 1)e^{5x^2-2x+3}$.
b) $f(x) = e^{x^3-x^2} \times (3x^2 - 2x)$.

22 a) $f(x) = \dfrac{1}{e^{3-2x}}$.
b) $f(x) = e^x \times \dfrac{1}{e^{4x}}$.

23 a) $f(x) = x^2(2x - 1)e^{3x^4-2x^3}$.
b) $f(x) = x\,\dfrac{e^{3x^2+x-2}}{e^x}$.

Pour les exercices 24 à 27
Trouvez une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction f.

24 a) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$.
b) $f(x) = -\dfrac{2}{x^2}\,e^{\frac{2}{x}}$.

25 a) $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,e^{\sqrt{x}}$.
b) $f(x) = \dfrac{-e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.

26 a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} \times e^{\frac{1}{x}}$.
b) $f(x) = \dfrac{2e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3}$.

27 a) $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$.
b) $f(x) = e^{\sqrt{x}+x^2} \times \left(2x + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$.

EXERCICES

EXERCICES

OBJECTIF 3 Calculer une intégrale

Si f est une fonction continue sur $[a\,;b]$ et si F est une primitive de f, alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

EXERCICE RÉSOLU E

Calculez l'intégrale $A = \int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + x^2\right) dx$.

Méthode

Pour calculer $A = \int_a^b f(x)\,dx$:

- On cherche une primitive F de f ;
- On utilise la formule $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Solution

- Recherche d'une primitive de $f : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^2$.

La fonction f admet comme primitive sur l'intervalle la fonction $F : x \mapsto \sqrt{x} + \frac{x^3}{3}$.

- $A = \int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + x^2\right) dx = F(4) - F(1)$

$= \left(\sqrt{4} + \frac{4^3}{3}\right) - \left(\sqrt{1} + \frac{1^3}{3}\right) = 1 + \frac{63}{3} = \frac{66}{3}$.

D'où A = 22.

Mise en pratique

Pour les exercices 28 à 32
Calculez les intégrales proposées.

28 $A = \int_1^2 (x^2 - 1)\,dx$.

$B = \int_0^1 (4x^3 - 5x + 2)\,dx$.

29 $A = \int_0^2 (x^3 + x^2 + 1)\,dx$.

$B = \frac{1}{2}\int_1^3 (x^4 - 3x^2 + 5)\,dx$.

30 $A = \int_1^2 \left(x - \frac{1}{x^2}\right) dx$.

$B = \int_1^3 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}\right) dx$.

31 $A = \int_1^4 \left(5 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

$B = \int_1^2 \left(\frac{3}{x} + x\right) dx$.

32 $A = \int_1^2 e^{2x+1}\,dx$.

$B = \int_0^2 x e^{-x^2}\,dx$.

33 **1.** Calculez l'intégrale $A = \int_0^2 (x + 1)dx$.

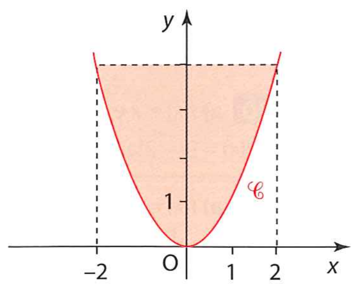
2. Retrouvez géométriquement ce résultat en utilisant la formule donnant l'aire d'un trapèze.

34 On pose : $\begin{cases} f(x) = x \text{ si } x \in [0\,;1] \\ f(x) = 1 \text{ si } x \in [1\,;3]. \end{cases}$

1. Calculez l'intégrale $\int_0^3 f(x)\,dx$ en utilisant la relation de Chasles.

2. Retrouvez ce résultat géométriquement.

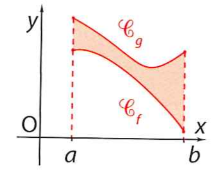
35 On note $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé.
Calculez l'aire du domaine coloré en rouge sur la figure.



Aide
Calculez d'abord l'aire du domaine délimité par $\mathscr{C}$, la droite des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$.

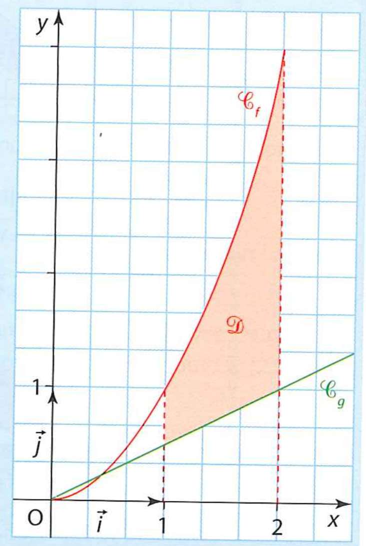
OBJECTIF 4 Calculer l'aire du domaine délimité par deux courbes

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a\,;b]$, de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, telles que $f \leqslant g$ sur $[a\,;b]$.
Notons A l'aire du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Alors $A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,dx$.



EXERCICE RÉSOLU F

$(O\,; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal (unité graphique 1,5 cm).
f est la fonction $x \mapsto x^2$.
g est la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x$.
$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ désignent les courbes représentatives de ces fonctions.
Calculez l'aire $\mathscr{A}$, en cm², du domaine $\mathscr{D}$ colorié.



Méthode

Pour calculer l'aire de $\mathscr{D}$, on vérifie que $g \leqslant f$ et on applique la formule donnant l'aire du domaine délimité par deux courbes.

On donne d'abord le résultat en unités d'aire, puis en cm² en tenant compte des unités graphiques.

Solution

Sur l'intervalle $[1\,; 2]$, on a : $g \leqslant f$.
Donc, en unités d'aire, on a :
$\mathscr{A} = \int_1^2 [f(x) - g(x)]\,dx = \int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{2}x\right) dx$.

D'où $\mathscr{A} = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \left[\frac{8}{3} - 1\right] - \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right]$.

Donc $\mathscr{A} = \frac{5}{3} - \frac{1}{12} = \frac{19}{12}$.

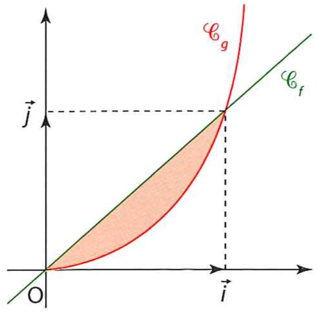
Or une unité d'aire = (1,5 × 1,5) cm²
= 2,25 cm².

D'où $\mathscr{A}$ = 3,5625 cm².

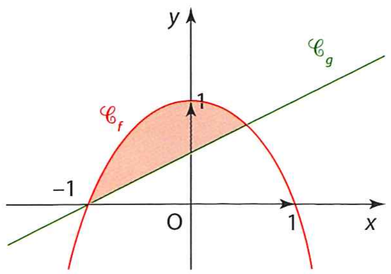
EXERCICES

Mise en pratique

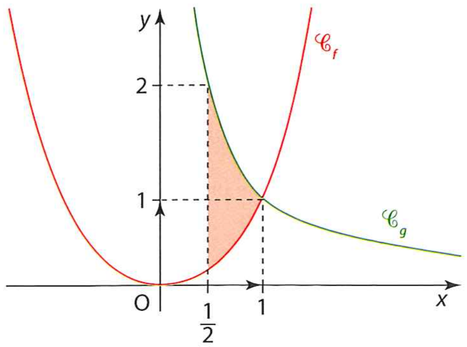
36 (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) est un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).
Calculez l'aire, en cm², du domaine colorié avec $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$.



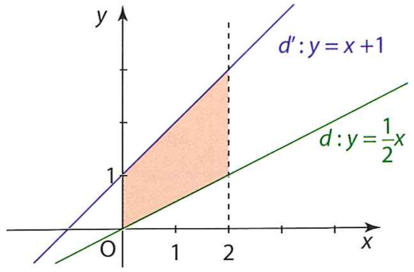
37 Calculez, en unités d'aire, l'aire du domaine colorié avec $f(x) = 1 - x^2$ et $g(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$.



38 Calculez, en unités d'aire, l'aire du domaine colorié avec $f(x) = x^2$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.



39 On considère dans un repère orthonormal la droite d d'équation $y = \frac{1}{2}x$ et la droite d' d'équation $y = x + 1$.

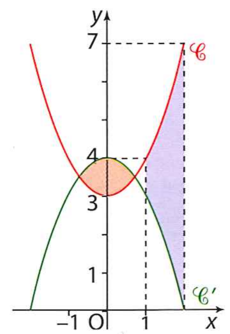


Calculez de deux manières, en unités d'aire, l'aire du domaine D colorié sur la figure :

1. En utilisant le calcul intégral ;

2. En utilisant la formule donnant l'aire d'un trapèze.

40 (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) est un repère orthonormal, unité 1 cm.
On considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^2 + 3$ et la courbe $\mathscr{C}'$ d'équation $y = 4 - x^2$.

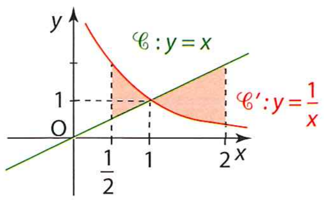


1. Calculez les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes.

2. Calculez l'aire du domaine délimité par ces deux courbes (colorié en rouge sur la figure).

3. Calculez l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$ (colorié en bleu sur la figure).

41 On considère, dans un repère orthonormal (unité : 1 cm), la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = x$ et la courbe $\mathscr{C}'$ d'équation $y = \frac{1}{x}$, pour $x > 0$.
Calculez l'aire du domaine D coloré en rouge.



Aide
Décomposez D en deux domaines convenablement choisis.

Pour se tester

Exercices interactifs

42 Questions sur le cours

Complétez comme il convient.

1. Si f est une fonction continue et positive sur $[a ; b]$, en unités d'aire, l'aire sous la courbe pour $x \in [a ; b]$ est égale à ....

2. Toute fonction continue sur un intervalle I admet une ...... sur I.

3. Si F et G sont des primitives de f sur l'intervalle I, alors il existe un réel c tel que, pour tout x de I, $G(x) =$ ....

4. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, alors une primitive sur I de $x \mapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ est $x \mapsto$ ....

5. Si f est continue sur $[a ; b]$ et si F est une primitive de f sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(t)\, dt =$ ....

6. Si f et g sont continues sur $[a ; b]$ et si :
$\forall x \in [a ; b], f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\, dx$ ...... $\int_a^b g(x)\, dx$.

7. La fonction f est continue sur $[a ; b]$. Alors sa valeur moyenne sur $[a ; b]$ est égale à ....

43 Vrai ou faux

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez votre réponse.

1. Si f est une fonction continue, lorsque l'on connaît une primitive de f sur un intervalle, toutes les autres s'en déduisent par ajout d'une constante.

2. Si f est continue sur $[a ; b]$, alors :
$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt.$$

3. Si f est continue et positive sur $[a ; b]$, alors :
$$\int_a^b f(x)\, dx \geqslant 0.$$

4. Le nombre $\int_a^b f(x)\, dx$ n'est jamais négatif puisque c'est une aire.

5. f et g sont continues sur $[2 ; 3]$, avec $f \leqslant g$. Alors l'aire entre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, pour $x \in [2 ; 3]$, est égale à $\int_2^3 (f(x) - g(x))\, dx$.

44 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. L'intégrale $\int_{-1}^{1} x^3\, dx$ est égale à :
a) $-\frac{1}{2}$ **b)** 0 **c)** $\frac{1}{2}$.

2. On pose $I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x - 1}$ et $J = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x - 1}\, dx$.
Alors le nombre $I - J =$
a) $\ln \frac{2}{3}$ **b)** $\ln \frac{3}{2}$ **c)** $\frac{3}{2}$.

3. On pose, pour $x \geqslant 1$, $F(x) = \int_1^x t\, e^{t+1}\, dt$. Alors $F'(x) =$
a) $t\, e^{t+1}$ **b)** $x\, e^{x+1}$ **c)** $x\, e^{x+1} - e^2$.

45 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant votre réponse.

1. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de e^{-x} est :
a) e^{-x} **b)** $-e^{-x}$ **c)** $-\frac{1}{e^x}$.

2. L'intégrale $\int_0^1 e^{2x+1}\, dx$ est égale à :
a) $e^3 - 1$ **b)** $\frac{1}{2}e^3 - \frac{1}{2}e$ **c)** $0{,}5(e - 1)(e^2 + e)$.

3. La valeur moyenne sur $[1 ; 3]$ de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$ est égale à :
a) $\frac{1}{2}\ln 3$ **b)** $\ln 2$ **c)** $\ln \sqrt{3}$.

4. $\int_0^1 x\, dx \times \int_0^1 x^2\, dx =$
a) $\int_0^1 x^3\, dx$ **b)** $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$ **c)** $\frac{1}{6}$.

Voir les corrigés p. 361

Utiliser Geogebra

→ Pour calculer une intégrale par la méthode des rectangles

46 Pour calculer la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$, on a besoin de connaître une primitive de f sur $[a\,;b]$.

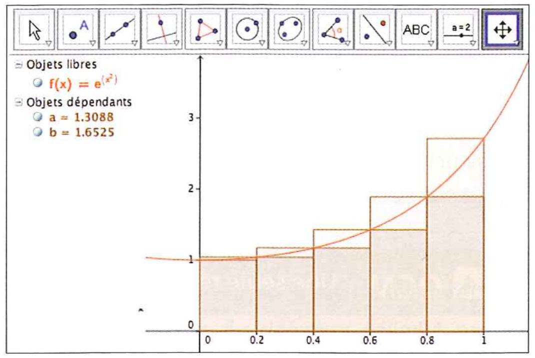
Il arrive très souvent que l'on ne sache pas trouver explicitement une primitive. Dans ce cas, on peut néanmoins obtenir une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$. La méthode des rectangles est l'une des méthodes permettant d'obtenir de telles valeurs approchées.

A Encadrement de $I = \int_0^1 e^{x^2}\,dx$ avec le logiciel GeoGebra

$f : x \mapsto e^{x^2}$ est un exemple de fonction pour laquelle on ne connaît pas de primitive explicite.

1. Tracer, en utilisant le logiciel GeoGebra, la courbe de la fonction f.

2. Dans **Calculs et Fonctions**, sélectionnez : **SommeInférieure** et remplissez les crochets ainsi : SommeInférieure [exp(x²), 0, 1, 5]. Recommencez avec : SommeSupérieure [exp(x²), 0, 1, 5].



Les nombres 0 et 1 saisis entre les crochets sont les bornes de l'intervalle d'intégration, le nombre 5 est le nombre de rectangles souhaités.
SommeInférieure donne la somme A des aires des rectangles dessinés sous la courbe représentative de f. Ces rectangles ont tous la même largeur.
SommeSupérieure donne la somme B des aires des rectangles, qui, comme les précédents, ont un côté situé sur l'axe des abscisses, mais qui, eux, dépassent la courbe.

a) Expliquez pourquoi les deux nombres A et B obtenus forment un encadrement de I.

b) Donnez l'amplitude de cet intervalle.

3. a) Graphiquement, expliquez comment, en modifiant le nombre n de rectangles, on peut obtenir un encadrement de I d'amplitude plus petite. Donnez les nombres A et B correspondant à $n = 10$.

b) Quelle est l'amplitude de l'encadrement obtenu ? Comparez-la à celle obtenue à la question **2.b)**.

4. Toujours pour $n = 10$, Lucie prend pour valeur approchée de I le nombre $C = \dfrac{A+B}{2}$.

a) C représente une somme d'aires de trapèzes : lesquels ?

b) Calculez ce nombre. C est une valeur approchée de I ; en considérant les trapèzes ci-dessus, dites s'il s'agit d'une valeur approchée par excès ou par défaut.

c) Comparez le nombre C obtenu avec le nombre donné pour I par la calculatrice.

B Deux suites de nombres ayant pour limite I

Les nombres A et B obtenus à chaque fois dépendent du nombre n de rectangles demandés. Ces nombres devraient être appelés A_n et B_n. On obtient alors deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a) En utilisant les résultats des questions précédentes, donnez les valeurs de A_5 et de B_5, de A_{10} et de B_{10}.

b) Graphiquement, quel semble être le sens de variation des suites (A_n) et (B_n) ?

c) Écrivez la double inégalité que vérifient les nombres A_n, B_n et I, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d) Montrez que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $B_n - A_n = \dfrac{e-1}{n}$.

e) Intuitivement, quelle semble être la limite des suites (A_n) et (B_n) ?

Utiliser une intégrale

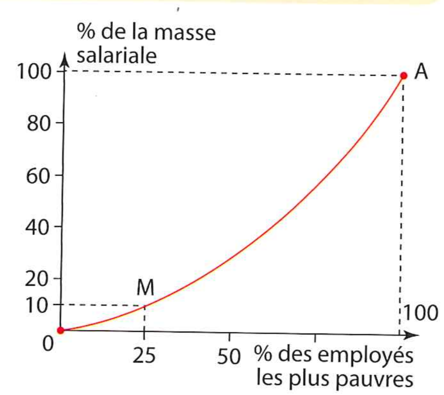
→ Pour calculer un indicateur économique

47 Courbe de Lorenz et coefficient de Gini

A Une répartition représentée graphiquement

Dans une entreprise, on s'intéresse à la répartition de la masse salariale, c'est-à-dire à la façon dont sont répartis les salaires entre les différents employés.
Plus précisément, pour avoir une idée sur l'étendue de l'échelle des salaires, et sur d'éventuelles inégalités, il peut être utile d'avoir des réponses aux questions suivantes. Quelle part de la masse salariale revient aux 25 % des employés les plus pauvres, ou aux 40 % des employés les plus pauvres… ?

Lorenz a eu l'idée de représenter cette situation par une courbe qui, depuis, porte son nom.
Exemple de lecture : Les coordonnées du point M signifient que 10 % de la masse salariale est attribuée aux 25 % des employés les plus pauvres.



B Lecture graphique

1. En utilisant cette courbe, indiquez :

a) quel pourcentage approximatif de la masse salariale revient aux 50 % des employés les plus pauvres ;

b) quel pourcentage approximatif de la masse salariale revient aux 25 % des employés les plus riches.

2. On suppose que tous les employés ont le même salaire. Expliquez pourquoi la courbe de Lorentz est le segment [OA].

3. Expliquez pourquoi une courbe de Lorenz :

a) passe toujours par les points O(0 ; 0) et A(100 ; 100) ;

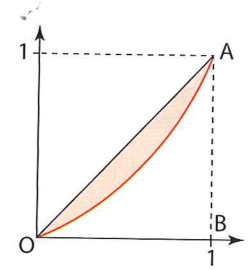
b) est toujours située sous la droite (OA) ;

c) représente toujours une fonction croissante.

C Le coefficient de Gini

Pour la concentration de salaires représentée par la courbe de Lorenz ci-contre, le coefficient de Gini est le nombre γ défini par :

$$\gamma = \frac{\text{aire de la partie coloriée}}{\text{aire du triangle OBA}}.$$



1. a) Expliquez pourquoi $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$.

b) Notons f la fonction associée à cette courbe de Lorenz. Montrez que :

$$\gamma = 1 - 2\int_0^1 f(x)\,dx.$$

2. a) Vérifiez que les fonctions suivantes, définies sur [0 ; 1], satisfont les conditions **a)**, **b)**, **c)** de la question **B3**.

$f_1 : x \mapsto x$ $\quad f_2 : x \mapsto x^2$ $\quad f_3 : x \mapsto x^3$ $\quad f_4 : x \mapsto -\dfrac{3}{4}x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{1}{4}x.$

b) Calculez les quatre coefficients de Gini correspondants.

c) Représentez ces quatre fonctions sur un même graphique.

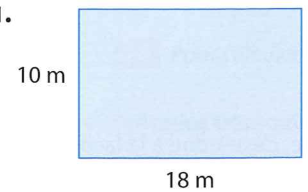
3. Rangez les fonctions de la question **2.** de celle correspondant à la répartition des salaires la plus égalitaire à celle correspondant à la répartition la moins égalitaire.
Comment interpréter le coefficient de Gini ?

Entraînement

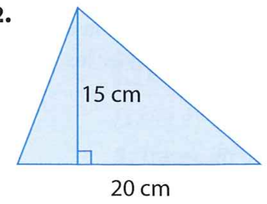
DE TÊTE

48 Calculez les aires des domaines suivants.

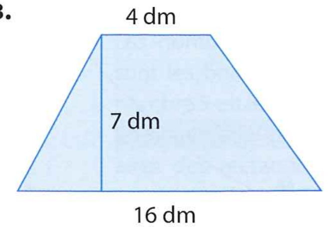
1.



2.



3.



Pour les exercices 49 à 51
Calculez les intégrales proposées.

49 **a)** $\int_3^{20} \mathrm{d}x$ **b)** $\int_{25}^{53} \mathrm{d}x$.

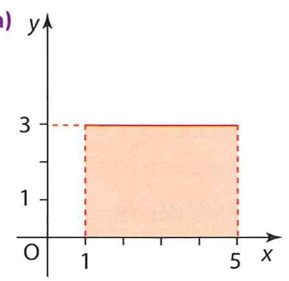
50 **a)** $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ **c)** $\int_1^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

51 **a)** $\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{x}$ **b)** $\int_1^4 \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$ **c)** $\int_4^9 \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}}$.

AIRE SOUS LA COURBE

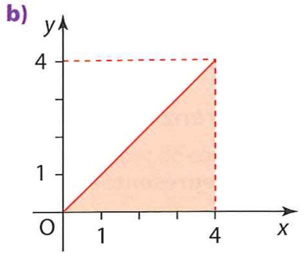
52 En utilisant les dessins ci-dessous, calculez les intégrales proposées.

a)



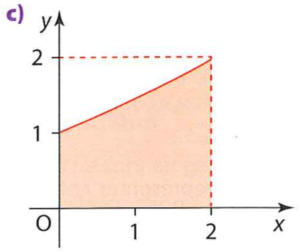
$I = \int_1^5 3\,\mathrm{d}x$

b)



$J = \int_0^4 x\,\mathrm{d}x$

c)



$K = \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \mathrm{d}x$

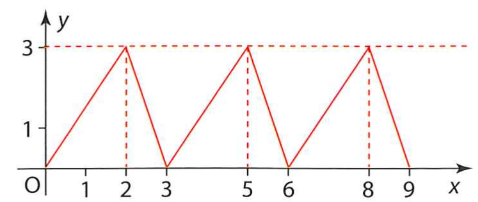
53 En utilisant la définition de $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pour f continue et positive sur $[a\,;b]$, calculez :

a) $\int_0^4 x\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int_2^3 x\,\mathrm{d}x$ **c)** $\int_1^4 (2x+1)\,\mathrm{d}x$.

54 **1.** Expliquez pourquoi $\int_0^3 4\,\mathrm{d}x = \int_2^5 4\,\mathrm{d}x$.

2. A-t-on aussi égalité entre $\int_0^3 x\,\mathrm{d}x$ et $\int_2^5 x\,\mathrm{d}x$?

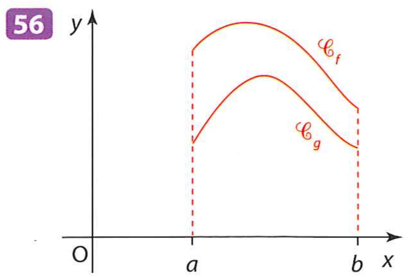
55 Voici la courbe représentative d'une fonction f sur $[0\,;9]$.



a) Calculez l'aire sous la courbe pour x appartenant à $[0\,;3]$, puis pour x appartenant à $[0\,;9]$.

b) Déduisez-en la valeur de $\int_0^9 f(x)\,\mathrm{d}x$.

56



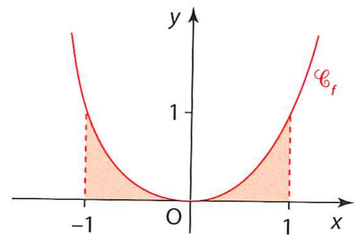
Les fonctions f et g sont toutes deux continues sur $[a\,;b]$. Comparez $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

57 f est la fonction : $x \mapsto x^2$.

1. La courbe représentative de f possède un axe de symétrie. Lequel ?

2. En utilisant le dessin ci-dessous, montrez que :

$$\int_{-1}^{0} x^2\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x.$$



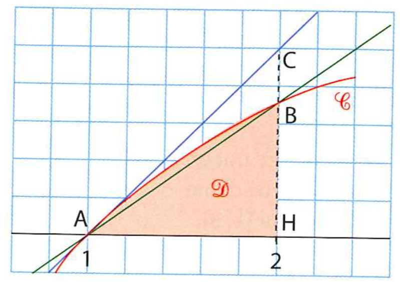
58 **1.** Dans un repère orthonormé, le point M a pour coordonnées $(x\,;y)$.

a) Quelle est la valeur de OM^2 ?

b) Donnez une équation du cercle de centre O et de rayon 1, puis du demi-cercle de même centre, de même rayon et situé au-dessus de (Ox).

2. En admettant que la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1\,;1]$, justifiez l'égalité : $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

59 Dans le graphique ci-dessous, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction ln et la droite (AC) est la tangente au point A d'abscisse 1.



1. Calculez l'aire des triangles

a) AHB ;

b) AHC.

2. Montrez que : $0{,}345 < \int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x < 0{,}5$.

3. Vérifiez à l'aide de votre calculatrice qu'il en est bien ainsi.

PRIMITIVES

Pour les exercices 60 à 72
Donnez une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

60 **a)** $f(x) = x + 1$ $\quad$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 3x^2 + x - 1$ $\quad$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

61 **a)** $f(x) = x^3 + \frac{3}{4}x^2 - x - 5$ $\quad$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \frac{2}{3}x^5 - \frac{3}{4}x$ $\quad$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

62 **a)** $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

b) $f(x) = \frac{2}{x^2}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

63 **a)** $f(x) = \frac{1}{x^3}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

b) $f(x) = \frac{3}{x^4}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

64 **a)** $f(x) = 2x^3 - \frac{1}{x^2}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

b) $f(x) = 3 + \frac{1}{x^2} - \frac{5}{x^3}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]-\infty\,;0[$.

65 **a)** $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

66 **a)** $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{4}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

67 **a)** $f(x) = \mathrm{e}^x$ $\quad$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 3x - 2\mathrm{e}^x$ $\quad$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

68 **a)** $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}^{*+}$

b) $f(x) = -\frac{4}{x}$ $\quad$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}^{*+}$.

69 **a)** $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]1\,;+\infty[$

b) $f(x) = \frac{3}{(3x-2)^2}$ $\quad$ $\mathrm{I} = \left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

70 **a)** $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ $\quad$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 4\mathrm{e}^{0{,}3x}$ $\quad$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

71 **a)** $f(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}$ $\quad$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

b) $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{3x^2+6x-4}$ $\quad$ $\mathrm{I} = \mathbb{R}$.

72 **a)** $f(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 + 1}{x}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$

b) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ $\quad$ $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$.

Aide Écrire $f(x)$ sous une autre forme.

73 Voici six fonctions. Associez trois de ces fonctions à leur primitive respective.

- $f_1(x) = 5x^2 + 10x - 1$
- $f_2(x) = -\frac{1}{x^2}$
- $f_3(x) = 10(x+1)$
- $f_4(x) = \frac{2}{x^3}$
- $f_5(x) = (x+1)^2$
- $f_6(x) = 2(x+1)$.

74 Donnez une primitive de la fonction f sur l'intervalle I. Retrouvez votre résultat à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel.

a) $f(x) = x(e^{x^2} + 1)$ $\quad$ $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{(1 + 2e^x)^2}$ $\quad$ $I = \mathbb{R}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$ $\quad$ $I =]0\,;+\infty[$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^2 x}$ $\quad$ $I =]0\,;+\infty[$.

Aide

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$.

Pour les exercices 75 à 78
Déterminez F′(x).

75 $\forall x \geqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x t^3\,dt$.

76 $\forall x \geqslant 1$, $F(x) = \displaystyle\int_1^x t^2 \ln t\,dt$.

77 $\forall x \geqslant 2$, $F(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{du}{u}$.

78 $\forall x \geqslant 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

Pour les exercices 79 à 82
Donnez le sens de variation de F sur l'intervalle I.

79 $F(x) = \displaystyle\int_{-10}^x t^2\,dt$ $\quad$ $I = [-10\,;+\infty[$.

80 $F(x) = \displaystyle\int_{-50}^x (3t^4 + t^2 + 1)e^t\,dt$ $\quad$ $I = [-50\,;+\infty[$.

81 $F(x) = \displaystyle\int_4^x (u - 3)\ln u\,du$ $\quad$ $I = [4\,;+\infty[$.

82 $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{t}\,e^{2t-1}\,dt$ $\quad$ $I = \mathbb{R}^+$.

83 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction F définie sur $[0{,}1\,;+\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_{0,1}^x (u-2)^4 \ln^2 u\,du$.

Déterminez les abscisses des points de $\mathscr{C}$ admettant une tangente horizontale.

84 Considérons la fonction f, définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = 2x \ln x$$

et la fonction g, définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 \ln x.$$

1. Calculez $g'(x)$.

2. Déduisez-en une primitive de f sur $[1\,;+\infty[$.

85 Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x}{(e^2+1)^2}.$$

1. Pour chacune de ces fonctions, trouvez une primitive sur $\mathbb{R}$.

2. Déduisez-en une primitive sur $\mathbb{R}$ de $3f - 2g$.

86 Modifier l'écriture

f est la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 4x - 1}{(x+1)^2}.$$

1. Trouvez deux nombres A et B tels que $2x^2 + 4x - 1$ s'écrive sous la forme $A(x+1)^2 + B$.
Déduisez-en une nouvelle écriture de $f(x)$.

2. Trouvez une primitive de f sur $]-1\,;+\infty[$.

87 Toutes les primitives

1. Donnez deux primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{(e^x + e^{-x})^2}$.

2. Donnez toutes les primitives de f.

88 Vrai ou faux ?

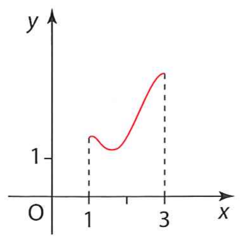
Les fonctions f et g sont-elles deux primitives d'une même fonction sur l'intervalle I ? Justifiez votre réponse.

a) $f(x) = (x^2 + 2x)^2$; $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 1$; $I = \mathbb{R}$.

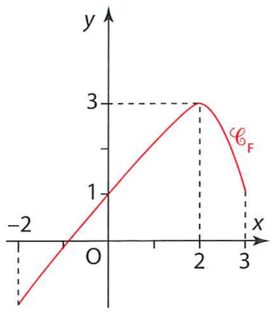
b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$; $g(x) = \dfrac{x^2 - 5x - 11}{x + 2}$; $I =]-\infty\,;-2[$.

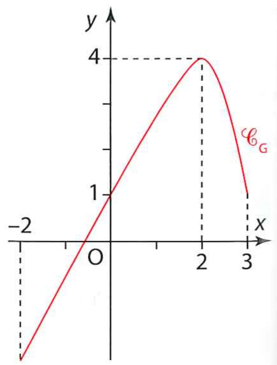
c) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$; $g(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 + 1}$; $I = \mathbb{R}$.

89 f est une fonction continue sur $[1\,;3]$ et F est une primitive de f sur cet intervalle. Voici la courbe représentative de F.
Recopiez ce dessin et tracez, en expliquant, la courbe d'une autre primitive de f sur $[1\,;3]$.



90 Pourquoi les fonctions F et G dont les courbes représentatives ont été dessinées ci-dessous ne peuvent-elles pas être toutes deux des primitives de la même fonction f ?





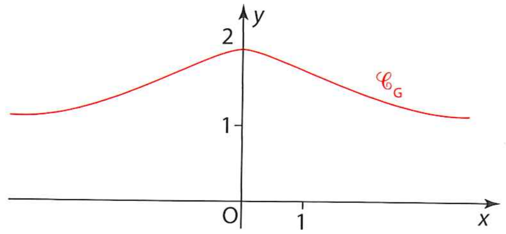
91 F et G sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.
On sait que $F(1) = 3$; $G(1) = 5$ et $F(2) = 4$.
Calculez $G(2)$.

92 Une primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f est définie par :

$$F(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

1. Quelle est la valeur de $F(0)$?

2. Voici la courbe représentative d'une autre primitive G de f. Donnez l'expression de $G(x)$.



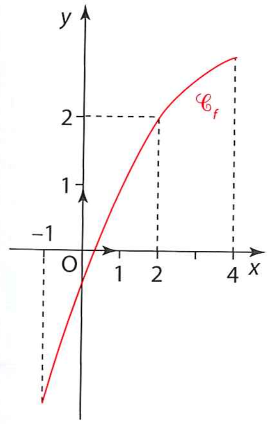
93 Tangente à la courbe d'une primitive

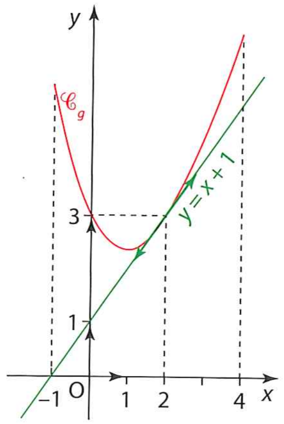
F est une primitive de f sur $[-2\,;7]$.
On sait que $f(1) = 4$ et $F(1) = 3$.

1. Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse 1 ?

2. Écrivez une équation de cette tangente.

94 Les courbes représentatives de deux fonctions f et g définies sur $[-1\,;4]$ sont dessinées ci-dessous. La droite d'équation $y = x + 1$ est tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 2.





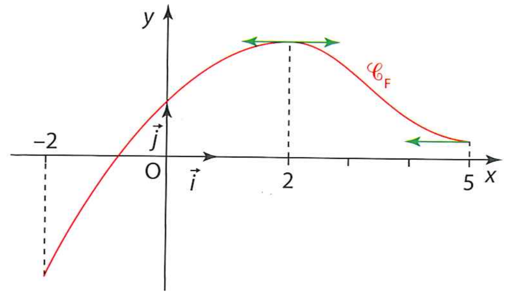
1. Quel est le nombre dérivé de g en $x = 2$?

2. Que vaut $f(2)$?

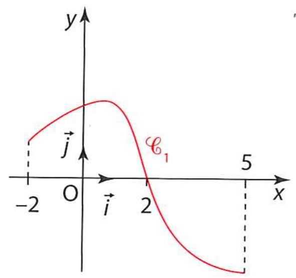
3. Pourquoi la fonction g ne peut-elle être une primitive de f sur l'intervalle $[-1\,;4]$?

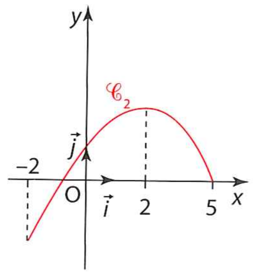
95 f est une fonction et F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
La droite d'équation $y = 1 - x$ est tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse 3.
Déterminez $f(3)$.

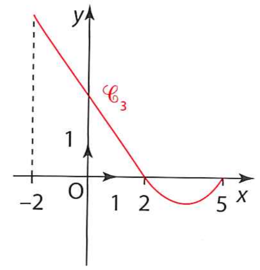
96 Ci-dessous a été dessinée la courbe représentative d'une fonction F définie sur $[-2\,;5]$.



L'une des trois courbes suivantes représente la fonction f dont F est une primitive.
Trouvez laquelle en justifiant votre réponse.

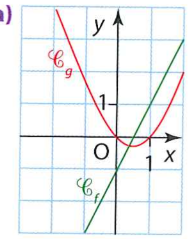




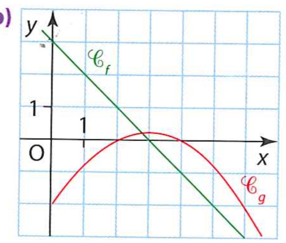


97 Cherchez l'intrus

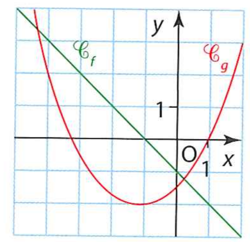
a)



b)



c)



Les trois dessins ci-dessus représentent chacun deux

fonctions f et g. Dans deux d'entre eux, l'une des fonctions est une primitive de l'autre.
Dites lesquels en justifiant votre choix.

98 **Primitive imposée**

Pour les fonctions f suivantes, déterminez la primitive F, sur $\mathbb{R}$, telle que $F(x_0) = y_0$.

a) $f(x) = x^2 + 1$ $\quad x_0 = 2 \quad y_0 = 1$

b) $f(x) = e^{3x}$ $\quad x_0 = 0 \quad y_0 = 2$

c) $f(x) = e^{-4x+1}$ $\quad x_0 = \dfrac{1}{4} \quad y_0 = 5$

d) $f(x) = xe^{x^2}$ $\quad x_0 = 1 \quad y_0 = e$

99 Pour les fonctions f suivantes, déterminez la primitive sur I dont la courbe représentative passe par le point A donné.

a) $f(x) = 2x^2 - 3$ $\quad I = \mathbb{R} \quad A(2\,;4)$

b) $f(x) = \dfrac{5}{x}$ $\quad I =]0\,;+\infty[\quad A(1\,;3)$

c) $f(x) = \dfrac{6}{x^2}$ $\quad I =]-\infty\,;0[\quad A(-2\,;4)$

100 **Coût total**

Une entreprise fabrique un bien de consommation.
Le coût marginal, en euros, en fonction de la quantité q fabriquée est $C_m(q) = 3q^2 - 120q + 1\,250$.
On pourra assimiler le coût marginal à la dérivée du coût total.
Calculez le coût total $C(q)$ sachant que $C(0) = 10\,000$.

101 **1.** Expliquez pourquoi la fonction :

$$f : x \mapsto -\frac{1}{x^2+4}$$

possède des primitives sur $\mathbb{R}$.

2. On désigne par F la primitive de f sur $\mathbb{R}$, nulle en 0.

a) Étudiez le sens de variation, puis le signe de F.

b) Donnez une équation de la tangente à l'origine à la courbe représentative de F.

102 Une entreprise a une production d'au maximum 5 milliers d'objets.
Le coût marginal, en milliers d'euros, est défini par :

$$C_m(x) = \frac{1}{4}x^3 - x^2 + 4 \text{ pour } x \in [0\,;5].$$

On rappelle que, $C_T(x)$ désignant le coût total de fabrication des x premiers milliers d'objets, on a $C_T'(x) = C_m(x)$, et que $C_T(0)$ désigne les frais fixes.

1. Montrez que : $C_T(x) = \displaystyle\int_0^x C_m(t)\,dt + C_T(0)$.

2. Calculez $C_T(x)$ en fonction de x, sachant que :

$$C_T(0) = 45.$$

3. Le coût moyen $C_M(x)$ est donné par : $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$.
Montrez que $C_M(x) = \dfrac{1}{16}x^3 - \dfrac{1}{3}x^2 + 4 + \dfrac{45}{x}$.

103 $C(q)$, coût total de fabrication d'une quantité q d'un produit, est la somme du coût variable $C_V(q)$ qui dépend de la quantité de produit fabriqué, et du coût fixe C_F qui est une constante (loyer, EDF, …), c'est-à-dire :

$$C(q) = C_V(q) + C_F.$$

Dans une entreprise, le coût marginal en euros assimilé à $C'(q)$, est égal à :

$$300q^2 - 200q + 50.$$

On sait de plus que $C_V(0) = 0$.

1. Calculez le coût total $C(q)$ en fonction de la quantité q et du coût fixe C_F.

2. Quelle est la valeur du coût fixe C_F si le coût total de fabrication de 20 unités est de 901 000 euros ?

104 **Coût marginal ; coût total**

Partie A Étude d'une fonction

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;700]$ par :

$$f(x) = 0{,}04x + 100 + \frac{540\,000}{x^2}.$$

a) On note f' la dérivée de la fonction f. Vérifiez que :

$$f'(x) = \frac{(x-300)(x^2+300x+90\,000)}{25x^3}.$$

b) Étudiez les variations de la fonction f.

2. Dessinez la représentation graphique de la fonction F dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, où 1 cm représente 50 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 20 unités sur l'axe des ordonnées.

Partie B

On rappelle que le coût marginal C_m de la fabrication d'une quantité d'un produit est le coût de fabrication d'une unité supplémentaire de ce produit. On considère que, dans la situation étudiée dans cette partie, le coût marginal est la dérivée de la fonction coût total C de la fabrication.
Une entreprise fabrique au plus 700 unités d'un produit. Elle ne peut fabriquer moins de 100 unités : le coût total de fabrication de ces 100 premières unités est de 16 000 euros.
Le coût marginal C_m de fabrication de ce produit est décrit sur l'intervalle $[100\,;700]$ par la fonction f étudiée dans la partie A.
On a donc $C_m(x) = f(x)$ pour $x \in [100\,;700]$.
On note $C(x)$ le coût total de la fabrication de x unités.

1. Montrez que pour tout $x \in [100\,;700]$:

$$C(x) = 16\,000 + \int_{100}^{x} C_m(t)\,dt.$$

2. Calculez le coût total $C(x)$ pour $x \in [100\,;700]$.

105 **Coût moyen unitaire**

Un fabricant de machines réalise une production mensuelle de q centaines d'unités $(q \in [0\,;20])$.
Le coût marginal, en milliers d'euros, pour q centaines d'unités est :

$$f(q) = 3q^2 - 36q + 105.$$

1. Les coûts fixes s'élevant à 56 000 euros, déterminez le coût total $F(q)$ de q centaines d'unités (on rappelle que $F'(q) = f(q)$).

2. Le coût moyen unitaire $C_M(q)$ est le quotient du coût total par la quantité q produite (exprimée en centaines d'unités).
Donnez l'expression de $C_M(q)$.

106 **Primitive inconnue**

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. À l'aide de votre calculatrice dessinez la courbe représentative de f.

2. Dites pourquoi f possède des primitives sur $\mathbb{R}$.

3. Nous ne connaissons pas de primitive explicite de F.
Pour calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$, nous devons nous contenter d'une valeur approchée telle que celle calculée par la méthode des rectangles (voir TD page 164).

a) En utilisant les fonctions SommeInférieure et SommeSupérieure du logiciel GeoGebra, avec dix rectangles à chaque fois, donnez un encadrement de I.

b) Que prenez-vous alors comme valeur approchée de I ?

4. Utilisez à présent votre calculatrice pour obtenir une valeur de I. Quel est le résultat obtenu ?
Pour obtenir cette valeur, la calculatrice effectue un calcul approché selon une méthode analogue à celle que nous avons utilisée à la question **3.**

CALCUL D'INTÉGRALES

Pour les exercices 107 à 110

Calculez les intégrales proposées. Vérifiez votre résultat avec la calculatrice.

107 **a)** $\displaystyle\int_2^5 (-3)\,dx$ $\quad$ **b)** $\displaystyle\int_{-3}^{2} x\,dx.$

108 **a)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\,dx$ $\quad$ **b)** $\displaystyle\int_{-4}^{1} (x^2+3x-4)\,dx.$

109 **a)** $\displaystyle\int_0^2 (1-e^x)\,dx$ $\quad$ **b)** $\displaystyle\int_{-1}^{1} (e^x - e^{-x})\,dx.$

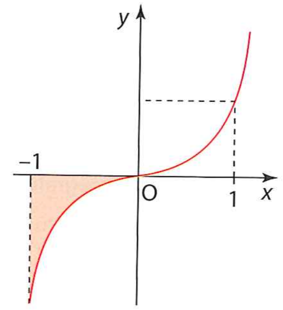
110 **a)** $\displaystyle\int_{-3}^{0} \left(e^{\frac{x}{3}} + x\right)dx$ $\quad$ **b)** $\displaystyle\int_{-5}^{5} (e^{-0{,}2x} - e^{-0{,}4x})\,dx.$

111 $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$.

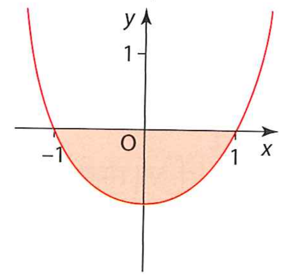
1. Calculez : $\displaystyle\int_{-1}^{0} x^3\,dx$.

2. Donnez alors la valeur de l'aire du domaine colorié. Expliquez.

Remarque. *Attention, une aire s'exprime avec un nombre positif.*



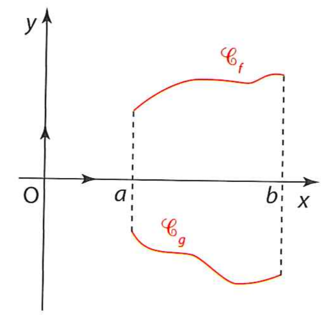
112 La courbe $\mathscr{C}$ représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$.
Calculez l'aire de la partie coloriée.



113 Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ représentent deux fonctions f et g sur l'intervalle $[a\,;b]$.
Graphiquement, donnez le signe de :

a) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx.$

b) $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx.$



114 Voici le tableau de variation d'une fonction f sur l'intervalle $[-3\,;7]$:

x	-3	4	6	7
$f(x)$	-2	↘ -6	↗ 3	↘ 1

1. En justifiant votre réponse, donnez le signe de l'intégrale indiquée :

a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx.$

b) $\displaystyle\int_{6}^{7} f(x)\,dx.$

2. Peut-on déterminer le signe de $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx$?

POSITIVITÉ, LINÉARITÉ, RELATION DE CHASLES

Pour les exercices 115 à 117

Indiquez le signe de chaque intégrale sans chercher à calculer cette intégrale.

115 a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-3x}{x^2+2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x-4}{x^2+x+1}\,dx.$

116 a) $\displaystyle\int_0^5 e^{-x^2}\,dx$ b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} t\ln t\,dt.$

117 a) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t+3)\,dt$ b) $\displaystyle\int_{-3}^{-2} \frac{e^{x-2}}{x}\,dx.$

Pour les exercices 118 à 122

En utilisant la linéarité, calculez le nombre A.

118 $A=\displaystyle\int_0^4 (x^2+2x-5)\,dx-\int_0^4 (x+1)^2\,dx.$

119 $A=\displaystyle\int_1^2 \sqrt{x^3+1}\,dx+\int_1^2 \left(x^3+1-\sqrt{x^3+1}\right)dx.$

120 $A=3\displaystyle\int_0^1 x^3e^{-x}\,dx+\int_0^1 x^3\left(1-\frac{3}{e^x}\right)dx.$

121 $A=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2e^{2x}}{\ln x+2}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{2x}\ln x}{\ln x+2}\,dx.$

122 $A=\displaystyle\int_1^e \ln t\,dt+\int_1^e \left(t^2+\ln\frac{1}{t}\right)dt.$

123 On sait que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=3$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx=-5.$

Calculez :

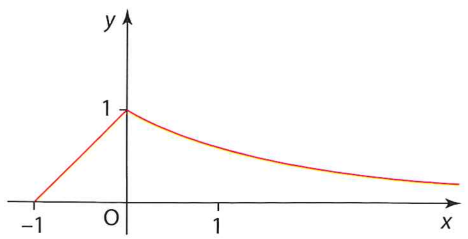
$$\int_a^b \left[2f(x)-3g(x)\right]dx.$$

124 En utilisant la relation de Chasles, calculez les nombres suivants :

a) $A=\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx+\int_1^{10} e^x\,dx.$

b) $B=\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t}+\int_2^5 \frac{dt}{t}.$

125 La fonction f est représentée par la courbe ci-dessous. Pour $x>0$, $f(x)=e^{-x}$.



1. Calculez $I=\displaystyle\int_{-1}^2 f(x)\,dx.$

2. Géométriquement, que représente ce nombre ?

Pour les exercices 126 à 128

Calculez les intégrales demandées.

126 $\begin{cases}\text{Si } x<1,\ f(x)=x+1.\\ \text{Si } x\geqslant 1,\ f(x)=2e^{x-1}.\end{cases}$

Calculez $I=\displaystyle\int_{-2}^2 f(x)\,dx.$

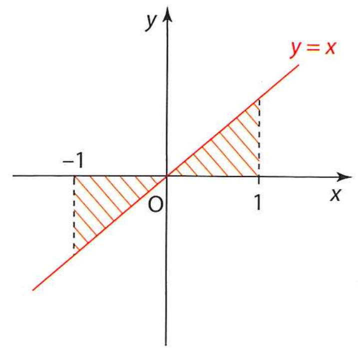
127 $\begin{cases}\text{Si } x\leqslant 0,\ f(x)=x^3.\\ \text{Si } x>0,\ f(x)=e^{\frac{x}{3}}-1.\end{cases}$

Calculez $I=\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\,dx.$

128 $\begin{cases}\text{Si } x\leqslant 0,\ f(x)=xe^{x^2}.\\ \text{Si } x>0,\ f(x)=e^{2x}-1.\end{cases}$

Calculez $I=\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx.$

129 Le graphique ci-dessous représente la droite d'équation $y=x$. On se pose la question de savoir si l'aire de la zone hachurée est égale à $\displaystyle\int_{-1}^1 x\,dx.$



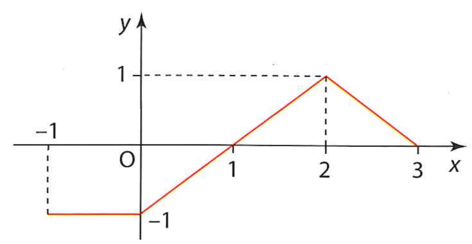
1. Calculez cette intégrale.

2. Calculez géométriquement l'aire de la zone hachurée.

3. Pourquoi, dans ce cas, l'intégrale n'est-elle pas égale à « l'aire sous la courbe » ?

130 **Intégrale d'une fonction affine par morceaux**

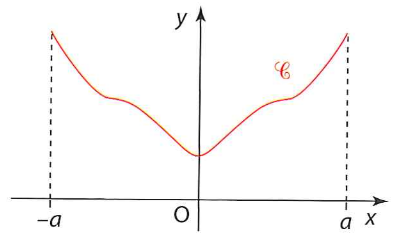
La fonction f est représentée ci-dessous sur l'intervalle $[-1\,;3]$.



Calculez de tête l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\,dx.$

131 **Intégrales et symétrie**

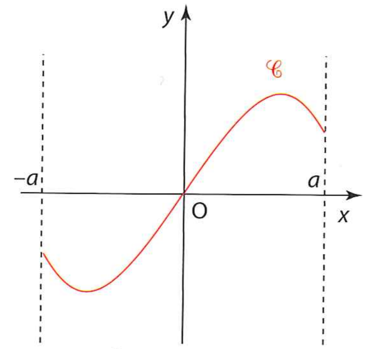
1. La fonction f est représentée ci-dessous par la courbe $\mathscr{C}$. La droite (Oy) est axe de symétrie de $\mathscr{C}$.



Graphiquement, expliquez pourquoi :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx.$$

2. La courbe $\mathscr{C}$ représente une fonction g et admet l'origine du repère comme centre de symétrie.



Expliquez pourquoi $\displaystyle\int_{-a}^{a} g(x)\,dx=0.$

132 **Intégrales et suites**

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_n=\displaystyle\int_n^{n+1} e^x\,dx.$

1. Calculez la somme $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.

2. Donnez une interprétation géométrique de S_n.

133 **Comparaison d'intégrales**

Sans les calculer, comparez les intégrales I et J suivantes :

a) $I=\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx$ $J=\displaystyle\int_0^1 (x^2+2)\,dx.$

b) $I=\displaystyle\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$ $J=\displaystyle\int_0^1 \left(e^{-x^2}-x\right)dx.$

c) $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$ $J=\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x+3}\,dx.$

134 **1. a)** Montrez que : $\forall x\in[0\,;1],\ x^2\leqslant x$ et $x\leqslant\sqrt{x}$.

b) En utilisant les résultats précédents, rangez par ordre croissant, sans les calculer, les trois intégrales :

$A=\displaystyle\int_0^1 xe^x\,dx$ $B=\displaystyle\int_0^1 x^2e^x\,dx$ $C=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,e^x\,dx.$

2. Rangez à présent, toujours par ordre croissant, les trois intégrales :

$I=\displaystyle\int_1^3 xe^x\,dx$ $J=\displaystyle\int_1^3 x^2e^x\,dx$ $K=\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x}\,e^x\,dx$

Aide

Attention, les inégalités entre x, x^2 et $\sqrt{x}$ vraies sur $[0\,;1]$ ne sont pas vraies sur $[1\,;3]$. Pour vous aider, dessinez les courbes représentatives.

135 **1.** En utilisant les inégalités $0\leqslant x^2\leqslant x$ vraies pour tout x de $[0\,;1]$, montrez que :

$$\int_0^1 e^0\,dx\leqslant\int_0^1 e^{x^2}\,dx\leqslant\int_0^1 e^x\,dx.$$

2. Déduisez-en un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx.$

136 **1.** Démontrez que pour tout x appartenant à $[1\,;2]$, $e^x\leqslant e^{x^2}$ et $e^{x^2}\leqslant x\,e^{x^2}$.

2. Déduisez-en un encadrement de $\displaystyle\int_1^2 e^{x^2}\,dx.$

137 On se propose de trouver un encadrement de $I=\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x+1}\,dx$. Soit g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x)=x\ln x-x$.

1. Calculez $g'(x)$.

2. On pose $J=\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx.$

Déduisez du résultat précédent la valeur de J.

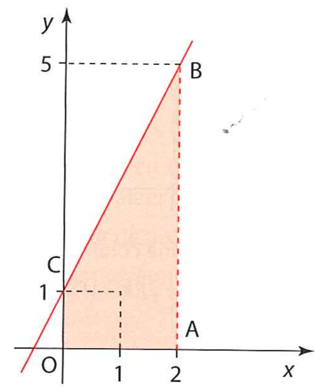
3. Montrez que si $1\leqslant x\leqslant 2$, alors $\dfrac{1}{3}\leqslant\dfrac{1}{1+x}\leqslant\dfrac{1}{2}$.

4. Déduisez des résultats précédents un encadrement de I par deux nombres décimaux comportant deux chiffres après la virgule.

CALCUL D'AIRE AVEC UNE INTÉGRALE

138 **Aire sous la courbe de deux manières**

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction : $x\mapsto 2x+1$.



1. Calculez directement l'aire sous la courbe pour x appartenant à $[0\,;2]$, c'est-à-dire l'aire du trapèze OABC.

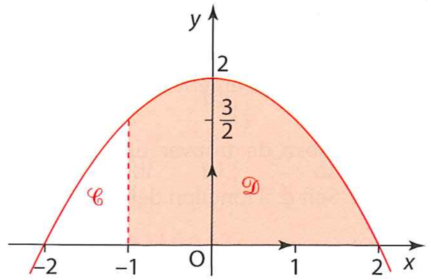
2. a) Donnez à présent la valeur de cette aire à l'aide d'une intégrale I.

b) Calculez I.

3. Comparez les résultats obtenus aux questions **2.** et **3.**.

139 Calculez l'aire sous la courbe de la fonction carré, pour x appartenant à $[0\,;1]$.

140 $\mathscr{C}$ est la courbe représentant la fonction $x \mapsto \frac{4-x^2}{2}$ dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 2 cm). Calculez l'aire, en cm², du domaine $\mathscr{D}$ colorié.



Pour les exercices 141 à 143

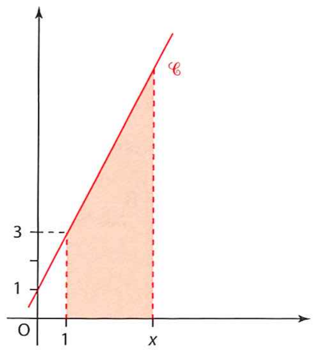
Tracez la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f et calculez l'aire sous la courbe pour x appartenant à l'intervalle I.

141 $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ $\mathrm{I} = [2\,;3]$.

142 $f(x) = \mathrm{e}^x$ $\quad$ $\mathrm{I} = [0\,;3]$.

143 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $\quad$ $\mathrm{I} = [-1\,;1]$.

144 La fonction f dont la courbe $\mathscr{C}$ est représentée ci-dessous est définie par $f(x) = 2x + 1$, avec $x \geqslant 1$.



On note F(x) l'aire du domaine colorié, en unités d'aire.

1. a) Montrez que $\mathrm{F}(x) = (x+2)(x-1)$ pour $x \geqslant 1$.

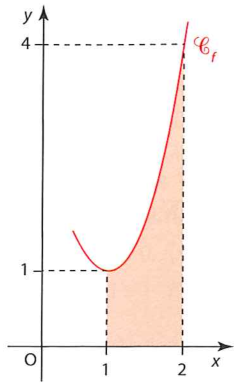
b) Déduisez-en $\mathrm{F}'(x)$.

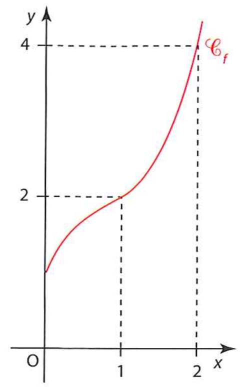
2. a) Écrivez à présent F(x) à l'aide d'une intégrale.

b) En utilisant le théorème fondamental, retrouvez le résultat de la question **1.b)**.

145 Deux courbes pour une aire

La figure de gauche donne la représentation graphique d'une fonction f, et la figure de droite, celle d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$.





Avec ces seuls renseignements, donnez l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_f$ pour x appartenant à $[1\,;2]$.

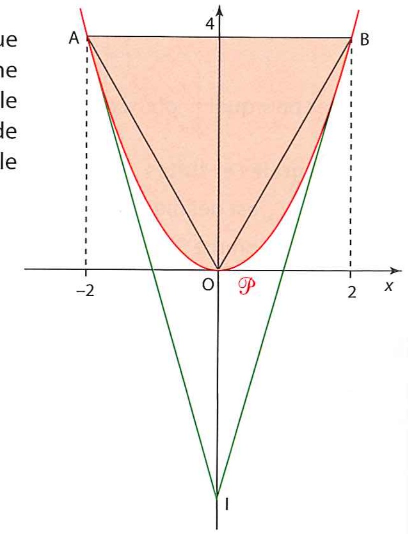
146 Un problème d'Archimède

$\mathscr{P}$ est la parabole d'équation $y = x^2$.

1. Démontrez que l'aire du domaine colorié est égale aux $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle OAB.

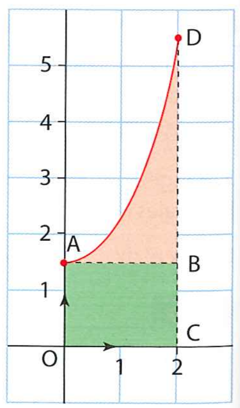
2. (IA) et (IB) sont les tangentes à $\mathscr{P}$ aux points d'abscisses -2 et $+2$.

Démontrez que l'aire du domaine colorié est égale aux deux tiers de l'aire du triangle IAB.



147 Partage équitable !

Jacques et Paul ont hérité d'un pré, représenté par la figure ci-contre (repère orthonormal, unité 1 hecto-mètre). Ce pré est délimité par une portion de route [OC], deux haies perpendiculaires à la route, [OA] et [CD], et un ruisseau dont le lit a la forme d'un arc de parabole, d'équation $y = x^2 + 1{,}5$.



Les deux frères désirent partager ce terrain en deux parcelles d'égale surface, en traçant une ligne parallèle à la route.

Jacques accepte le bord de ruisseau. Paul propose alors de prendre le rectangle [OABC].

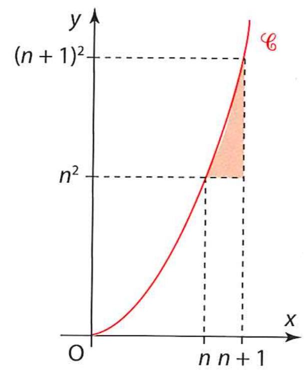
1. Expliquez pourquoi Jacques, soucieux d'équité, refuse ce partage.

2. Trouvez le réel b tel que la droite d'équation $y = b$ partage le pré en deux parcelles d'égale superficie.

148 Une suite arithmétique inattendue

$\mathscr{C}$ est la courbe représentant la fonction $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$. n est un entier naturel.

On appelle u_n l'aire du domaine colorié, en unités d'aire.



1. Calculez :
$$\int_n^{n+1} x^2\,\mathrm{d}x.$$

Aide $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$

2. Déduisez-en la valeur de u_n.

3. Montrez que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. Précisez sa raison.

VALEUR MOYENNE

Pour les exercices 149 à 151

Calculez la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I.

149 a) $f(x) = 3x^2 - 1$, $\quad$ $\mathrm{I} = [1\,;3]$.

b) $f(x) = x^3$, $\quad$ $\mathrm{I} = [0\,;1]$.

150 a) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ $\quad$ $\mathrm{I} = [1\,;4]$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad$ $\mathrm{I} = \left[\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right]$.

151 a) $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ $\quad$ $\mathrm{I} = [-2\,;0]$.

b) $f(x) = \frac{x}{(x^2+9)^2}$ $\quad$ $\mathrm{I} = [-1\,;1]$.

152 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 2x$.

Calculez la valeur moyenne de f sur chacun des intervalles suivants :

a) $\mathrm{I} = [0\,;1]$; $\quad$ **b)** $\mathrm{J} = [-1\,;0]$; $\quad$ **c)** $\mathrm{K} = [-1\,;1]$.

153 1. Calculez la valeur moyenne V_m de la fonction f :
$f : x \mapsto 2x + 3$ sur $[0\,;2]$.

2. a) Trouvez un réel c tel que $f(c) = \mathrm{V}_m$.

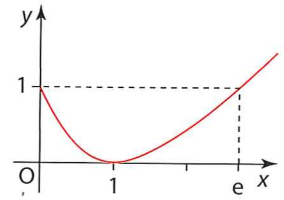
b) Retrouvez c graphiquement.

154 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x$.

Trouvez c dans $[0\,;2]$ tel que $f(c)$ soit la valeur moyenne de f sur $[0\,;2]$.

155 La courbe donnée ci-dessous représente une fonction F définie sur $]0\,;+\infty[$.

f est la fonction dont F est une primitive.



Calculez la valeur moyenne de f sur $[1\,;\mathrm{e}]$.

156 La fonction f est définie pour tout x réel par :
$f(x) = 2x + 1$.

Trouvez le réel t ($t > 1$), sachant que f a pour valeur moyenne $\frac{11}{3}$ sur $[1\,;t]$.

157 Considérons la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 9x^2 + 4x$.

1. a) Calculez la valeur moyenne de f sur $[0\,;2]$.

On notera V_m cette valeur.

b) Trouvez $c \in [0\,;2]$ tel que $\mathrm{V}_m = f(c)$.

2. Trouvez $b > 0$, sachant que sur l'intervalle $[0\,;b]$, f a pour valeur moyenne 5.

158 Prix moyen

Une entreprise achète une machine 5 000 euros ; elle peut la revendre au bout de t années au prix de :
$$\mathrm{V}(t) = \frac{5}{0{,}5t+1} \text{ pour } 0 \leqslant t \leqslant 8,$$
où t est exprimé en années, et V(t) en milliers d'euros.

1. a) Au bout de combien d'années la machine aura-t-elle perdu 50 % de sa valeur à l'achat ?

b) Quelle est sa valeur de revente au bout de 4 ans ?

2. Calculez la valeur moyenne du prix de revente dans la période $[0\,;4]$.

159 Contagion

On suppose que le nombre de personnes touchées par une maladie contagieuse est donné par la fonction f, définie par $f(t) = 10^3\,(1 - \mathrm{e}^{-0{,}2t})$ où t désigne le nombre de jours depuis le début de l'épidémie. Trouvez le nombre moyen de malades par jour :

a) dans la première semaine ;

b) dans les quinze premiers jours.

160 **Des chocolats**

Un artisan propose des chocolats « faits maison ». Il en fabrique de 1 à 18 kg par jour.

Le coût de fabrication des chocolats exprimé en euros est modélisé par la fonction f définie sur $[1\,;18]$ par :

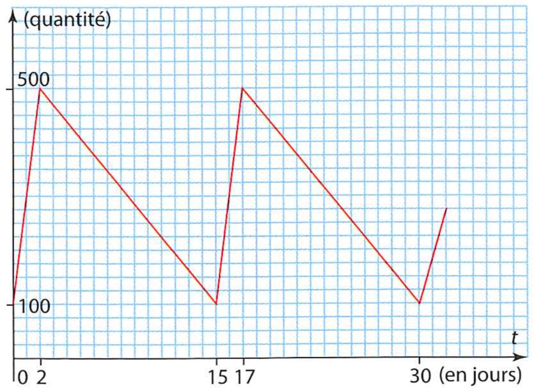
$$f(x) = 2x + 100e^{-0,2x}.$$

Pour l'artisan, la valeur moyenne du coût de fabrication d'un kilogramme de chocolats est donnée par la valeur moyenne de f sur $[1\,;18]$.

Déterminez une valeur approchée, arrondie à un euro près, de ce coût moyen.

161 **État du stock**

Le graphique suivant donne en fonction du temps, la quantité d'un produit en stock dans une usine. On désigne par f la fonction représentée.



On se propose de trouver la valeur moyenne du stock sur la période $[0\,;15]$. Il s'agit du nombre $\frac{1}{15}\int_0^{15} f(t)\,dt$. Pour le trouver, on peut rechercher l'expression de $f(t)$ pour t compris entre 0 et 2, puis pour t compris entre 2 et 15.

On calcule enfin $\frac{1}{15}\int_0^{15} f(t)\,dt$ après l'avoir écrit $\frac{1}{15}\left(\int_0^{2} f(t)\,dt + \int_2^{15} f(t)\,dt\right)$.

1. Montrez que graphiquement, on peut obtenir très vite la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;15]$.

2. Donnez, graphiquement toujours, la valeur moyenne du stock sur la période $[0\,;30]$.

162 **Tarifs dégressifs**

Les tarifs d'une entreprise de transport sont fonction de la quantité q transportée. On note $f(q)$ le coût unitaire de la q-ième unité transportée. On se propose d'étudier le coût unitaire moyen de transport pour cent unités transportées.

On suppose que $f(q) = 250 - 0,7q$.

1. Combien sera facturé le transport d'une unité ? De deux unités ? De cinq unités ?

2. a) En utilisant la formule donnant la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique, démontrez que le montant facturé pour le transport de n unités est :

$$250n - 0,7 \times \frac{n(n+1)}{2}.$$

b) Déduisez-en le coût unitaire moyen de transport pour cent unités transportées. Ce nombre sera noté m_1.

3. a) Calculez $m_2 = \frac{1}{100}\int_0^{100} f(q)\,dq$.

b) À l'aide de la représentation graphique de f, expliquez pourquoi les nombres m_1 et m_2 sont voisins.

Pouvait-on prévoir quel serait le plus grand des deux ?

163 **Bénéfice**

Une entreprise fabrique entre 300 et 1 500 pièces par semaine.

Le bénéfice, en milliers d'euros, que réalise cette entreprise lorsqu'elle fabrique x centaines de pièces est modélisé par la fonction f définie sur $[3\,;15]$ par :

$$f(x) = -200x^2 + 3\,600x - 9\,000.$$

Lorsque l'entreprise produit entre 300 et 1 500 pièces, la valeur moyenne de son bénéfice est donnée par la valeur moyenne de f sur $[3\,;15]$.

Déterminez une valeur approchée, arrondie à un euro près, de ce bénéfice moyen.

164 **Valeur moyenne d'une action**

Le cours d'une action cotée en bourse, exprimé en dizaines d'euros, est modélisé par une fonction f définie sur $[1\,;13]$ par $f(x) = 2x + 4 - 8\ln x$ où x représente le nombre de mois écoulés à partir du 1er décembre 2011.

1. Étudiez les variations de f sur $[1\,;13]$.

2. Au cours de l'année 2012, quand sera-t-il judicieux pour un investisseur d'acheter des actions ? Calculez sa dépense arrondie à un euro près.

3. a) Vérifiez que la fonction F définie sur $[1\,;13]$ par $F(x) = x^2 + 12x - 8x\ln x$ est une primitive de f.

b) Calculez la valeur moyenne de f sur $[1\,;13]$ (Donnez sa valeur exacte puis sa valeur approchée à 1 euro près).

Commentaire. *En économie, on prend souvent cette valeur moyenne comme approximation de la valeur moyenne de l'action au cours de l'année 2012.*

165 **BAC** **Approvisionnement d'un supermarché**

Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur.

Ce fournisseur propose des prix au kilogramme dégressifs en fonction du poids de fruits commandé.

Pour une commande de x kilogrammes de fruits, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est donné par la formule :

$$P(x) = \frac{x+300}{x+100} \text{ pour } x \in [100\,;+\infty[.$$

Par exemple, si le supermarché achète 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus :

$$P(300) = \frac{600}{400} = 1{,}5 \text{ euros le kilogramme.}$$

Dans ce cas, le supermarché devra payer : $300 \times 1{,}5 = 450$ euros au fournisseur pour cette commande.

1. a) Montrez que $P'(x) = -\frac{200}{(x+100)^2}$ sur $[100\,;+\infty[$.

b) Dressez le tableau de variation de la fonction P.

2. On appelle $S(x)$ la somme en euros due par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits (ces fruits étant vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme).

a) Donnez l'expression de $S(x)$ pour $x \in [100\,;+\infty[$.

b) Le magasin dispose d'un budget de 900 euros pour la commande de fruits.

Précisez, au kilogramme près, le poids maximum de fruits que le magasin peut commander sans dépasser son budget.

3. a) Montrez que $S(x) = x + 200 - \frac{20\,000}{x+100}$.

b) Déterminez une primitive de S, sachant que $x \mapsto \ln(x+100)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x+100}$ sur $[100\,;+\infty[$.

c) Le supermarché estime acheter régulièrement entre 400 et 600 kilogrammes de fruits à ce fournisseur.

Déterminez la valeur moyenne de S sur $[400\,;600]$ et donnez le résultat arrondi à l'unité.

166 **Évolution des exportations**

Soit f la fonction de la variable réelle définie sur $[0\,;10]$ par :

$$f(x) = \frac{90}{2+e^{-x}}.$$

Partie A

1. Montrez que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;10]$.

2. Calculez $f(0)$ et $f(10)$.

3. Déduisez des questions précédentes que l'équation $f(x) = 44$ admet exactement une solution dans l'intervalle $[0\,;10]$. Donnez un encadrement de cette solution par deux entiers consécutifs.

4. a) En utilisant un logiciel de calcul formel, donnez une primitive de f sur $[0\,;10]$.

b) Montrez que $\int_0^2 f(x)\,dx = 45\ln\left(\frac{2e^2+1}{3}\right)$.

Partie B

Soit g la fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \frac{90}{2+e^{-x}}.$$

La fonction g modélise l'évolution des exportations d'une entreprise, x étant le temps écoulé en années depuis le 01/01/2010 et $g(x)$ étant le montant des exportations en millions d'euros pour l'année correspondante.

1. Quel est le montant des exportations de l'entreprise au 01/01/2010 ?

2. En quelle année les exportations dépasseront-elles 44 millions d'euros ?

L'entreprise peut-elle espérer que ses exportations dépasseront 45 millions d'euros sur l'une des onze années 2010 à 2020 ?

3. On admet que la moyenne des exportations réalisées les n premières années est donnée par $I = \frac{1}{n}\int_0^n f(x)\,dx$.

Quelle est la moyenne des exportations des deux premières années ?

AIRE D'UN DOMAINE ENTRE DEUX COURBES

167 Les fonctions affines f et g sont définies par :

$$f(x) = 3x + 4 \quad \text{et} \quad g(x) = x + 1.$$

1. Tracez les droites $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ représentant f et g.

2. Coloriez le domaine limité par $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_g$ et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

3. Calculez l'aire de ce domaine.

4. Retrouvez graphiquement le résultat précédent.

168 Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \quad \text{et} \quad g(x) = 2 - x^2.$$

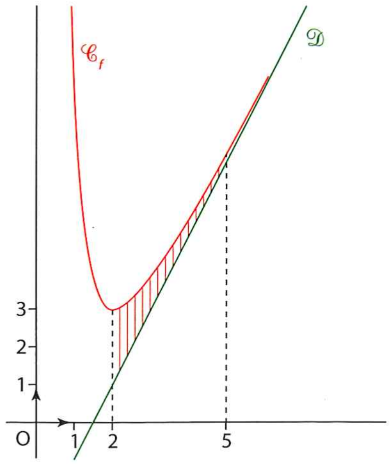
1. Dans le même repère, dessinez les courbes représentant f et g.

2. Déterminez les abscisses a et b des points d'intersection de ces courbes ainsi que la position relative des deux courbes sur l'intervalle $[a\,;b]$.

3. Calculez l'aire du domaine compris entre les deux courbes.

169 On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=2x-3+\frac{8}{x^2}.$$



$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormal et $\mathscr{D}$ est la droite d'équation $y=2x-3$.

1. Étudiez la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$ sur $]0\,;+\infty[$.

2. Calculez l'aire du domaine hachuré.

170 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=2x+3-4e^{-x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. a) Montrez que, pour tout $x \geqslant 1$, $f(x)>0$.

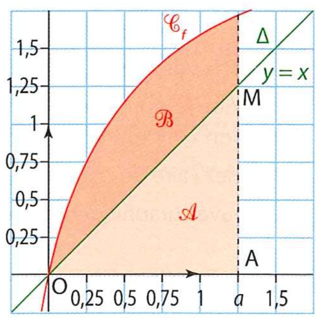
b) Étudiez la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=2x+3$.

2. Calculez l'aire entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{D}$ pour x appartenant à l'intervalle $[1\,;3]$.

171 Voile d'un bateau

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Dans ce repère, on a tracé la droite Δ, d'équation $y=x$, et la courbe $\mathscr{C}_f$, représentant la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=x+\frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$



On a également tracé la droite d'équation $x=a$, parallèle à la droite des ordonnées. La réunion des zones coloriées $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ représente, à échelle réduite, la voile d'un bateau ; les deux parties $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont faites de toiles différentes, mais doivent avoir la même aire.

Le but de l'exercice est de choisir a ($a>0$) de telle sorte que les aires $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ soient égales.

1. Calculez en fonction de a l'aire du triangle OAM.

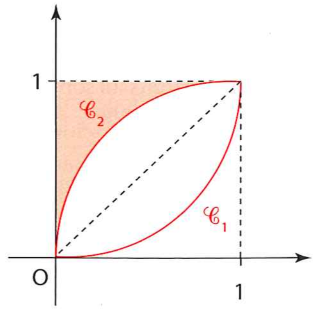
2. Calculez l'aire entre $\mathscr{C}_f$ et Δ, pour $x \in [0\,;a]$.

3. Déduisez des résultats précédents la valeur de a, $a>0$, telle que $\mathscr{A}=\mathscr{B}$.

172 Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentent sur $[0;\ 1]$ les fonctions f et g définies par :

$f(x)=x^2$ et $g(x)=\sqrt{x}$.

On sait que ces courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y=x$.



1. Calculez l'aire sous la courbe $\mathscr{C}_1$ pour x appartenant à $[0\,;1]$.

2. Déterminez l'aire de la partie coloriée en rouge.

3. Déduisez-en la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,dx$.

173 Courbe de Lorenz et coefficient de Gini

On appelle courbe de Lorenz la représentation graphique d'une fonction L vérifiant les conditions suivantes :

- L est définie sur $[0\,;1]$;
- L est croissante sur $[0\,;1]$;
- $L(0)=0$ et $L(1)=1$;
- Pour tout x de $[0\,;1]$, $L(x)\leqslant x$.

1. Soit la fonction f définie sur $[0\,;1]$ par :

$$f(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{x+1}-1.$$

a) Déterminez la dérivée de f est dressez le tableau de variation de f sur $[0\,;1]$.

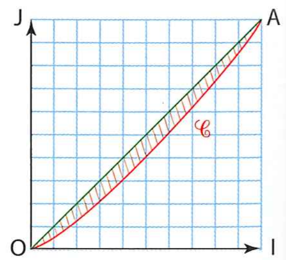
b) Déterminez le signe de $x-f(x)$ sur $[0\,;1]$.

c) Déduisez-en que la courbe représentative de f est une courbe de Lorenz.

2. Sur le graphique ci-contre est tracée la courbe $\mathscr{C}$ représentative de f et le segment [OA] où A est le point de coordonnées $(1\,;1)$.

On appelle coefficient de Gini le nombre :

$$\frac{\mathscr{A}}{\text{aire du triangle OIA}},$$



où $\mathscr{A}$ est l'aire du domaine hachuré. Ce coefficient est noté γ.

a) Donnez l'expression de $\mathscr{A}$ en utilisant une intégrale.

b) À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient que la fonction F définie par $F(x)=\frac{3}{4}x^2-x+\ln(x+1)$ est une primitive sur $[0\,;1]$ de la fonction f.

Donnez alors la valeur exacte de $\mathscr{A}$, puis la valeur arrondie à 0,01 de γ.

Note

L'utilisation du coefficient de Gini est présentée au TD p. 165.

174 Surplus des consommateurs et des producteurs

Un nouveau modèle de tablette tactile est mis sur le marché.

– La fonction d'offre est la fonction qui, au nombre d'exemplaires x proposés sur le marché, associe le prix unitaire auquel les producteurs sont disposés à vendre (x est en milliers d'exemplaires).

– La fonction de demande est la fonction qui à x associe le prix unitaire auquel les consommateurs sont disposés à acheter.

On note f la fonction d'offre et g la fonction de demande.

On suppose que la fonction f est définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=25\,e^{0{,}3x}$ et la fonction g par $g(x)=100\,e^{-0{,}2x}$.

1. a) Étudiez le sens de variation de f.

Tracez sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthogonal.

b) Étudiez de même le sens de variation de g. Tracez sa courbe représentative $\mathscr{C}_g$ dans le repère précédent.

2. L'équilibre du marché est atteint lorsque le prix de l'offre est égal au prix de la demande. Cela correspond au point d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Déterminez les coordonnées (x_0, y_0) de ce point.

Quel est le prix d'équilibre ?

Quel est le nombre d'exemplaires correspondant au prix d'équilibre ?

3. Le surplus des consommateurs

On peut voir sur le graphique que, pour x appartenant à $[0\,;x_0]$, les consommateurs étaient prêts à payer plus cher que le prix d'équilibre y_0. Le total des économies réalisées par les consommateurs est appelé le *surplus des consommateurs*.

Ce nombre est égal à $\displaystyle\int_0^{x_0} g(x)\,dx - x_0y_0$.

Attention

x comptant des milliers d'exemplaires, ce nombre est exprimé en milliers d'euros.

a) Calculez le surplus des consommateurs.

b) Interprétez ce nombre graphiquement.

4. Le surplus des producteurs

On peut voir de même sur le graphique que, pour x appartenant à $[0;\ x_0]$, les producteurs étaient prêts à vendre moins cher que le prix d'équilibre. Le gain supplémentaire réalisé par les producteurs est appelé le *surplus des producteurs*. Ce nombre est égal à $x_0y_0-\displaystyle\int_0^{x_0} f(x)\,dx$.

a) Calculez le surplus des producteurs.

b) Interprétez ce nombre graphiquement.

Clients faisant la queue devant l'Apple Store de New York, pour la mise sur le marché de l'iPad 2 le 2 mars 2011.

POUR LA LOGIQUE

Pour les exercices 175 à 177

Dites si la propriété indiquée est vraie ou fausse en justifiant votre réponse.

175 f désigne une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

1. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^a f(x)\,dx+\int_a^1 f(x)\,dx$.

2. $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\int_0^b f(x)\,dx-\int_0^a f(x)\,dx$.

176 Pour tout entier $n\geqslant 2$, une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x^n}$ est une fonction de la forme $x\mapsto\dfrac{k}{x^p}$ où k est un réel et p un entier.

177 Pour toute fonction f continue sur $[-2\,;2]$,

$\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \geqslant \int_0^2 f(x)\,dx$.

178 Démontrez que la propriété suivante est fausse.

Pour toute fonction f continue sur $[0\,;4]$:

$$\int_0^4 f(x)\,dx \geqslant 0 \Rightarrow \forall x\in[0\,;4],\ f(x)\geqslant 0.$$

EXERCICES

Un peu d'histoire

Chercheurs d'hier

Leibniz et le calcul intégral

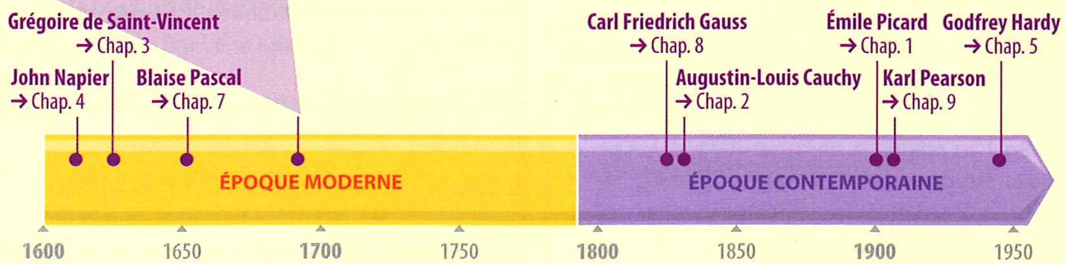
Le calcul intégral prend racine dans une large classe de problèmes : calculs d'aires, de volumes, de longueurs de courbes, et ce dès l'Antiquité : Eudoxe (IVe siècle avant J.C.), Archimède (IIIe siècle avant J.C.).

Gottfried Wilhelm Leibniz
1646 - 1716

Le calcul intégral au sens moderne est inventé par Newton et Leibniz de manière indépendante et par des points de vue différents.

Isaac Newton (1642-1727) considère que l'aire sous une courbe représentée dans un repère orthogonal par une fonction $f(x)$ est une *primitive* de cette fonction. Dans la théorie du calcul intégral, ce n'est plus la notion d'aire qui permet de définir l'intégrale, mais c'est l'intégration qui permet d'expliciter rigoureusement la notion d'aire.

Parce que c'est un esprit systématique et universel, l'influence de Leibniz sur la pensée moderne est analogue à celle d'Aristote pour le monde antique et médiéval. Logicien, juriste, penseur politique, philosophe, Leibniz a plusieurs fois été un créateur en mathématiques. En particulier pour la liaison entre l'idée d'intégration et celle de dérivation. Il lance les mathématiques sur le terrain de la modernité.



À la même époque

En France

L'édit de Fontainebleau, signé par Louis XIV en 1674, révoque l'édit de Nantes et met fin à l'existence légale du protestantisme en France. Il provoquera l'exode de toute une partie de l'élite de la nation.

Louis XIV
(1638 - 1715)

À la même époque

En Grande-Bretagne

Sous le règne de Charles II, le parlement de Grande-Bretagne vote en 1679 l'*Habeas Corpus Act* visant à garantir l'individu contre l'arbitraire des décisions de justice. On peut y voir la première manifestation de la pensée des droits de l'homme.

Charles II
(1630 - 1685)

Sur le Web
http://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=leibniz
http://serge.mehl.free.fr/chrono/Leibniz.html

Accompagnement personnalisé

Soutien

179 Connaître les primitives de $x \mapsto x^n$

On se propose de déterminer les primitives de la fonction $f : x \mapsto 4x^5 + \dfrac{2}{x^3}$ sur $]0\,;+\infty[$.

➜ *L'énoncé précise* ***les*** *primitives. En effet une fonction dérivable admet* ***une seule*** *fonction dérivée, mais une fonction continue sur un intervalle I admet* ***une infinité*** *de primitives qui s'obtiennent en ajoutant une constante à l'une d'entre elles.*

1. a) Donnez une primitive de $x \mapsto x^5$.

➜ ***Indication.*** *On utilise la formule donnant une primitive de $x \mapsto x^n$ avec $n = 5$.*

b) Déduisez-en une primitive de $x \mapsto 4x^5$.

2. On se propose de trouver une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{x^3}$.

➜ *On va se ramener à des fonctions de type $x \mapsto x^n$.*

a) Remarquez que $\dfrac{2}{x^3} = 2 \times \dfrac{1}{x^3}$, c'est-à-dire $2 \times x^{-3}$, et déduisez-en qu'une primitive de $x \mapsto \dfrac{2}{x^3}$ est la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$.

b) Déduisez-en que les primitives sur $]0\,;+\infty[$ de f sont les fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{2}{3}x^6 - \dfrac{1}{x^2} + k$, avec $k \in \mathbb{R}$.

180 Primitive, intégrale et aire

On se propose de calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction $x \mapsto e^x$, la droite des abscisses, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

➜ *Lorsque la courbe est facile à tracer, il peut être utile de la tracer pour avoir un ordre de grandeur du résultat.*

1. Écrivez $\mathcal{A}$ sous forme d'intégrale.

2. Indiquez une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^x$ et déduisez-en la valeur de $\mathcal{A}$.

➜ ***Indication.*** *Si F est une primitive de f continue et positive sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$, égal à $F(b) - F(a)$, est l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f, la droite des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.*

181 De deux manières

On pose, pour $x \in [0\,;3]$, $f(x) = x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité : 1 cm).

1. Calculez l'aire du domaine compris entre $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$.

2. Retrouvez ce résultat géométriquement en utilisant la formule donnant l'aire d'un trapèze.

Approfondissement

182 APPRENDRE À CHERCHER

On considère, dans un repère orthonormé, la droite d d'équation $y = x$ et la courbe $\mathcal{C}_n$ d'équation $y = x^n$, pour $n \geqslant 1$. On note :

- $\mathcal{D}_n$ le domaine délimité par d et $\mathcal{C}_n$ pour $x \in [0\,;1]$,
- A_n l'aire de ce domaine.

On se propose d'étudier le sens de variation de la suite (A_n) et sa limite éventuelle.

➜ *L'énoncé ne demande pas de construire d et les courbes $\mathcal{C}_n$, mais il est conseillé de le faire pour quelques valeurs de n ($n = 1$; $n = 2$; $n = 3$) pour avoir une idée du résultat.*

1. a) Dans un repère orthonormé, donnez l'allure des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ en précisant, pour chaque courbe, les points d'abscisse $\dfrac{1}{2}$, 1 et $\dfrac{3}{2}$.

b) Quelle conjecture pouvez-vous faire concernant le sens de variation de la suite (A_n) ?

2. a) Donnez l'allure des courbes $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_6$, $\mathcal{C}_8$ en précisant pour chacune d'elles l'ordonnée des points d'abscisses $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{4}$ et 0,9.

b) Quelle semble être la limite de la suite (A_n) ?

3. a) Calculez A_n.

b) Déduisez-en le sens de variation de la suite (A_n).

c) Quelle est la limite de la suite (A_n) ?

d) Vos résultats sont-ils en accord avec les conjectures faites dans les questions **1** et **2** ?

183 Un problème de moyenne

a, b, c sont des réels tels que $a \leqslant b \leqslant c$, et f est une fonction continue sur $[a\,;c]$.

μ_1 est la valeur moyenne de f sur $[a\,;b]$ et μ_2 est la valeur moyenne de f sur $[b\,;c]$.

$\dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2}$ est-elle la valeur moyenne de f sur $[a\,;c]$?

184 Trois domaines de même aire

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points I(1 ; 0), J(0 ; 1) et K(1 ; 1).

Les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ d'équations respectives $y = \sqrt{x}$ et $y = x^n$ (n entier, $n \geqslant 1$) délimitent, dans le carré OIKJ, trois domaines.

Existe-t-il un entier $n \geqslant 1$ tel que ces trois domaines aient la même aire ?

Le jour du BAC

185 Exercice commenté

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant des conseils.

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$f(x) = x(\ln x - 1).$$

Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x) = x \ln x$.

1. a) Montrer que, pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a $f'(x) = \ln x$.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;+\infty[$ et
En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Analyser l'énoncé
Dans la première question, on demande de réaliser une étude de fonction : signe de la dérivée, sens de variation.

2. a) Démontrer que la fonction H définie sur $]0\,;+\infty[$ par :
$$H(x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2$$
est une primitive sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction h définie précédemment.

b) En déduire une primitive F de f et calculer $\int_1^e f(x)\,dx$.

c) En déduire l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$. On arrondira le résultat au dixième.

Analyser l'énoncé
Il s'agit d'un calcul d'aire à l'aide d'une intégrale.

Conseils

1. a) On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$ et le fait que la dérivée de $x \mapsto \ln x$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$.

b) Le signe de f' est celui de la fonction ln.

Remarque
Pour la question 2, on aura besoin de connaître le signe de F sur $[1\,;e]$: placez donc ces points dans le tableau de variation de f.

2. a) « H est une primitive de h » signifie que $H' = h$. On calcule H′ en utilisant les formules : $(u - v)' = u' - v'$ et $(uv)' = u'v + uv'$.
On vérifie que $H' = h$.

b) On obtient aisément F en utilisant la question **2.a)**.
On a alors :
$$\int_1^e f(x)\,dx = F(e) - F(1).$$

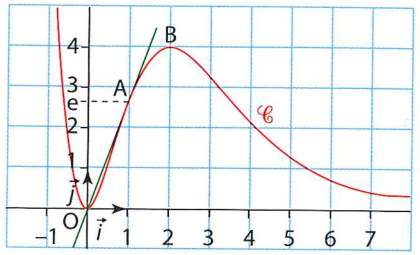
Remarque
La donnée de H permet de déterminer une primitive de f.

c) Pour $x \in [1\,;e]$, $f(x) \leqslant 0$. Donc l'aire demandée est égale à $-\int_1^e f(x)\,dx$.
La calculatrice permet d'obtenir facilement le résultat arrondi au dixième.

→ Voir les corrigés p. 361

VRAI OU FAUX

186 La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous représente une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$. La droite (OA) est tangente en A $(1\,;e)$ à la courbe $\mathscr{C}$.
On note f' la fonction dérivée de f et on appelle F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$.



Pour chacune des affirmations suivantes, indiquez si elle est vraie ou fausse. Il n'est pas demandé de justifier les réponses.

a) L'équation $f(x) = 0{,}1$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$.

b) $f'(1) = f(1)$.

c) $\int_2^4 f(x)\,dx < 5$.

d) $\int_{-1}^0 f(x)\,dx < 0$.

e) $\int_1^3 f'(x)\,dx < 1$.

f) La fonction F est croissante sur $\mathbb{R}$.

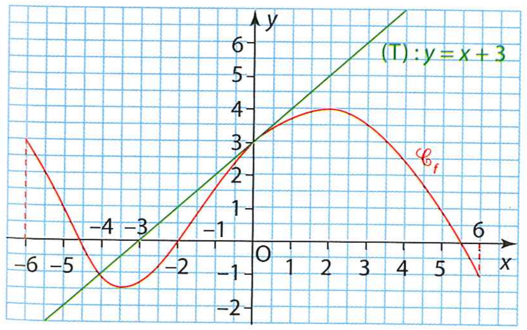
g) $F(5) > F(6)$.

h) La fonction f' est croissante sur l'intervalle $[1\,;2]$.

QCM

Pour les exercices 187 et 188, indiquez la réponse exacte sans justification.

187 On donne ci-après, dans un repère orthonormé, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-6\,;6]$.
La droite (T) d'équation $y = x + 3$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point I de coordonnées $(0\,;3)$.



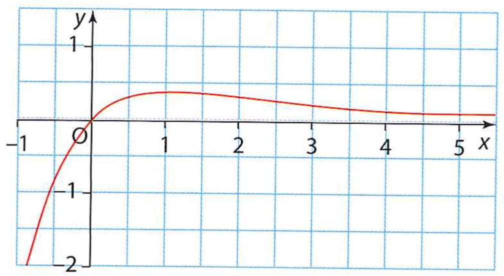
1. Le nombre dérivé de f en 0 est :
a) 0 **b)** 1 **c)** 3.

2. On pose $J = \int_{-2}^0 f(x)\,dx$. On peut affirmer que :
a) $-2 < J < 0$
b) $-4 < J < -2$
c) $2 < J < 4$.

3. On appelle F une primitive de f sur l'intervalle $[-6\,;6]$.
a) F est croissante sur l'intervalle $[-3\,;2]$;
b) F est décroissante sur l'intervalle $[-1\,;5]$;
c) F est croissante sur l'intervalle $[-1\,;5]$.

4. En unités d'aire, l'aire sous la courbe pour x appartenant à $[-2\,;0]$ est égale à :
a) $\int_{-2}^3 f(x)\,dx$ **b)** $\int_{-2}^0 f(x)\,dx$ **c)** $-\int_{-2}^0 f(x)\,dx$.

188 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = x\,e^{-x}.$$
La courbe représentative de f est tracée dans le repère ci-dessous :



1. Pour tout réel x, $f'(x)$ est égale à :
a) $-x\,e^{-x}$ **b)** e^{-x} **c)** $(1 - x)e^{-x}$.

2. La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 a pour équation :
a) $y = x$ **b)** $y = 2x$ **c)** $y = -x$.

3. Une primitive F de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
a) $F(x) = \frac{1}{2}x^2\,e^{-x}$
b) $F(x) = -(1 + x)e^{-x}$
c) $F(x) = -x\,e^{-x}$.

4. La valeur de $\int_0^2 f(x)\,dx$ est :
a) négative
b) inférieure à 1
c) supérieure à 3.

5. La valeur de $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$ est :
a) égale à $\int_0^1 f(x)\,dx$
b) négative
c) égale à $-\frac{1}{4}$.